УДК 517.53

Чебышевские рациональные приближения в круге, на окружности и на отрезке

Пекарский А. А.

Пусть Ω — некоторое множество в комплексной плоскости $\mathbf{C}$ и $\overline{\Omega}$ — его замыкание. Через $C(\Omega)$ обозначим множество непрерывных на Ω функций с нормой $\|f\|_{\infty,\Omega}=\sup\{|f(z)|: z\in\Omega\}$. Если Ω — область, то $A(\Omega)$ — множество функций, аналитических в Ω. Множество рациональных функций степени не выше n $(n\geqslant 0)$, полюсы которых могут принадлежать лишь $\mathbf{C}\setminus\Omega$, обозначим через $\mathscr{R}_n(\Omega)$. Введем $R_n(f, \Omega)=\inf\{\|f-r\|_{\infty,\Omega}: r\in\mathscr{R}_n(\Omega)\}$ — наилучшее равномерное приближение функции f множеством $\mathscr{R}_n(\Omega)$. Введем также $D_+=\{z\in\mathbf{C}: |z|<1\}$, $D_-=\mathbf{C}\setminus\overline{D}_+$ и $T=\{\xi\in\mathbf{C}: |\xi|=1\}$.

Е. П. Долженко [1] показал, что если $f\in C(T)$ и $\sum R_n(f, T)<\infty$, то функция f абсолютно непрерывна на T. Им же было установлено, что $R_n(f, T)$ для абсолютно непрерывных функций f могут стремиться к нулю как угодно медленно, т. е. результат из [1] не допускает обращения (см. [2]). В работе [3] Е. П. Долженко рассмотрел аналогичную задачу для функций $f\in A(D_+)\cap C(\overline{D}_+)$. Было показано, что если $\sum R_n(f, \overline{D}_+)<\infty$, то f' принадлежит пространству Харди H_1. Таким образом, была поставлена задача: что можно сказать о поведении $R_n(f, \overline{D}_+)$ при $n\to\infty$ для функций $f\in A(D_+)\cap(\overline{D}_+)$ таких, что $f'\in H_1$? В работе автора [4] для таких функций была получена оценка: $R_n(f, \overline{D}_+)=O(\ln^3 n/n)$. Позже [5] удалось заменить $\ln^3 n$ на $\ln n$. Совершенствуя примененный в [5] метод, мы получим такой результат: если $f\in A(D_+)\cap C(\overline{D}_+)$ и $f'\in H_1$, то

$$R_n(f, \overline{D}_+)\leqslant cn^{-1}\|f'\|_{H_1} \quad (n\geqslant 1)\,^1. \tag{1}$$

Доказательство (1) основано на применении атомического разложения пространства $\operatorname{Re} H_1$, введенного Р. Койфманом [6] (см. также [7]) рациональных операторов типа Джексона, построенных В. Н. Русаком [8], [9], и полученного нами неравенства, связывающего наилучшие рациональные приближения в $\overline{D}_+$ и на T [10]. На основании результатов из [11] о наилучших рациональных приближениях в пространстве H_1 здесь же неравенство (1) обобщается, например, на пространство Бесова $B^\alpha_{1/\alpha}$ $(\alpha\geqslant 1)$ функций в круге D_+, на окружности T и на отрезке $[-1, 1]$. Полученные результаты окончательно улучшают прямые теоремы чебышевских рациональных приближений Ю. А. Брудного [12], В. В. Пеллера [13] и автора [11]. В сочетании с известными обратными теоремами В. В. Пеллера [13], С. Семмеса [14] и автора [15] результаты настоящей статьи дают описание множества непрерывных функций, наилучшие рациональные приближения которых стремятся к нулю со степенной скоростью.

[1] Здесь и ниже через c, c_1, c_2, ... обозначаем абсолютные положительные постоянные в разных местах, вообще говоря, разные. Аналогично через $c\,(\ldots)$, $c_1\,(\ldots)$, $c_2\,(\ldots)$, ... обозначаем некоторые положительные величины, зависящие лишь от указанных в скобках параметров.

Основные результаты настоящей работы анонсированы в [16] и докладывались на заседании Всесоюзной школы по теории функций и приближений в Саратове в феврале 1986 г.

§ 1. Леммы о простых функциях

Действительнозначную функцию φ, определенную на $\mathbf{R}$, называем простой, если она абсолютно непрерывна, $\|\varphi'\|_{\infty,\mathbf{R}}<\infty$ и существует (конечный) интервал $I(\varphi)$, такой, что $\operatorname{supp}\varphi\subset I(\varphi)$. Поскольку интервал $I(\varphi)$, который мы называем опорным для φ, определяется неоднозначно, то ниже, говоря о простых функциях, мы будем подразумевать, что для них одновременно задается и некоторый вполне определенный опорный интервал. Важной характеристикой простой функции является величина $\mu(\varphi)=|I(\varphi)|\cdot\|\varphi'\|_{\infty,\mathbf{R}}<\infty$, где $|I(\varphi)|$ — длина $I(\varphi)$. Тождественно равную нулю функцию также будем называть простой.

Лемма 1.1. *Пусть* $f(x)=\sum_{k=1}^{p}\varphi_k(x)$, *где* φ_k — *простые функции такие, что* $I(\varphi_1)\supset I(\varphi_2)\supset\ldots\supset I(\varphi_p)$. *Положим* $\sum_{k=1}^{p}\mu(\varphi_k)=v$. *Тогда для любого* $n\geqslant 6$ $(n\in\mathbf{N})$ *существуют простые функции* $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_q$ $(q\leqslant n)$, *удовлетворяющие условиям:*

$$a)\ \left|f(x)-\sum_{j=1}^{q}\psi_j(x)\right|\leqslant\frac{c_1v}{n}\ \text{при } x\in\mathbf{R},$$

$$b)\ f(x)-\sum_{j=1}^{q}\psi_j(x)=0\ \text{при } x\in I(\varphi_p)\cup[\mathbf{R}\setminus I(\varphi_1)],$$

$$c)\ \sum_{j=1}^{q}\mu(\psi_j)\leqslant c_2v.$$

Доказательство. Для $p\leqslant 6$ лемма очевидна, поэтому считаем $p>6$. Не ограничивая общности можем также считать, что $I(\varphi_k)=(-a_k,b_k)$, $k=1\div p$, где $a_k\geqslant 1$, $b_k\geqslant 1$ и $a_p=b_p=1$. При $y>0$ введем простую функцию $\Delta_y(x)=\max\{0,1-|x|/y\}$, для которой $I(\Delta_y)=(-y,y)$ и $\mu(\Delta_y)=2$. Положим $y_k=\min\{a_k,b_k\}$, $\mathring{\varphi}_k(x)=\varphi_k(x)-\varphi_k(0)\Delta_{y_k}(x)$ и $f_1(x)=\sum_{k=1}^{p}\varphi_k(0)\Delta_{y_k}(x)$, $f_2(x)=\sum_{k=1}^{p}\mathring{\varphi}_k(x)$. Зафиксируем некоторое $m\in\mathbf{N}$. Покажем, что существуют действительные числа $h_1,h_2,\ldots,h_{m_1}$ и положительные $y_1=z_1>z_2>\ldots>z_{m_1}=y_p=1$ $(m_1\leqslant 2(m+1))$, удовлетворяющие условиям:

$$a')\quad \left|f_1(x)-\sum_{j=1}^{m_1}h_j\Delta_{z_j}(x)\right|\leqslant\frac{c_3}{m}\sum_{k=1}^{p}|\varphi_k(0)|\ \text{при } x\in\mathbf{R},$$

$$b')\quad f_1(x)-\sum_{j=1}^{m_1}h_j\Delta_{z_j}(x)=0\ \text{при } x\in[-1,1]\cup[\mathbf{R}\setminus(-y_1,y_1)],$$

$$c')\quad \sum_{j=1}^{m_1}|h_j|\leqslant\sum_{k=1}^{p}|\varphi_k(0)|.$$

Действительно, пусть сначала все $\varphi_k(0)\geqslant 0$. Тогда функция $f_1(x)$ является четной, выпуклой вниз на $[0,\infty)$, линейной на $[0,1]$ и равной нулю на $[y_1,\infty)$. Определим числа $z_1,z_2,\ldots,z_{m+1}$ $(m_1=m+1)$ из условия, что изменение функции $f_1(x)$ на каждом из отрезков $[z_{j+1}, z_j]$ $(j=1\div m)$ не превышает $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{p}\varphi_k(0)$. Геометрически легко найти неотрицательные $h_1, h_2, \ldots, h_{m+1}$ такие, чтобы условия $a')-c')$ выполнялись. Очевидно, в этом случае в условии $a')$ можем положить $c_3=1$. В общем случае введем функции

$$f_1^+(x)=\sum_{\varphi_k(0)\geqslant 0}\varphi_k(0)\,\Delta_{y_k}(x),\quad f_1^-(x)=\sum_{\varphi_k(0)<0}(-\varphi_k(0))\,\Delta_{y_k}(x).$$

Тогда $f_1(x)=f_1^+(x)-f_1^-(x)$ и нужно рассмотреть каждую функцию $f_1^+(x)$ и $f_1^-(x)$ отдельно. Условия $a')-c')$ будут выполняться с $m_1=2(m+1)$ и $c_3=2$.

Перейдем к рассмотрению функции $f_2(x)$. Определим на $\mathbf{R}$ непрерывную функцию $\xi^+(x)$. Положим $\xi^+(\pm 2^j)=[1+(-1)^j]/2$ $(j=0, 1, 2, \ldots)$, а на интервалах $(-1, 1)$, $(2^j, 2^{j+1})$ и $(-2^{j+1}, -2^j)$ $(j=0, 1, 2, \ldots)$ функцию $\xi^+(x)$ считаем линейной. Положим $\xi^-(x)=1-\xi^+(x)$. Тогда $f_2(x)=f_2^+(x)+f_2^-(x)$, где

$$f_2^\pm(x)=\sum_{k=1}^{p}\mathring{\varphi}_k(x)\,\xi^\pm(x).$$

Из условия $\mathring{\varphi}_k(0)=0$ следует, что функции $\mathring{\varphi}_k(x)\xi^+(x)$ и $\mathring{\varphi}_k(x)\xi^-(x)$ разлагаются соответственно на сумму простых функций $\psi_{k,i}^+(x)$ $(i=1\div s^+)$ и $\psi_{k,i}^-(x)$ $(i=1\div s^-)$. При этом интервалы, на которые делится $(-a_1, b_1)$ нулями функций $\xi^+(x)$ и $\xi^-(x)$, являются соответственно опорными для $\psi_{k,i}^+(x)$ и $\psi_{k,i}^-(x)$. Можем считать, что каждая система функций $\{\psi_{k,i}^+\}_{i=1}^{s^+}$ и $\{\psi_{k,i}\}_{i=1}^{s^-}$ при фиксированном значении i имеет один и тот же опорный интервал. Легко найти, что

$$\sum_{i=1}^{s^\pm}\mu(\psi_{k,i}^\pm)\leqslant c_4\mu(\varphi_k),\quad k=1\div p. \tag{2}$$

Введем простые функции

$$\psi_i^\pm(x)=\sum_{k=1}^{p}\psi_{k,i}(x),\quad i=1\div s^\pm.$$

Нетрудно заметить, что

$$f_2^\pm(x)=\sum_{i=1}^{s^\pm}\psi_i^\pm(x).$$

Рассмотрим, например, функцию $f_2^+(x)$. Можем считать, что ψ_i^+ пронумерованы так, что $I(\psi_1^+)=(-2, 2)$ и $\mu(\psi_2^+)\geqslant\mu(\psi_3^+)\geqslant\cdots\geqslant\mu(\psi_{s^+}^+)$. Из (2) получаем, что $\sum_{i=1}^{+}\mu(\psi_i^+)\leqslant c_4 v$ и, следовательно,

$$\mu(\psi_i^+)\leqslant c_4 v/(i-1),\quad i=2\div s^+. \tag{3}$$

Для выбранного ранее $m\in\mathbf{N}$ положим $m_2^+=\min\{m, s^+\}$. Учитывая неравенство (3), а также то, что интервалы $I(\psi_i^+)$ $(i=1\div s^+)$ попарно не пересекаются, получим:

$$a'')\quad \left|f_2^+(x)-\sum_{i=1}^{m_2^+}\psi_i^+(x)\right|\leqslant\frac{c_5 v}{m}\ \text{при}\ x\in\mathbf{R},$$

b'') $f_2^+(x)-\sum_{i=1}^{m_2^+}\psi_i^+(x)=0$ при $x\in[-1,1]\cup[\mathbf{R}\setminus(-a_1,b_1)]$,

c'') $\sum_{i=1}^{m_2^+}\mu(\psi_i^+)\leqslant c_6 v$.

Очевидно, аналогичные соотношения имеют место и для функции $f_2^-(x)$. Итак, из соотношений $a')-c')$ и $a'')-c'')$ следует лемма 1.1.

Лемма 1.2. *Пусть выполнены условия леммы* 1, $p\geqslant 2$ и $1\leqslant k_1<$ $<k_2<\cdots<k_d\leqslant p-1$ — *некоторые натуральные числа. Тогда для любого* $n\in\mathbf{N}$ *существуют простые функции* $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_q$ $(q\leqslant n+6(d+1))$, *удовлетворяющие условиям:*

a) $\left|f(x)-\sum_{j=1}^{q}\psi_j(x)\right|\leqslant\frac{c_1 v}{n}$ *при* $x\in\mathbf{R}$,

b) $f(x)-\sum_{j=1}^{q}\psi_j(x)=0$ *при* $x\in I(\varphi_p)\cup\left[\bigcup_{i=1}^{d}(I(\varphi_{k_i})\setminus I(\varphi_{k_i+1}))\right]\cup$ $\cup[\mathbf{R}\setminus I(\varphi_1)]$,

c) $\sum_{j=1}^{q}\mu(\psi_j)\leqslant c_2 v$.

Доказательство. Положим $k_0=0$, $k_{d+1}=p$ и, предполагая, что $v\neq 0$ (при $v=0$ лемма очевидна), для $i=1\div d+1$ введем следующие объекты:

$$f_i(x)=\sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i}\varphi_k(x),\quad v_i=\sum_{k=k_{i-1}+1}^{k_i}\mu(\varphi_k),\quad n_i=[v_i n/v]+1\ [2].$$

Согласно лемме 1.1 для любого $i=1\div d+1$ существуют простые функции $\psi_{i,j}$ $(j=1\div q_i,\ q_i\leqslant n_i+5)$, удовлетворяющие условиям:

a_i) $\left|f_i(x)-\sum_{j=1}^{q_i}\psi_{i,j}(x)\right|\leqslant\frac{c_1 v_i}{n_i}\leqslant\frac{c_1 v}{n}$ при $x\in\mathbf{R}$,

b_i) $f_i(x)-\sum_{j=1}^{q_i}\psi_{i,j}(x)=0$ при $x\in I(\varphi_{k_i})\cup[\mathbf{R}\setminus I(\varphi_{k_{i-1}+1})]$,

c_i) $\sum_{j=1}^{q_i}\mu(\psi_{i,j})\leqslant c_2 v_i$.

Из условий $a_i)-c_i)$ следует, что функции $\psi_{i,j}(x)$ $(i=1\div d+1,\ j=1\div q_i)$ являются искомыми. При этом их количество $q=\sum_{i=1}^{d+1}q_i\leqslant n+6(d+1)$. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. *Пусть* $f(x)=\sum_{k=1}^{p}\varphi_k(x)$, *где* φ_k — *простые функции такие, что любые два интервала* $I(\varphi_k)$ *и* $I(\varphi_{k'})$ *при* $k=k'$ *либо не пересекаются, либо один из них вложен в другой. Положим* $\sum_{k=1}^{p}\mu(\varphi_k)=v$. *Тогда для лю-*

[2] $[a]$ есть целая часть числа a.

бого $n \in \mathbf{N}$ существуют простые функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_q$ $(q \leqslant n)$, удовлетворяющие условиям:

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^{q} \psi_j(x) \right| \leqslant \frac{c_1 v}{n} \text{ при } x \in \mathbf{R}, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{q} \mu(\psi_j) \leqslant c_2 v. \tag{5}$$

Доказательство. Введем функцию

$$\theta(x) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\mu(\varphi_k)}{|I(\varphi_k)|} \chi_k(x),$$

где $\chi_k(x)$ — характеристическая функция интервала $I(\varphi_k)$. Зафиксируем некоторое $m \in \mathbf{N}$ $(m \geqslant 2)$ и через (ξ_0, ξ_m) обозначим наименьший интервал, содержащий $\bigcup_{k=1}^{p} I(\varphi_k)$. Заметим, что $\theta(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \mathbf{R}$, $\theta(x) \equiv 0$ при $x \in \mathbf{R} \setminus (\xi_0, \xi_m)$ и $\int_{\mathbf{R}} \theta(x) dx = 0$. Поэтому можем определить точки $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{m-1} < \xi_m$ такие, что $\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \theta(x) dx = v/m$ $(i = 0 \div m-1)$. Множество $\{1, 2, \ldots, p\}$ разобьем на подмножества G_s $(s = 1 \div m)$:

$$G_1 = \{k\colon \xi_1 \in I(\varphi_k)\}, \quad G_s = \{k\colon \xi_s \in I(\varphi_k)\} \setminus \bigcup_{i=1}^{s-1} G_i \quad (s = 2 \div m-1),$$

$$G_m = \{1, 2, \ldots, p\} \setminus \bigcup_{s=1}^{m-1} G_s.$$

Введем также функции

$$f_s(x) = \sum_{k \in G_s} \varphi_k(x). \tag{6}$$

Если какое-либо множество $G_s = \varnothing$, то соответствующую функцию $f_s(x)$ считаем равной нулю тождественно. Нетрудно заметить, что

$$\|f_m\|_{\infty, \mathbf{R}} \leqslant v/m. \tag{7}$$

Предположим сначала, что все $G_j \neq \varnothing$ $(j = 1 \div m-1)$. Простые функции φ_k, входящие в разложение f_s по формуле (6), обозначим через $\Gamma_{s,i}$ $(i = 1 \div p_s)$. Как следует из построения множеств G_s и условий леммы, можем считать, что $I(\Gamma_{s,1}) \supset I(\Gamma_{s,2}) \supset \cdots \supset I(\Gamma_{s,p_s})$. Положим $I_s = I(\Gamma_{s,1})$. Для каждого $s = 1 \div m-1$ определим множество $E_s \subset I_s$ следующим образом. Считаем $E_s = \varnothing$, если интервал I_s не содержит никакого отличного от себя интервала $I_{s'}$. Если же такие $I_{s'}$ существуют[3], то E_s определим как объединение всех интервалов $I_{s^*} \subsetneqq I_s$, удовлетворяющих условию: не существует интервала $I_{s''}$ такого, что $I_{s^*} \subsetneqq I_{s''} \subsetneqq I_s$. Очевидно, если $E_s \neq \varnothing$, то E_s есть объединение некоторых попарно непересекающихся интервалов $I(\varphi_k)$. Количество таких интервалов $I(\varphi_k)$ обозначим через d_s. В случае $E_s = \varnothing$ положим $d_s = 0$. Нетрудно заметить, что

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_{m-1} \leqslant m. \tag{8}$$

[3] Согласно условию лишь два рассмотренных случая возможны.

Предполагая, что $v \neq 0$ (при $v=0$ лемма очевидна), введем

$$m_s=[mv_s/v]+1,\quad v_s=\sum_{i=1}^{r_s}\mu(\Gamma_{s,i}).$$

Согласно лемме 1.2 существуют простые функции $\psi_{s,j}(x)$ ($j=1\div q_s$, $q_s\leqslant \leqslant m_s+6(d_s+1)$), удовлетворяющие условиям:

$$a_s)\ \left|f_s(x)-\sum_{j=1}^{q_s}\psi_{s,j}(x)\right|\leqslant\frac{c_1v_s}{m_s}\leqslant\frac{c_1v}{m}\ \text{ при } x\in\mathbf{R},$$

$$b_s)\ f_s(x)-\sum_{j=1}^{q_s}\psi_{s,j}(x)=0\ \text{ при } x\in E_s\cup(\mathbf{R}\setminus I_s),$$

$$c_s)\ \sum_{j=1}^{q_s}\mu(\psi_{s,j})\leqslant c_2\sum_{i=1}^{p_s}\mu(\Gamma_{s,i})=c_2v_s.$$

Из условия b_s), способа построения множеств E_s и функций f_s получаем, что при фиксированном $x\in\mathbf{R}$ разве лишь одно из чисел $f_s(x)-\sum_{j=1}^{q_s}\psi_{s,j}(x)$ ($s=1\div m-1$) отлично от нуля. Поэтому из условия a_s) получим

$$\left|\sum_{s=1}^{m-1}f_s(x)-\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{q_s}\psi_{s,j}(x)\right|=\max_{s=1\div m-1}\left|f_s(x)-\sum_{j=1}^{q_s}\psi_{s,j}(x)\right|\leqslant\frac{c_1v}{m}\quad\text{при}\quad x\in\mathbf{R}. \tag{9}$$

С учетом условия (7) находим

$$\left\|f-\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{q_s}\psi_{s,j}\right\|_{\infty,\mathbf{R}}\leqslant\frac{c_3v}{m}. \tag{10}$$

Из условия c_s) получаем также, что

$$\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{q_s}\mu(\psi_{s,j})\leqslant c_2\sum_{s=1}^{m-1}v_s\leqslant c_2v. \tag{11}$$

Из неравенства (8) находим, что общее число слагаемых в двойной сумме соотношения (10) равно

$$\sum_{s=1}^{m-1}q_s\leqslant\sum_{s=1}^{m-1}[m_s+6(d_s+1)]\leqslant 14m. \tag{12}$$

Если некоторые $G_s=\varnothing$ ($1\leqslant s\leqslant m-1$), то в приведенных выше рассуждениях следует рассматривать лишь функции f_s, для которых $G_s\neq\varnothing$. Если же все $G_s=\varnothing$ для $s=1\div m-1$, то (10)—(12), очевидно, будут выполняться, например, при всех $q_s=1$ и простых функциях $\psi_{s,1}$, равных нулю тождественно. Итак, соотношения (10)—(12) всегда выполняются, из них и следует лемма 1.3.

§ 2. Леммы о рациональных операторах типа Джексона

Пусть z_k ($k=1\div n$) — точки, принадлежащие верхней полуплоскости $\Pi=\{z\in\mathbf{C}\colon \operatorname{Im} z>0\}$, т. е. $z_k=\alpha_k+i\beta_k$, где $-\infty<\alpha_k<\infty$ и $\beta_k>0$. Определим произведение Бляшке

$$b(x)=\prod_{k=1}^{n}\frac{x-z_k}{x-\bar{z}_k}$$

и рациональное ядро типа Джексона

$$g(x, t)=\left|\frac{b(t)-b(x)}{t-x}\right|^4 \quad (x, t\in \mathbf{R}).$$

Положим $g(x)=\int\limits_{\mathbf{R}} g(x, t)\,dt$. Следуя В. Н. Русаку [8], [9] для функции f, суммируемой на $\mathbf{R}$ по мере $(1+t^2)^{-2}dt$, определим рациональный оператор типа Джексона:

$$\mathscr{D}_n(x, f)=\frac{1}{g(x)}\int\limits_{\mathbf{R}} f(t)\,g(x, t)\,dt. \tag{13}$$

В действительности В. Н. Русаком в (13) вместо интегрирования по dt рассматривалось интегрирование по $(1+t^2)dt$. Очевидно, это не отражается на следующих важных свойствах, установленных в [8], [9]: а) $\mathscr{D}_n(x, f)$ является линейным оператором и

$$\mathscr{D}_n(x, 1)\equiv 1, \tag{14}$$

б) $\mathscr{D}_n(x, f)$ является рациональной функцией степени не выше $4n-4$.

Лемма 2.1. *Для любого $x\in\mathbf{R}$ справедливы неравенства:*

$$g(x)\geqslant 8\pi\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2}\right]^3, \quad g(x)\geqslant 8\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{[(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2]^2}.$$

Доказательство. Совершенно аналогично сделанному в работе В. Н. Русака [8] (см. также [9, с. 132—136]) вычислим $g(x)$. В результате получим, что

$$g(x)=\frac{\pi i}{3}\left[b^{-2}(x)\,(b^2(x))'''-4b^{-1}(x)\,b'''(x)\right].$$

Следовательно,

$$g(x)=\frac{8\pi}{3}\left\{4\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2}\right]^3-\right.$$

$$\left.-4\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k^3}{[(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2]^3}+3\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k}{[(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2]^2}\right\}.$$

Этим лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Пусть $-\infty<\alpha<\infty$, $\beta>0$ и φ — простая функция, для которой $I(\varphi)=(\alpha-\beta, \alpha+\beta)$ и $\mu(\varphi)\leqslant 1$. Тогда для любого $x\in\mathbf{R}$ имеет место неравенство*

$$|\varphi(x)-\mathscr{D}_n(x, \varphi)|\leqslant\frac{43}{\sqrt[3]{g(x)}}\,\frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{16}{g(x)}\,\frac{\beta}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2}.$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}_x=\{t\in\mathbf{R}\colon\ |t-x|\leqslant 1/\sqrt[3]{g(x)}\}$ и $\mathscr{E}_x'=\mathbf{R}\setminus\mathscr{E}_x$. В силу (14) находим

$$|\varphi(x)-\mathscr{D}_n(x, \varphi)|\leqslant\frac{1}{g(x)}\int\limits_{\mathbf{R}}|\varphi(x)-\varphi(t)|\,g(x, t)\,dt=\frac{1}{g(x)}\left[\int\limits_{\mathscr{E}_x}+\int\limits_{\mathscr{E}_x'}\right].$$

Если $t\in\mathscr{E}_x$, то $|\varphi(x)-\varphi(t)|\leqslant 1/2\beta\sqrt[3]{g(x)}$ и

$$\int\limits_{\mathscr{E}_x}\leqslant\frac{1}{2\beta\sqrt[3]{g(x)}}\int\limits_{\mathscr{E}_x} g(x, t)\,dt\leqslant\frac{1}{2\beta}\sqrt[3]{g^2(x)}.$$

Если же $t\in\mathscr{E}_x'$, то $|\varphi(x)-\varphi(t)|\leqslant|x-t|/2\beta$ и

$$\int\limits_{\mathscr{E}_x'}\leqslant\frac{1}{2\beta}\int\limits_{\mathscr{E}_x'}|x-t|\,g(x,t)\,dt\leqslant\frac{16}{\beta}\int\limits_{1/\sqrt[3]{g(x)}}^{\infty}\frac{dy}{y^3}=\frac{8}{\beta}\sqrt[3]{g^2(x)}.$$

Собирая полученные оценки, находим

$$|\varphi(x)-\mathscr{D}_n(x,\varphi)|\leqslant\frac{8+1/2}{\beta\sqrt[3]{g(x)}}\quad(x\in\mathbf{R}).\tag{15}$$

При условии, что $x\notin[\alpha-2\beta,\alpha+2\beta]$, оценку (15) можно уточнить следующим образом:

$$|\varphi(x)-\mathscr{D}_n(x,\varphi)|=|\mathscr{D}_n(x,\varphi)|\leqslant\frac{1}{2g(x)}\int\limits_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}g(x,t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{8}{g(x)}\int\limits_{\alpha-\beta}^{\alpha+\beta}\frac{dt}{(t-x)^4}\leqslant\frac{16}{g(x)}\frac{\beta}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2}.\tag{16}$$

Итак, из (15) и (16) следует лемма 2.2.

Лемма 2.3. *Пусть $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n$ — простые функции, $f=\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_n$ и $\mu_k=\mu(\varphi_k)$. Тогда в полуплоскости Π существуют не более $2n$ чисел $z_1,z_2,\ldots,z_m$ таких, что для определенного ими оператора $\mathscr{D}_m(x,\cdot)$ выполняется соотношение*

$$|f(x)-\mathscr{D}_m(x,f)|\leqslant\frac{c}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_k\quad(x\in\mathbf{R}).$$

Доказательство. Пусть $I(\varphi_k)=(\alpha_k-\beta_k,\alpha_k+\beta_k)$, где $-\infty<\alpha_k<\infty$ и $\beta_k>0$. Ввиду линейности оператора $\mathscr{D}_n(x,\cdot)$ можем считать $\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_k=1$. Параметры $z_{k,j}$ искомого оператора $\mathscr{D}_m(x,\cdot)$ определим следующим образом: $z_{k,j}=\alpha_k+i\beta_k$, где $k=1\div n$ и $j=1\div[n\mu_k]+1$. Очевидно, количество чисел $z_{k,j}$ равно $m=\sum\limits_{k=1}^{n}([n\mu_k]+1)\leqslant2n$. Положив $\delta_k(x)=[(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2]^{-1}$, из леммы 2.2 для любого $x\in\mathbf{R}$ получим

$$|f(x)-\mathscr{D}_m(x,f)|\leqslant\frac{43}{\sqrt[3]{g(x)}}\sum_{k=1}^{n}\mu_k\beta_k\delta_k(x)+\frac{16}{g(x)}\sum_{k=1}^{n}\mu_k\beta_k\delta_k^2(x).$$

На основании леммы 2.1 заключаем, что при любом $x\in\mathbf{R}$

$$\sqrt[3]{g(x)}\geqslant\sqrt[3]{8\pi n}\sum_{k=1}^{n}\mu_k\beta_k\delta_k(x),\quad g(x)\geqslant8\pi n\sum_{k=1}^{n}\mu_k\beta_k\delta_k(x).$$

Лемма 2.3 доказана.

Замечание. Аналогично можно показать, что для оператора типа Фейера $\mathscr{F}_n(x,f)$, также введенного В. Н. Русаком [8], [9] и определяемого ядром $|b(t)-b(x)|^2/|t-x|^2$, при условиях леммы 2.3 справедлива оценка

$$|f(x)-\mathscr{F}_m(x,f)|\leqslant\frac{c\ln(n+1)}{n}\sum_{k=1}^{n}\mu_k\quad(x\in\mathbf{R}).$$

§ 3. Аппроксимация в круге

Введем необходимые для дальнейшего функциональные пространства. Основным объектом нашего исследования является аппроксимационное пространство $R^{\alpha}_{\infty,q}(\Omega)$ $(\alpha>0,\ 0<q\leqslant\infty)$ функций $f\in C(\Omega)$, для которых конечна квазинорма

$$\|f\|_{R^{\alpha}_{\infty,q}(\Omega)}=\|f\|_{\infty,\Omega}+\left[\sum_{k=0}^{\infty}(2^{k\alpha}R_{2^k}(f,\Omega))^q\right]^{\frac{1}{q}}\quad(q\neq\infty),\tag{17}$$

$$\|f\|_{R^{\alpha}_{\infty,\infty}(\Omega)}=\|f\|_{\infty,\Omega}+\sup_{k\geqslant 0}2^{k\alpha}R_{2^k}(f,\Omega)\quad(q=\infty).\tag{18}$$

Пусть S — локально спрямляемая кривая в $\mathbf{C}$ и $0<p\leqslant\infty$. Через $L_p(S)$ обозначим лебегово пространство измеримых на S функций f, для которых

$$\|f\|_{p,S}=\Big(\int_S|f(\xi)|^p|d\xi|\Big)^{1/p}<\infty\quad(0<p<\infty),$$

$$\|f\|_{\infty,S}=\sup_{\xi\in S}\operatorname{vrai}|f(\xi)|<\infty\quad(p=\infty).$$

Пространство Харди $H_p=H_p(D_+)$ определим как множество $f\in A(D_+)$, для которых

$$\|f\|_{H_p}=\lim_{\rho\to 1-0}\|f(\cdot\rho)\|_{p,T}<\infty.\tag{19}$$

Указанный в (19) предел существует ввиду монотонности $\|f(\cdot\rho)\|_{p,T}$ по ρ (см. [17, с. 77]). Для определения $H_p(D_-)$ — пространства Харди в D_- — следует рассмотреть функции $f\in A(D_-)$, исчезающие в бесконечности, и вместо $\rho\to 1-0$ положить $\rho\to 1+0$. Как известно [17], [18], функции $f\in H_p$ $(H_p(D_-))$ почти для всех $\xi\in T$ имеют некасательные граничные значения $f(\xi)$. Через $f^{(\alpha)}$ $(\alpha>0,\ f\in A(D_+))$ обозначим производную порядка α функции f в смысле Римана — Лиувилля [19], [15]. Пространство Харди — Соболева H_p^{α} $(\alpha>0,\ 0<p\leqslant\infty)$ определим как множество $f\in A(D_+)$ таких, что

$$\|f\|_{H_p^{\alpha}}=\|f\|_{H_p}+\|f^{(\alpha)}\|_{H_p}<\infty.\tag{20}$$

Пусть S есть окружность T или отрезок $[-1,\ 1]$ и $f\in L_p(S)$. Через $\omega_{p,k}(\cdot,\ f)$ обозначим модуль гладкости порядка k функции f в $L_p(S)$. Пространство Бесова $B_p^{\alpha}(S)$ $(\alpha>0,\ 0<p<\infty)$ определим как множество функций $f\in L_p(S)$, для которых

$$\|f\|_{B_p^{\alpha}(S)}=\|f\|_{p,S}+\left[\int_0^1\left(\frac{\omega_{k,p}(t,f)}{t^{\alpha}}\right)^p\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{p}}<\infty,\tag{21}$$

где $k=[\alpha]+1$. Пространство Харди — Бесова $B_p^{\alpha}(D_+)$ $(B_p^{\alpha}(D_-))$ определяется как множество $f\in H_p(D_+)$ $(f\in H_p(D_-))$ таких, что граничная функция $f(\xi)$ принадлежит $B_p^{\alpha}(T)$. Пространства $R^{\alpha}_{\infty,q}(D_+)$ и $B_p^{\alpha}(D_+)$ для краткости иногда будем обозначать соответственно $R^{\alpha}_{\infty,q}$ и B_p^{α}. Отметим, что в работах [11] и [15] мы используем иное эквивалентное определение пространств H_p^{α} и B_p^{α} (более подробно об этом см. [19] и [22]).

Справедливы вложения

$$B_p^\alpha \subset H_p^\alpha \ (p \leqslant 2), \ B_p^\alpha \supset H_q^\alpha \ (p \geqslant 2)^4, \tag{22}$$

причем при $p \neq 2$ оба вложения строгие [19], [22].

Если $f \in H_{1/\alpha}^\alpha$ или $f \in B_{1/\alpha}^\alpha$ и $\alpha \geqslant 1$, то граничная функция $f(\xi)$ непрерывна на T, т. е. пространства $H_{1/\alpha}^\alpha$ и $B_{1/\alpha}^\alpha$ при $\alpha \geqslant 1$ вложены в $C(\overline{D}_+)$. Если $f \in B_{1/\alpha}^\alpha(S)$, где $\alpha \geqslant 1$ и S есть окружность T или отрезок $[-1, 1]$, то функция f почти всюду на S совпадает с некоторой функцией из $C(S)$. Таким образом, снова имеем $B_{1/\alpha}^\alpha(S) \subset C(S)$ при $\alpha \geqslant 1$. В случае $\alpha \in (0, 1)$ в пространствах $H_{1/\alpha}^\alpha, B_{1/\alpha}^\alpha$ и $B_{1/\alpha}^\alpha(S)$ имеются существенно неограниченные функции. Поэтому теоремы 3.2 и 4.1 (см. ниже) — основные результаты настоящей работы — не имеют места для $\alpha < 1$.

Для доказательства неравенства (1) нам понадобится также $H_1(\Pi)$ — пространство Харди в полуплоскости $\Pi = \{z \in \mathbf{C}\colon \operatorname{Im} z > 0\}$. Оно определяется [18] как множество $f \in A(\Pi)$, для которых $\|f\|_{H_1(\Pi)} = \sup\limits_{y>0} \|f(\cdot + iy)\|_{1,\mathbf{R}} < \infty$. Функции $f \in H_1(\Pi)$ почти для всех $x \in \mathbf{R}$ имеют некасательные граничные значения $f(x)$.

Действительнозначную функцию $a \in L_\infty(\mathbf{R})$ называем *атомом* [6], [7], если существует (конечный) интервал $J(a)$ такой, что $\operatorname{supp} a \subset J(a)$, $\|a\|_{\infty,\mathbf{R}} \leqslant 1/|J(a)|$ и, кроме того, $\int\limits_{\mathbf{R}} a(x)\,dx = 0$. Заметим, что если $a(x)$ — атом, то $\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} a(t)\,dt$ — простая функция (см. § 1), для которой $I(\varphi) = J(a)$ и $\mu(\varphi) \leqslant 1$.

Лемма 3.1. *Пусть $g \in H_1(\Pi)$ и $g \not\equiv 0$. Тогда существуют последовательности, конечные или бесконечные, атомов $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и положительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, удовлетворяющие условиям:*

a) почти для всех $x \in \mathbf{R}$ $\operatorname{Re} g(x) = \sum\limits_k \lambda_k a_k(x)$,

b) $\sum\limits_k \lambda_k \leqslant c\|g\|_{H_1(\Pi)}$,

c) для любых k и k' $(k \neq k')$ интервалы $J(a_k)$ и $J(a_{k'})$ либо не пересекаются, либо один из них вложен в другой.

Лемма 3.1 получена Р. Койфманом в [6], где, однако, условие c) в ее формулировке отсутствует. Это условие нетрудно усмотреть из доказательства, которое является конструктивным. Более простое доказательство леммы 3.1 имеется в [7].

Лемма 3.2. *Если $f \in A(D_+) \cap C(\overline{D}_+)$, то $R_n(f, T) \leqslant R_n(f, \overline{D}_+) \leqslant 2R_n(f, T)$, $n \geqslant 0$.*

Первое неравенство леммы 3.2 очевидно, второе получено в [10].

Теорема 3.1. *Если $f \in H_1^1$, то $R_n(f, \overline{D}_+) \leqslant (c/n)\|f'\|_{H_1}$, $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $g(\eta) = f[\Gamma(\eta)]$ $(\eta \in \overline{\Pi})$, где $z = \Gamma(\eta) = (1 + i\eta)/(\eta + i)$ — дробно-линейное отображение полуплоскости $\overline{\Pi}$ на круг $\overline{D}_+$. Легко найти, что $g' \in H_1(\Pi)$ и $\|g'\|_{H_1(\Pi)} = \|f'\|_{H_1(D_+)}$. Поэтому из лемм 1.3, 2.3 и 3.1 для любого $m \in \mathbf{N}$ следует существование $r_j \in \mathscr{R}_m(\mathbf{R})$ $(j = 1, 2)$ таких, что

$$\|\operatorname{Re} g - r_1\|_{\infty,\mathbf{R}} \leqslant c_1 m^{-1} \|f'\|_{H_1}, \tag{23}$$

$$\|\operatorname{Im} g - r_2\|_{\infty,\mathbf{R}} \leqslant c_2 m^{-1} \|f'\|_{H_1}. \tag{24}$$

[4] В настоящей работе рассматриваются только непрерывные вложения.

Делая обратную замену $\eta=\Gamma^{-1}(z)=(1-iz)/(z-i)$, из (23) и (24) и леммы 3.2 получим утверждение теоремы 3.1.

О точности теоремы 3.1 можно судить на примере функции $\varphi_n(z)=z^{n+1}/2\pi(n+1)$, для которой (см. [9, с. 167]) $\|\varphi_n'\|_{H_1}=1$ и $R_n(\varphi_n,\bar{D}_+)=1/2\pi(n+1)$.

Для функции $f\in H_1$ введем следующее наилучшее приближение: $\bar{R}_n(f,H_1)=\inf\{\|f-r'\|_{H_1}: r\in\mathcal{R}_n(\bar{D}_+)\}$.

Лемма 3.3. *Если $f\in H_1^1$, то* $R_n(f,\bar{D}_+)\leqslant(c/n)\bar{R}_{n/2}(f',H_1)$, $n\geqslant 2$.

Доказательство. Пусть $r_*\in\mathcal{R}_{n/2}(\bar{D}_+)$ такова, что $\|f'-r_*'\|_{H_1}=R_{n/2}(f',H_1)$. Тогда из теоремы 3.1 получим

$$R_n(f,\bar{D}_+)=R_n[r_*+(f-r_*)]\leqslant R_{n/2}(r_*,\bar{D}_+)+$$
$$+R_{n/2}(f-r_*,\bar{D}_+)\leqslant(c/n)\|f'-r_*'\|_{H_1}=(c/n)\bar{R}_{n/2}(f',H_1).$$

Лемма 3.3 доказана.

Следствие 3.1. ***Если $f\in H_1^1$, то $R_n(f,\bar{D}_+)=o(1/n)$.***

Доказательство немедленно следует из леммы 3.3 и теоремы Джексона.

Теорема 3.2. *Справедливы следующие вложения*

$$R^1_{\infty,1}\subset H^1_1\subset R^1_{\infty,\infty}, \tag{25}$$

$$R^{\alpha}_{\infty,1/\alpha}\subset H^{\alpha}_{1/\alpha}\subset R^{\alpha}_{\infty,2}\ (\alpha>1), \tag{26}$$

$$R^1_{\infty,1}\subset B^1_1\subset R^1_{\infty,\infty}, \tag{27}$$

$$R^{\alpha}_{\infty,1/\alpha}=B^{\alpha}_{1/\alpha}\ (\alpha>1). \tag{28}$$

Доказательство. Левые вложения соотношений (25)–(27), а также вложение «$\subset$» из (28) известны [3], [13]–[15] и [20]. Первые вложения (25) и (27) немедленно следуют из теоремы 3.1 и соотношений (22). Получим правое вложение (26). Из леммы 3.3 для функции $f\in H^{\alpha}_{1/\alpha}$ $(\alpha>1)$ находим, что

$$R_{2^k}(f,\bar{D}_+)\leqslant c2^{-k}R_{2^{k-1}}(f',H_1)\ (k\geqslant 1). \tag{29}$$

Поскольку $f'\in H^{\alpha-1}_{1/\alpha}$, то из теоремы 4.1 работы [11] получим

$$\|f'\|_{H_1}+\left[\sum_{k=0}^{\infty}(2^{(\alpha-1)k}\bar{R}_{2^k}(f',H_1))^2\right]^{1/2}\leqslant c(\alpha)\|f'\|_{H^{\alpha-1}_{1/\alpha}}. \tag{30}$$

Из (29) и (30) следует правое вложение (26). Аналогично доказывается вложение «$\supset$» из (28). Теорема 3.2 доказана.

Для $s\in\mathbf{N}$ и $\beta>0$ введем функцию

$$\varphi_{s,\beta}(z)=\left(\ln_{(s)}\frac{a}{1-z}\right)^{-\beta},$$

где $\ln_{(1)}x=\ln(x)$, $\ln_{(s)}x=\ln(\ln_{(s-1)}x)$ при $s\geqslant 2$, для всех логарифмов берется главная ветвь и положительное a выбирается так, чтобы $\varphi_{s,\beta}(z)$ была непрерывна в $\bar{D}_+$. При достаточно больших n имеют место соотношения

$$R_n(\varphi_{1,\beta},[0,1])\asymp 1/n^{1+\beta}\,{}^{5}, \tag{31}$$

$$R_n(\varphi_{s,\beta},[0,1])\asymp 1/n(\ln_{(s-1)}n)^{\beta}\ (s\geqslant 2). \tag{32}$$

Эквивалентности (31) и (32) при $s=2$ получены в [23]. Случай $s>2$ рассматривается аналогично. Отметим, что первые нетривиальные оцен-

[5] $a_n\asymp b_n\Leftrightarrow a_n=O(b_n)\&b_n=O(a_n)$.

ки сверху и снизу для $R_n(\varphi_{s,\beta}, [0, 1])$ получены А. А. Гончаром [24], [25]. Об оценке снизу $R_n(\varphi_{1,\beta}, [0, 1])$ см. также работу А. П. Буланова [26]. Ниже в примере 3.1 показано, что (31) и (32) сохраняются, если отрезок [0, 1] заменить на T, а также на $\overline{D}_+$.

Пример 3.1. При достаточно больших n имеют место соотношения

$$R_n(\varphi_{1,\beta}, \overline{D}_+)\asymp R_n(\varphi_{1,\beta}, T)\asymp 1/n^{1+\beta}, \tag{33}$$

$$R_n(\varphi_{s,\beta}, \overline{D}_+)\asymp R_n(\varphi_{s,\beta}, T)\asymp 1/n(\ln_{(s-1)} n)^\beta \quad (s\geqslant 2). \tag{34}$$

Доказательство. Из оценок снизу, содержащихся в (31), (32), и леммы 3.2 следует, что нам достаточно получить оценку сверху для $R_n(\varphi_{s,\beta}, \overline{D}_+)$ $(s\geqslant 1)$. С этой целью введем $\varphi_{s,\beta,n}(z)=\varphi_{s,\beta}((1-e^{-n})z)$ и выберем некоторое $k\in\mathbf{N}$, удовлетворяющее условию $k>1+\beta$. Из правых вложений (25) и (26) получим

$$R_n(\varphi_{s,\beta}, \overline{D}_+)\leqslant c_1 n^{-1}\|\varphi_{s,\beta}'-\varphi_{s,\beta,n}'\|_{H_1}+c_2(k)\,n^{-k}\|\varphi_{s,\beta,n}^{(k)}\|_{H_{1/k}}. \tag{35}$$

Из (35) следует нужная оценка сверху. Соотношения (33) и (34) доказаны.

Поскольку $\varphi_{s,\beta}\in B_1^1$ при любых s и β, то из (34) и (22) следует неулучшаемость правых вложений (25) и (27) в том смысле, что пространство $R^1_{\infty,\infty}$ нельзя заменить на $R^1_{\infty,q}$ ни при каком $q<\infty$. Невозможность аналогичного улучшения левых вложений (25) и (27) следует из результатов Е. П. Долженко [3]. Из примеров, рассмотренных в [11] и [15], следует, что вложения (26) также нельзя улучшить.

Для измеримых по Лебегу множеств $\mathscr{E}\subset D$ определим меру

$$\mu(\mathscr{E})=\iint\limits_{\mathscr{E}}(1-|z|)^{-2}\,dxdy \quad (z=x+iy).$$

Через $L_{p,q}(D_+, \mu)$ обозначим пространство Лоренца μ-измеримых в D_+ функций (см. [27, с. 148]).

Следствие 3.2. *Если* $\alpha>1$, $k>\alpha$ $(k\in\mathbf{N})$ *и* $0<q\leqslant\infty$, *то*

$$f\in R^\alpha_{\infty,q}\Leftrightarrow f^{(k)}(z)(1-|z|)^k\in L_{1/\alpha,q}(D_+, \mu).$$

В частности,

$R_n(f, \overline{D}_+)=O(n^{-\alpha})\Leftrightarrow\mu\{z\in D_+\colon |f^{(k)}(z)|(1-|z|)^k>t\}=O(t^{-1/\alpha})$ *при* $t\to+0$.

Доказательство основано на равенстве (28) и проводится аналогично доказательству следствия 4.2 из [11].

Сравним скорости наилучших рациональных приближений в $C(\overline{D}_+)$ и BMOA — пространстве аналитических в D_+ функций ограниченной средней осцилляции [13], [18], [20]. По определению $f\in A(D_+)$ принадлежит BMOA, если она представима интегралом типа Коши с ограниченной плотностью:

$$f(z)=\mathscr{K}^+g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T\frac{g(\xi)}{\xi-z}\,d\xi, \tag{36}$$

где $g\in L_\infty(T)$ и $z\in D_+$. При этом полагают $\|f\|_{\mathrm{BMOA}}=\inf\|g\|_{\infty,T}$, где inf берется по всем g, для которых имеет место равенство (36). Через $R_n(f, \mathrm{BMOA})$ обозначим наилучшее приближение f в BMOA множеством $\mathscr{R}_n(\overline{D}_+)$, а через $R^\alpha_{*,q}$ — аппроксимационное пространство, которое определяется условиями (17) и (18), если $\|f\|_{\infty,\Omega}$ заменить на $\|f\|_{\mathrm{BMOA}}$ и $R_n(f, \Omega)$ — на $R_n(f, \mathrm{BMOA})$. Очевидно, для $f\in A(D_+)\cap C(\overline{D}_+)$

$$R_n(f, \mathrm{BMOA})\leqslant R_n(f, \overline{D}_+). \tag{37}$$

Поэтому из (28) следует вложение $B^{\alpha}_{1/\alpha} \subset R^{\alpha}_{*,1/\alpha}$ для $\alpha > 1$. Применяя метод вещественной интерполяции, это вложение можно обобщить на $\alpha \leqslant 1$. Нужные интерполяционные теоремы имеются в [27] и [28]. Таким образом, мы получили новое доказательство результата В. В. Пеллера [13], [20]: $B^{\alpha}_{1/\alpha} \subset R^{\alpha}_{*,1/\alpha}$ $(\alpha > 0)$. Обратное вложение также имеет место [20], [13], [14] и [15].

Покажем, что неравенство (37) для «достаточно гладких функций» допускает обращение.

Следствие 3.3. *Если* $f \in \mathrm{BMOA}$ *и*

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k(f, \mathrm{BMOA}) < \infty, \tag{38}$$

то $f \in C(\overline{D}_+)$ *и при любом* $n \geqslant 1$

$$R_n(f, \overline{D}_+) \leqslant \frac{c}{n} \sum_{k \geqslant n/2} R_k(f, \mathrm{BMOA}). \tag{39}$$

Доказательство проводится стандартным способом с применением теоремы 3.1 и неравенства (см. [20], [13]) $\|r'\|_{H_1} \leqslant cn\|r\|_{\mathrm{BMOA}}$, где $r \in \mathscr{R}_n(\overline{D}_+)$ и $n \geqslant 1$.

О точности неравенства (39) можно судить на примере функции $\varphi_{s,\beta}(z)$, для которой раньше мы получили (33) и (34). При достаточно больших n справедливы также эквивалентности

$$R_n(\varphi_{1,\beta}, \mathrm{BMOA}) \asymp 1/n^{1+\beta}, \tag{40}$$

$$R_n(\varphi_{s,\beta}, \mathrm{BMOA}) \asymp 1/n \ln_{(1)} n \cdot\ \cdot \ln_{(s-2)} (\ln_{(s-1)} n)^{1+\beta} \quad (s \geqslant 2). \tag{41}$$

Утверждения (40) и (41) при $s=2$ получены в [11], случай $s>2$ рассматривается аналогично.

Замечания. 1. Можно показать, что если условие (38) не выполнено, то, вообще говоря, $f \notin C(\overline{D}_+)$. 2. Соотношение (39) в сочетании с результатом В. В. Пеллера из [13] и [20] $(B^{\alpha}_{1/\alpha} \subset R^{\alpha}_{*,1/\alpha},\ \alpha > 0)$ также приводит к вложению $B^{\alpha}_{1/\alpha} \subset R_{\infty,1/\alpha}$ $(\alpha > 1)$ из равенства (28).

§ 4. Аппроксимация на окружности и на отрезке

Для функции $g \in L_1(T)$ наряду с интегралом $\mathscr{K}^+ g(z)$, определяемым соотношением (36), введем также интеграл $\mathscr{K}^- g(z)$, который получается из (36) заменой $z \in D_+$ на $z \in D_-$. Через $\mathscr{K}^{\pm} g(\xi)$ для $\xi \in T$ обозначим некасательные граничные значения $\mathscr{K}^{\pm} g(z)$. Как известно [17], почти для всех $\xi \in T$ $g(\xi) = \mathscr{K}^+ g(\xi) + \mathscr{K}^- g(\xi)$. Определим также сопряженную функцию

$$\tilde{g}(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_T \frac{g(\eta)}{\eta - \xi} d\eta \quad (\xi \in T),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Известно [17], что $\tilde{g}(\xi)$ существует почти всюду на T и $\tilde{g}(\xi) = -i\mathscr{K}^+ g(\xi) + i\mathscr{K}^- g(\xi) + i\hat{g}(0)$, где $\hat{g}(0) = (1/2\pi) \int_T g(\xi) |d\xi|$.

Лемма 4.1 ([13], [20]). *Операторы* $\mathscr{K}^+$, $\mathscr{K}^-$ *и* $\sim$ *действуют непрерывно из* $B^{\alpha}_{1/\alpha}(T)$ $(\alpha > 0)$ *соответственно в* $B^{\alpha}_{1/\alpha}(D_+)$, $B^{\alpha}_{1/\alpha}(D_-)$ *и* $B^{\alpha}_{1/\alpha}(T)$.

Лемма 4.2 ([13], [29]). *Если функция* $f(x) \in B^{\alpha}_{1/\alpha}[-1, 1]$ $(\alpha > 0)$, *то* $g(\xi) = f[(\xi + \bar{\xi})/2] \in B^{\alpha}_{1/\alpha}(T)$ *и это отображение непрерывно.*

Теорема 4.1. *Пусть S есть окружность T или отрезок $[-1, 1]$. Тогда*

$$R^1_{\infty,1}(S) \subset B^1_1(S) \subset R^1_{\infty,\infty}(S), \tag{42}$$

$$R^\alpha_{\infty,1/\alpha}(S) = B^\alpha_{1/\alpha}(S) \quad (\alpha > 1). \tag{43}$$

Доказательство. Левое вложение (42), а также вложение «$\subset$» из (43) известны (см. [13], [14], [15], [20] и [29]). Правое вложение из (42) и вложение «$\supset$» из (43) следуют из теоремы 3.2, лемм 4.1 и 4.2. Теорема 4.1 доказана.

Теорема 4.2. *Если функции f и $\tilde{f}$ абсолютно непрерывны на T, то при любом $n \geqslant 1$*

$$R_n(f, T) \geqslant \frac{c}{n}(\|f'\|_{1,T} + \|(\tilde{f})'\|_{1,T}).$$

Доказательство немедленно следует из теоремы 3.1 и приведенных выше свойств интеграла типа Коши и сопряженных функций.

Замечание. На целесообразность изучения наилучших рациональных приближений функций из теоремы 4.2 указывал Е. А. Севастьянов [35]. Как видно из леммы 3.2, теоремы 3.1 и 4.2 равносильны.

Следствие 4.1. *Пусть $f \in C(T)$ и функция $f(e^{ix})$ — четная и выпуклая на $[0, 2\pi]$. Тогда $\tilde{f} \in C(T)$ и для любого $n \geqslant 1$*

$$R_n(f, T) \leqslant cn^{-1}\|f'\|_{1,T}, \tag{44}$$

$$R_n(\tilde{f}, T) \leqslant cn^{-1}\|f'\|_{1,T}. \tag{45}$$

Доказательство. Введем функцию $\Delta_t(x) = \max\{0, 1-|x|/t\}$, где $x \in [-\pi, \pi]$ и $t > 0$. Нетрудно показать (см. также [30, с. 17]), что существует на $[0, \pi]$ неубывающая функция $h(t)$, удовлетворяющая условиям: $h(\pi) - h(0) = (1/2)\|f'\|_{1,T}$ и

$$f(e^{ix}) = f(-1) + \int_0^\pi \Delta_t(x)\, dh(t) \quad (x \in [-\pi, \pi]).$$

Из теоремы 4.2 (или теоремы 4.1 и леммы 4.1) и последнего соотношения получим (44) и (45).

Отметим, что оценка (44) является очевидным следствием теоремы 5.1 из [31], а оценка (45) — новая. Аналогично можно получить соотношение (44) в непериодическом случае [31], [32].

Для $x \geqslant 0$ введем функцию $\Phi_0(x) = x \ln x$ при $x \geqslant 1$ и $\Phi_0(x) = 0$ при $x < 1$. Через $L^*_{\Phi_0}(T)$ обозначим соответствующее пространство Орлича [33] функций на T.

Следствие 4.2 ([31]). *Если функция f абсолютно непрерывна на T и $f' \in L^*_{\Phi_0}(T)$, то при любом $n \geqslant 1$*

$$R_n(f, T) \leqslant cn^{-1}\|f'\|_{L^*_{\Phi_0}(T)}.$$

Доказательство немедленно следует из теоремы 4.2 и теоремы Зигмунда о сопряженных функциях [18].

Л. Д. Григорян [34] доказал, что если

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k(f, T) < \infty, \tag{46}$$

то $\tilde{f} \in C(T)$. Е. А. Севастьянов [35] построил примеры, из которых следует, что если условие (46) не выполнено, то, вообще говоря, $\tilde{f} \notin C(T)$.

В следующей теореме 4.3 дается аналог для рациональных приближений известного неравенства С. Б. Стечкина [36], связывающего наилучшие полиномиальные приближения функции и ее сопряженной.

Теорема 4.3. *Пусть* $f\in C(T)$ *и выполнено условие* (46). *Тогда для любого* $n\geqslant 2$

$$R_n(\tilde{f},T)\leqslant\frac{c}{n}\sum_{k\geqslant n/2}R_k(f,T).$$

Доказательство проводится стандартным способом с применением теоремы 4.2, а также неравенств $\|r'\|_{1,T}\leqslant cn\|r\|_{\infty,T}$ и $\|(\tilde{r})'\|_{1,T}\leqslant cn\|r\|_{\infty,T}$, где $r\in\mathscr{R}_n(T)$ и $n\geqslant 1$. Первое из этих неравенств принадлежит Е. П. Долженко [1], второе — В. Н. Русаку [9], [35].

О точности теоремы 4.3 можно судить на следующем примере.

Пример 4.1. Для любых $s\in\mathbf{N}$ и $\beta>0$ существует $f_{s,\beta}\in C(T)$ такая, что $\tilde{f}_{s,\beta}\in C(T)$ и при достаточно больших n

$$R_n(f_{1,\beta},\ T)\asymp R_n(\tilde{f}_{1,\beta},\ T)\asymp 1/n^{1+\beta},\tag{47}$$

$$R_n(f_{s,\beta},\ T)\asymp 1/n\ln_{(1)}n\ldots\ln_{(s-2)}n\ (\ln_{(s-1)}n)^{1+\beta}\ (s\geqslant 2),\tag{48}$$

$$R_n(\tilde{f}_{1,\beta},\ T)\asymp 1/n\ (\ln_{(s-1)}n)^{\beta}\ (s\geqslant 2).\tag{49}$$

Доказательство. Построения основаны на функции $\varphi_{s,\beta}$ из § 3. Положим $f_{1,\beta}(\xi)=\varphi_{1,\beta}(\xi)$, $\xi\in T$. Поскольку $\varphi_{1,\beta}\subset C(\overline{D}_+)\cap A(D_+)$, то $\tilde{f}_{1,\beta}=-if_{1,\beta}+\text{const}$ и, следовательно, из (33) получим (47). В случае $s\geqslant 2$ введем функции $r_k\in\mathscr{R}_{2^k}(\overline{D}_+)$, удовлетворяющие условиям $\|\varphi_{s,\beta}-r_k\|_{\text{BMOA}}=R_{2^k}(\varphi_{s,\beta},\ \text{BMOA})$. Зафиксируем некоторое достаточно большое k_0. Имеем $\varphi_{s,\beta}=u_1+u_2+u_3+\cdots$, где $u_1=r_{k_0}$, $u_2=r_{k_0+1}-r_{k_0}$, $u_3=r_{k_0+2}-r_{k_0+1}$ и т. д. Согласно (41) $\|u_j\|_{\text{BMOA}}\leqslant c\lambda_s(2^{j+k_0})$, где $\lambda_s(n)$ — правая часть (41). Поскольку $u_j\in\mathscr{R}_{2^{j+k_0}}(\overline{D}_+)$, то [37] найдется $v_j\in\mathscr{R}_{2^{j+k_0}}(\overline{D}_-)$ такая, что функция $w_j=u_j+v_j$ будет удовлетворять условию

$$\|w_j\|_{\infty,T}=\|u_j\|_{\text{BMOA}}\leqslant c\lambda_s(2^{j+k_0}).\tag{50}$$

Покажем, что функция $f_{s,\beta}=w_1+w_2+\cdots$ является искомой. Действительно, из (50) следует, что $f_{s,\beta}\in C(T)$, а также справедливость оценки сверху в (48). Для получения оценки снизу в (48) заметим, что $\mathscr{K}^+f_{s,\beta}=\varphi_{s,\beta}+\text{const}$ и, согласно (41), $R_n(f_{s,\beta},\ T)\geqslant R_n(\varphi_{s,\beta},\ \text{BMOA})\geqslant c\lambda_s(n)$. Итак, соотношение (48) доказано. Из теоремы 4.3 и оценки сверху в (48) следует оценка сверху в (49). Осталось получить оценку снизу в (49). Для этого заметим, что $\tilde{f}_{s,\beta}=if_{s,\beta}-2i\varphi_{s,\beta}+\text{const}$ и, следовательно, $R_n(\tilde{f}_{s,\beta},\ T)\geqslant 2R_{2n}(\varphi_{s,\beta},\ T)-R_n(f_{s,\beta},\ T)$. Из последнего неравенства, соотношения (34), а также оценки сверху в (48) получаем оценку снизу в (49). Итак, соотношения (47)—(49) доказаны.

Следствие 4.3. *Пусть* $\alpha>1$ *и* $0<q\leqslant\infty$. *Тогда следующие условия равносильны:*

a) $f\in R^{\alpha}_{\infty,q}(T)$,

b) $\tilde{f}\in R^{\alpha}_{\infty,q}(T)$,

c) $\mathscr{K}^+f\in R^{\alpha}_{\infty,q}(\overline{D}_+)$ *и* $\mathscr{K}^-f\in R^{\alpha}_{\infty,q}(\overline{D}_-)$.

Напомним, что описание пространства $R^{\alpha}_{\infty,q}(\overline{D}_+)$ дано в следствии 3.2. Аналогичное описание допускает пространство $R^{\alpha}_{\infty,q}(\overline{D}_-)$. Таким образом, следствия 3.2 и 4.3 дают описание пространства $R^{\alpha}_{\infty,q}(T)$.

Пусть $(\cdot, \cdot)_{\theta,q}$ — интерполяционный функтор Петре [27]. Одно из приложений полученных результатов дано в следствии 4.4.

Следствие 4.4 (ср. с [13], [20] и [28]). *Пусть S есть окружность T или отрезок* $[-1, 1]$; $s>1$, $0<\theta<1$ *и* $\alpha=\theta s>1$. *Тогда*

$$(C(S), B^s_{1/s}(S))_{\theta,1/\alpha} = B^\alpha_{1/\alpha}(S).$$

Доказательство немедленно следует из теоремы 4.1 и равенства (см. [27, гл. 7])

$$(C(S), R^s_{\infty,1/s}(S))_{\theta,1/\alpha} = R^\alpha_{\infty,1/\alpha}(S).$$

В заключение заметим, что можно дать «вещественное» описание пространств $R^\alpha_{\infty,q}(T)$ и $R^\alpha_{\infty,q}$ $[-1, 1]$ при $\alpha>1$. В основе такого описания лежит идея атомического разложения пространств $H^\alpha_{1/\alpha}$ и $B^\alpha_{1/\alpha}$. Можно также ввести характеристику, аналогичную модулям гладкости в полиномиальной аппроксимации, связывающую гладкость функций и скорость чебышевских рациональных приближений. Такая характеристика для пространств L_p $(1<p<\infty)$ введена в [4], [16]. Эти вопросы предполагается рассмотреть отдельно. Отметим также, что применяя метод преобразований Фабера [13], [21], [29], теорему 3.2 можно обобщить для липшицевых областей [38].

Литература

1. *Долженко Е. П.* Скорость приближения рациональными дробями и свойствами функций//Матем. сб. 1962. Т. 56(98). С. 403—433.
2. *Гончар А. А.* Скорость приближения рациональными дробями и свойства функций// Тр. международного конгресса математиков. М., 1966. М.: Мир, 1968. С. 329—346.
3. *Долженко Е. П.* Рациональные аппроксимации и граничные свойства аналитических функций//Матем. сб. 1966. Т. 69(111). С. 497—524.
4. *Пекарский А. А.* О скорости наилучших рациональных приближений в пространствах C, BMO и L_p. Деп. в ВИНИТИ, № 6691-84.
5. *Пекарский А. А.* Рациональные приближения аналитических в круге функций с производной из пространства Харди H_1. Деп. в ВИНИТИ, № 4055-85.
6. *Coifman R. R.* A real variable characterization of H^p//Stud. Math. 1974. V. 51. № 3. P. 269—274.
7. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
8. *Русак В. Н.* О порядке приближения положительными рациональными операторами//Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. 1975. С. 39—46.
9. *Русак В. Н.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Изд-во БГУ им. В. И. Ленина, 1979.
10. *Пекарский А. А.* Оценки производной интеграла типа Коши с мероморфной плотностью и их приложения//Матем. заметки. 1982. Т. 31. № 3. С. 389—402.
11. *Пекарский А. А.* Классы аналитических функций, определяемые наилучшими рациональными приближениями в H_p//Матем. сб. 1985. Т. 127(169). С. 3—20.
12. *Брудный Ю. А.* Рациональная аппроксимация и теоремы вложения//ДАН СССР. 1979. Т. 247. № 2. С. 269—272.
13. *Пеллер В. В.* Описание операторов Ганкеля класса σ_p при $p>0$, исследование скорости рациональной аппроксимации и другие приложения//Матем. сб. 1983. Т. 122(164). С. 481—510.
14. *Semmes S.* Trace ideal criteria for Hankel operators and applications to Besov spaces// Integral Equat. and Oper. Theory. 1984. V. 7. № 2. P. 241—281.
15. *Пекарский А. А.* Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации//Матем. сб. 1984. Т. 124(166). С. 571—588.
16. *Пекарский А. А.* О скорости наилучших рациональных приближений в пространствах C, BMO и L_p//Докл. расшир. заседаний семин. Ин-та прикл. матем. им. И. Н. Векуа. 1985. Т. 1. № 2. С. 106—109.
17. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1978.
18. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
19. *Flett T. M.* Lipschitz spaces of functions on the cirkle and the disc//J. Math. Anal. and Appl. 1972. V. 39. № 1. P. 121—158.
20. *Пеллер В. В.* Операторы Ганкеля класса σ_p и их приложения (рациональная аппроксимация, гауссовские процессы, проблема мажорации операторов)//Матем. сб. 1980. Т. 113(155). С. 538—581.
21. *Дынькин Е. М.* О классах $B_p{}^s$ при $0<p<1$//ДАН СССР. 1984. Т. 275. № 5. С. 9—12.

22. *Oswald P.* On Besov — Hardy — Sobolev spaces of analytic function in the unit disk// Czechosl. Math. J. 1983. V. 33. № 3. P. 408—426.
23. *Пекарский А. А.* Рациональные приближения выпуклых функций//Матем. заметки. 1985. Т. 38. № 5. С. 679—690.
24. *Гончар А. А.* О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями//Матем. сб. 1967. Т. 73(115). С. 630—638.
25. *Гончар А. А.* Скорость рациональной аппроксимации и свойство однозначности аналитической функции в окрестности изолированной особой точки//Матем. сб. 1974. Т. 94(136). С. 265—280.
26. *Буланов А. П.* Рациональные приближения кусочно-выпуклых функций//Конструктивная теория функций. Тр. междунар. конф. (Варна, 1981). София. 1983. С. 150—156.
27. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
28. *Semmes E.* Another characterization of H^p, $0<p<\infty$, with application to interpolation//Lect. Notes. Math. 1983. V. 992. P. 212—226.
29. *Пеллер В. В.* Рациональная аппроксимация и гладкость функций//Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1982. Т. 107. С. 150—159.
30. *Кахан Ж.-П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1976.
31. *Пекарский А. А.* Рациональные приближения абсолютно непрерывных функций с производной из пространства Орлича//Матем. сб. 1982. Т. 117(159). С. 114—130.
32. *Попов В. А., Петрушев П. П.* Точный порядок наилучшего равномерного приближения выпуклых функций рациональными функциями//Матем. сб. 1977. Т. 103(145). С. 285—292.
33. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
34. *Григорян Л. Д.* Оценки нормы голоморфных, составляющих мероморфных функций в областях с гладкой границей//Матем. сб. 1976. Т. 100(142). С. 156—164.
35. *Севастьянов Е. А.* Рациональная аппроксимация и абсолютная сходимость рядов Фурье//Матем. сб. 1978. Т. 107(149). С. 227—244.
36. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении сопряженных функций тригонометрическими полиномами//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. Т. 20. № 2. С. 197—206.
37. *Пеллер В. В., Хрущев С. В.* Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы//УМН. 1982. Т. 37. № 1. С. 53—124.
38. *Дынькин Е. М.* Оценки аналитических функций в жордановых областях//Зап. научн. семинаров ЛОМИ. 1977. Т. 73. С. 70—90.

Гродненский государственный
университет

Поступила в редакцию
1.IV.1986