ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль—сентябрь 1998. Серия 1. Том 5, № 3, 3–16

УДК 519.17

ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫЕ НАСЛЕДСТВЕННЫЕ ПОДКЛАССЫ k-РАСКРАШИВАЕМЫХ ГРАФОВ

И. Э. Зверович

Правильная k-раскраска $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_k$ множества вершин графа G называется *l-ограниченной* ($l \geqslant 0$), если $|\mathfrak{C}_i \backslash N(u)| \leqslant l$ для любого $i = 1, 2, \dots, k$ и любой вершины $u \in VG \backslash \mathfrak{C}_i$, где $N(u)$ — окружение вершины u. Пусть $C(k, l)$ есть класс всех графов, имеющих l-ограниченную k-раскраску ($k \geqslant 1$ и $l \geqslant 0$). Показано, что каждый класс $C(k, l)$ имеет конечную характеризацию в терминах запрещенных порожденных подграфов. Этот результат влечет существование полиномиальных алгоритмов распознавания $C(k, l)$. Для класса $C(3, 1)$ найдено минимальное множество запрещенных порожденных подграфов.

Введение

Все рассматриваемые графы конечные, неориентированные, без петель и кратных ребер. Стандартная терминология может быть найдена в [1]. Множество вершин и ребер графа G обозначаются соответственно VG и EG. Подграф графа G, порожденный множеством $X \subseteq VG$, обозначается $G(X)$. Мы используем обозначение $u \sim v$ (соответственно $u \not\sim v$) для смежных (соответственно несмежных) вершин u и v. Если $X \subseteq VG$ и $u \in VG \backslash X$, то $u \sim X$ (соответственно $u \not\sim X$) означает, что $u \sim x$ (соответственно $u \not\sim x$) для всех $x \in X$. Окружение вершины $u \in VG$ есть $N(u) = \{v \in VG \mid u \sim v\}$; $\deg u = |N(u)|$ — степень вершины u; $\Delta(G) = \max\{\deg u \mid u \in VG\}$ и $\delta(G) = \min\{\deg u \mid u \in VG\}$. Множество $X \subseteq VG$ называется ***независимым***, если $N(x) \cap X = \varnothing$ для любой вершины $x \in X$. ***Число независимости*** $\alpha(G)$ графа G равно мощности наибольшего независимого множества в G.

Напомним, что *правильной k-раскраской* графа G называется разбиение множества вершин графа G на k независимых подмножеств, среди которых могут быть пустые. Правильная k-раскраска $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_k$ вершин графа G называется *l-ограниченной* ($l \geqslant 0$), если

$$|\mathfrak{C}_i \backslash N(u)| \leqslant l \tag{1}$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ и любой вершины $u \in VG \backslash \mathfrak{C}_i$.

Обозначим через $C(k,l)$ класс всех графов, имеющих l-ограниченную k-раскраску ($k \geqslant 1$ и $l \geqslant 0$).

Пусть $\mathrm{ISub}(G)$ обозначает множество всех порожденных подграфов графа G. Класс графов P называется *наследственным*, если $\mathrm{ISub}(G) \subseteq P$ для любого $G \in P$. Ясно, что каждый класс $C(k,l)$ является наследственным и

$$
\begin{gathered}
C(k,l) \subseteq C(k+1,l) \text{ для любого } k \geqslant 1, \\
C(k,l) \subseteq C(k,l+1) \text{ для любого } l \geqslant 0, \\
\bigcup_{l \geqslant 0} C(k,l) = C(k),
\end{gathered}
$$

где $C(k)$ есть класс всех k-раскрашиваемых графов.

Для множества графов Z обозначим $\mathrm{FIS}(Z) = \{G \mid \mathrm{ISub}(G) \cap Z = \varnothing\}$. Если $P = \mathrm{FIS}(Z)$, то Z называется множеством *запрещенных порожденных подграфов* для P. Запрещенный порожденный подграф $H \in Z$ для P называется *минимальным*, если $\mathrm{ISub}(H) \backslash \{H\} \subseteq P$.

Напомним, что через K_m, P_m и C_n обозначаются соответственно полный m-вершинный граф, простая цепь с m вершинами ($m \geqslant 1$) и простой цикл длины n ($n \geqslant 3$). Будем иногда писать $\mathrm{FIS}(G_1, G_2, \ldots, G_r)$ вместо $\mathrm{FIS}(\{G_1, G_2, \ldots, G_r\})$.

Предложение 1. (i) $C(1,l) = \mathrm{FIS}(K_2)$ *для любого* $l \geqslant 0$;

(ii) $C(k,0) = \mathrm{FIS}(K_1 \cup K_2, K_{k+1})$ *для любого* $k \geqslant 2$;

(iii) $C(2,1) = \mathrm{FIS}(C_3, 2K_1 \cup K_2, C_5, K_1 \cup C_4)$;

(iv) $C(2,2) = \mathrm{FIS}(C_3, 3K_1 \cup K_2, C_5, C_7, G_1, \ldots, G_4)$ (рис. 1).

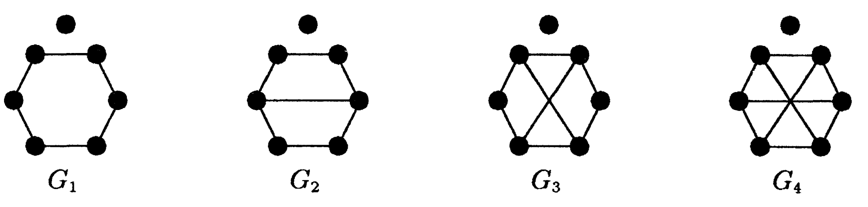


Рис. 1

Доказательство. (i) $C(1,l) = C(1)$ есть множество всех пустых графов, совпадающее с $\mathrm{FIS}(K_2)$.

(ii) Ясно, что $C(k,0)$ есть множество всех полных k-дольных графов, т. е. $C(k,0)$ есть пересечение $\mathrm{FIS}(K_1 \cup K_2)$ (полные многодольные графы) и $\mathrm{FIS}(K_{k+1})$.

(iii) Включение $C(2,1) \subseteq \mathrm{FIS}(C_3, 2K_1 \cup K_2, C_5, K_1 \cup C_4)$ следует из того факта, что эти четыре графа не имеют 1-ограниченной 2-раскраски. Для доказательства обратного включения рассмотрим граф $G \in \mathrm{FIS}(C_3, 2K_1 \cup K_2, C_5, K_1 \cup C_4)$. Ясно, что G не содержит нечетных циклов и, следовательно, является двудольным.

Если G имеет изолированную вершину u, то $K_1 \cup K_2 \notin \mathrm{ISub}(G-u)$ (в противном случае $2K_1 \cup K_2 \in \mathrm{ISub}(G)$). Поэтому $G-u$ является полным двудольным графом $K_{m,n}$. Из $K_1 \cup C_4 \notin \mathrm{ISub}(G)$ следует, что $C_4 \notin \mathrm{ISub}(G-u)$ и, следовательно, $\min(m,n) \leqslant 1$. Тогда $G \in C(2,1)$.

Пусть в G нет изолированных вершин. Каждая вершина графа G смежна со всеми вершинами другой доли, кроме, быть может, одной (иначе $2K_1 \cup K_2 \in \mathrm{ISub}(G)$). Поэтому $G \in C(2,1)$.

(iv) Несложно проверить, что все указанные графы не имеют 2-ограниченной 2-раскраски.

Пусть G не содержит всех перечисленных графов в качестве порожденных подграфов. Так как графы $C_3, C_5, C_7, 3K_1 \cup K_2$ не принадлежат множеству $\mathrm{ISub}(G)$, то G не имеет нечетных циклов и поэтому является двудольным. Если G пустой, то $G \in C(2,2)$. Иначе G имеет самое большее 3 компоненты, поскольку $3K_1 \cup K_2 \notin \mathrm{ISub}(G)$. Обозначим через i число изолированных вершин графа G. Пусть число нетривиальных компонент в G равно n. Так как $n \geqslant 1$ и $n+i \leqslant 3$, то возможны только следующие случаи.

Случай 1: $i=0$. Для любой вершины $u \in VG$ в другой доле существует самое большее две вершины, которые не смежны с u (иначе $3K_1 \cup K_2 \in \mathrm{ISub}(G)$). Следовательно, $G \in C(3,1)$.

Случай 2: $i=1$ и $n=1$. Пусть $G = K_1 \cup H$, где H — связный двудольный граф с долями A и B. Каждая вершина в A (соответственно в B) смежна со всеми вершинами доли B (соответственно A), кроме, быть может, одной (иначе $2K_1 \cup K_2 \in \mathrm{ISub}(H)$ и поэтому $3K_1 \cup K_2 \in \mathrm{ISub}(G)$). Несложно проверить, что если $|A| \geqslant 3$ и $|B| \geqslant 3$, то G содержит один из запрещенных порожденных подграфов $G_1, \ldots, G_4$. Противоречие. В противном случае изолированную вершину поместим в большую долю графа H и получим 2-ограниченную 2-раскраску графа G.

Случай 3: $i=1$ и $n=2$. Из $3K_1 \cup K_2 \notin \mathrm{ISub}(G)$ следует, что $G = K_1 \cup 2K_2 \in C(2,2)$.

Случай 4: $i=2$ и $n=1$. Поскольку $K_1 \cup K_2 \notin \mathrm{ISub}(H)$, то $G = 2K_1 \cup H$, где H — полный двудольный граф $K_{m,n}$. Так как $G_4 = K_1 \cup K_{3,3} \notin \mathrm{ISub}(G)$, то $\min(m,n) \leqslant 2$. Поместим изолированные вершины графа G в большую долю графа H и получим 2-ограниченную 2-раскраску, т. е. $G \in C(2,2)$. Предложение 1 доказано.

Итак, при малых значениях k и l классы $C(k,l)$ имеют конечную характеризацию в терминах запрещенных порожденных подграфов. Покажем, что это верно для всех $k \geqslant 1$ и $l \geqslant 0$. Этот результат влечет существование полиномиальных алгоритмов для распознавания всех классов $C(k,l)$. Затем получим характеризацию класса $C(3,1)$.

§ 1. Существование характеризации класса $C(k,l)$ в терминах конечного числа запрещенных порожденных подграфов

Лемма 1. *Если $G \in C(k,l)$ и независимое множество I в графе G содержит не менее $kl+1$ вершин, то I содержится в цветном классе любой l-ограниченной k-раскраски графа G.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_k$ есть произвольная l-ограниченная k-раскраска графа G. Так как $|I|/k \geqslant l + 1/k$, то по крайней мере один цветной класс содержит не менее $l+1$ вершин из I. Пусть $|\mathfrak{C}_1 \cap I| \geqslant l+1$. Из (1) следует, что $\mathfrak{C}_i \cap I = \varnothing$ для всех $i = 2, 3, \ldots, k$, т. е. $I \subseteq \mathfrak{C}_1$. Лемма 1 доказана.

Обозначим через $Z(k,l)$ множество всех минимальных запрещенных порожденных подграфов для $C(k,l)$. При $k \geqslant 2$, $l \geqslant 1$, $(k,l) \neq (2,1)$ и $r \in \{l+1, l+2, \ldots, kl-1\}$ обозначим через $G(k,l,r)$ граф с множеством вершин $\{u, v_1, v_2, \ldots, v_{kl}\}$ и множеством ребер $\{uv_i \mid i = r+1, r+2, \ldots, kl\}$.

Лемма 2. *$G(k,l,r) \in Z(k,l)$ для всех $k \geqslant 2$ и $l \geqslant 1$ кроме $(k,l) = (2,1)$ и $r \in \{l+1, l+2, \ldots, kl-1\}$.*

Доказательство. Предположим, что $G = G(k,l,r)$ имеет l-ограниченную k-раскраску $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_k$. Пусть $I = \{v_1, v_2, \ldots, v_{kl}\}$, $VG \backslash I = \{u\}$. Если $|I \cap \mathfrak{C}_i| \geqslant l+1$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant k$, и $I \backslash \mathfrak{C}_i \neq \varnothing$, то условие (1) не выполняется для каждой вершины множества $I \backslash \mathfrak{C}_i$ и класса $\mathfrak{C}_i$. Если $I \subseteq \mathfrak{C}_i$, то $u \notin \mathfrak{C}_i$ и $|\mathfrak{C}_i \backslash N(u)| = r \geqslant l+1$, т. е. (1) не выполняется для вершины u и класса $\mathfrak{C}_i$. Так как $|I| = kl$, то $|I \cap \mathfrak{C}_i| = l$ для всех $i = 1, 2, \ldots, k$. Пусть $u \in \mathfrak{C}_1$. Тогда $|\mathfrak{C}_1| = l+1$ и каждая вершина $v \notin \mathfrak{C}_1$ смежна с некоторой вершиной из $\mathfrak{C}_1$, т. е. с u. Поэтому $|I \backslash N(u)| = |\mathfrak{C}_1 \backslash \{u\}| = l < r$, что противоречит определению графа $G(k,l,r)$.

Для любой вершины $x \in VG$ граф $G - x$ имеет k-раскраску, в которой каждый цветной класс имеет мощность l. Очевидно, такая k-раскраска является l-ограниченной. Следовательно, G является минимальным запрещенным порожденным подграфом. Лемма 2 доказана.

Независимое множество I в графе $G \in Z(k,l)$ называется *устойчивым*, если для любой вершины $u \in VG$ множество $I \backslash \{u\}$ является цветным классом каждой l-ограниченной k-раскраски графа $G - u$.

Лемма 3. *Пусть I — максимальное независимое множество графа $G \in Z(k,l)$, где $k \geqslant 2, l \geqslant 1$ и $(k,l) \neq (2,1)$. Если $|I| > kl+1$, то I — устойчивое множество.*

Доказательство. Так как $G(k,l,r) \in Z(k,l)$ $(r = l+1, l+2, \ldots, kl-1)$ согласно лемме 1 и $|VG| > |VG(k,l,r)|$, то $G(k,l,r) \notin \mathrm{ISub}(G)$. Следовательно, каждая вершина из $VG \backslash I$ смежна по крайней мере с $|I| - l \geqslant l(k-1)+2 \geqslant 2$ вершинами из I. Так как $G \in Z(k,l)$, то для любой вершины $u \in VG$ граф $G-u$ имеет l-ограниченную k-раскраску $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_k$. Пусть $I' = I \backslash \{u\}$ и $|I'| \geqslant kl+1$. По лемме 1 множество I' содержится в некотором цветном классе $\mathfrak{C}_i$. Так как $|N(v) \cap I| \geqslant 2$ в G, то каждая вершина $v \in V(G-u) \backslash I'$ смежна по крайней мере с одной вершиной множества I'. Поэтому $v \notin \mathfrak{C}_i$, т. е. $I = \mathfrak{C}_i$ и множество I устойчиво. Лемма 3 доказана.

Теорема 1. *При всех $k \geqslant 1$ и $l \geqslant 0$ множество $Z(k,l)$ конечно.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. множество $Z(k,l)$ бесконечно. По предложению 1 имеем $k \geqslant 2$, $l \geqslant 1$ и $(k,l) \neq (2,1)$. Очевидно, что $K_{k+1} \in Z(k,l)$. Поэтому каждый граф из $Z(k,l)$ не содержит K_{k+2}. По теореме Рамсея [2] существует бесконечная последовательность графов $G_i \in Z(k,l)$, $i = 1, 2, \ldots$, такая, что

$$kl+1 < \alpha(G_1) < \alpha(G_2) < \ldots < \alpha(G_i) < \ldots \tag{2}$$

Так как $\alpha(G_i) > kl+1$, то согласно лемме 3 любое наибольшее независимое множество I_i в графе G_i устойчиво. Выберем вершину $v_i \in I_i$ и построим l-ограниченную k-раскраску $\mathfrak{C}_{i1}, \mathfrak{C}_{i2}, \ldots, \mathfrak{C}_{ik}$ графа $G_i - v_i$ с $\mathfrak{C}_{i1} = I_i \backslash \{v_i\}$. Положим $\mathfrak{C}_1^i = I_i$, $\mathfrak{C}_j^i = \mathfrak{C}_{ij}$, где $j = 2, 3, \ldots, k$. Таким образом, граф G_i является k-раскрашиваемым. Можно считать, что $|\mathfrak{C}_1^i| \geqslant |\mathfrak{C}_2^i| \geqslant \ldots \geqslant |\mathfrak{C}_k^i|$.

Пусть p является наибольшим числом $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ таким, что последовательность $\{|\mathfrak{C}_j^i|\}_{i \geqslant 1}$ не ограничена сверху. Существование p следует из (2) и равенства $|\mathfrak{C}_1^i| = \alpha(G_i)$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{|\mathfrak{C}_j^i|\}_{i \geqslant 1}$ возрастает и $|\mathfrak{C}_p^1| > kl+1$. Так как $|\mathfrak{C}_j^i| \geqslant |\mathfrak{C}_p^i|$ для всех $i \geqslant 1$ и $1 \leqslant j \leqslant p$, то последовательность $\{|\mathfrak{C}_j^i|\}_{i \geqslant 1}$ не ограничена сверху и каждый ее член больше $kl+1$. С другой стороны, при каждом $j = p+1, p+2, \ldots, k$ последовательность $\{|\mathfrak{C}_j^i|\}_{i \geqslant 1}$ ограничена сверху. Пусть $c_j = \max\{|\mathfrak{C}_j^i| \mid i \geqslant 1\}$, где $p+1 \leqslant j \leqslant k$ и $c = \max\{c_j \mid p+1 \leqslant j \leqslant k\}$.

Покажем, что $\mathfrak{C}_j^i$, $1 \leqslant j \leqslant p$, является максимальным независимым множеством в графе G_i. Это верно при $j = 1$. Пусть $2 \leqslant j \leqslant p$ и $x \notin \mathfrak{C}_j^i \cup \{v_i\}$. Так как k-раскраска $\mathfrak{C}_{i1}, \mathfrak{C}_{i2}, \ldots, \mathfrak{C}_{ik}$ графа $G_i - v_i$ является

l-ограниченной, то x смежна по крайней мере с $|\mathfrak{C}_{ij}| - l \geqslant (kl+2) - l \geqslant 4$ вершинами из $\mathfrak{C}_{ij} = \mathfrak{C}^i_j$.

Пусть теперь $x = v_i$. Необходимо показать, что множество $\mathfrak{C}^i_j \cup \{v_i\}$ не является независимым. Предположим, что это не так. Выберем вершину $w_i \in I_i \backslash \{v_i\}$ и построим l-ограниченную k-раскраску графа $G_i - w_i$. По лемме 3 множество $I_i \backslash \{w_i\}$ совпадает с цветным классом $\mathfrak{C}$ в этой раскраске. По лемме 1 множество $\mathfrak{C}^i_j \cup \{v_i\}$ содержится в некотором цветном классе. Так как $v_i \in \mathfrak{C}$, то $\mathfrak{C}^i_j \subseteq \mathfrak{C}$. Это противоречит тому факту, что $|I_i| \geqslant kl+2 \geqslant 5$ и каждая вершина множества $I_i \backslash \{v_i, w_i\}$ смежна по крайней мере с четырьмя вершинами множества $\mathfrak{C}^i_j$. Таким образом, каждый класс $\mathfrak{C}^i_j$, $1 \leqslant j \leqslant p$, является максимальным независимым множеством, а по лемме 3 оно является устойчивым множеством.

Положим $P_i = \bigcup\limits_{j=1}^{p} \mathfrak{C}^i_j$ и $Q_i = VG_i \backslash P_i$. Покажем, что каждая вершина из P_i не смежна по крайней мере с $l+1$ вершинами из Q_i. Предположим, что это неверно для вершины $y \in \mathfrak{C}^i_t \subseteq P_i$, т. е. $|Q_i \backslash N(y)| \leqslant l$. Построим l-ограниченную k-раскраску $D^i_1, D^i_2, \ldots, D^i_k$ графа $G_i - y$. Так как $\mathfrak{C}^i_j$, $1 \leqslant j \leqslant p$, является устойчивым множеством, то можно считать, что $D^i_j = \mathfrak{C}^i_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, t-1, t+1, t+2, \ldots, p$ и $D^i_t = \mathfrak{C}^i_t \backslash \{y\}$. Добавляя y к D^i_t, получим k-раскраску $\mathfrak{C}^i_1, \mathfrak{C}^i_2, \ldots, \mathfrak{C}^i_p, D^i_{p+1}, D^i_{p+2}, \ldots, D^i_k$ графа G_i. По построению условие (1) для этой k-раскраски может не выполняться только для

(i) вершины $z \notin \mathfrak{C}^i_t$ и класса $\mathfrak{C}^i_t$;

(ii) вершины y и класса $\mathfrak{C}^i_j \subseteq P_i, j \neq t$;

(iii) вершины y и класса $D^i_j \subseteq Q_i$.

Покажем, что (i) неверно. Из максимальности независимого множества $\mathfrak{C}^i_t$ следует, что z смежна по крайней мере с одной вершиной из $\mathfrak{C}^i_t$. Если z не смежна по крайней мере с $l+1$ вершинами из $\mathfrak{C}^i_t$, то согласно лемме 2 граф $G(\mathfrak{C}^i_t \cup \{z\})$ содержит запрещенный порожденный подграф $G(k, l, r)$. Противоречие. Невозможность (ii) доказывается аналогичным образом. Затем $|D^i_j \backslash N(y)| \leqslant |Q_i \backslash N(y)| \leqslant l$, т. е. (iii) также невозможно.

Получаем, что G_i имеет l-ограниченную k-раскраску. Противоречие. Поэтому каждая вершина $y \in P_i$ не смежна по крайней мере с $l+1$ вершинами из Q_i.

Обозначим через q_i число ребер между Q_i и P_i в дополнительном графе $\overline{G}_i$. Так как $q_i \geqslant (l+1)|P_i|$, а (1) выполняется для любой вершины из Q_i и для каждого класса $\mathfrak{C}^i_j \subseteq P_i$, то $q_i \leqslant lp|Q_i| \leqslant lpc(k-p)$. Поэтому $(l+1)|P_i| \leqslant lpc(k-p)$ и $|P_i| \leqslant lpc(k-p)/(l+1)$.

Получаем противоречие с тем, что $|P_i| \to \infty$ при $i \to \infty$. Теорема 1 доказана.

§ 2. Характеризация класса $C(3,1)$

Теорема 2. $C(3,1) = FIS(G_1, \ldots, G_{14})$ (рис. 2).

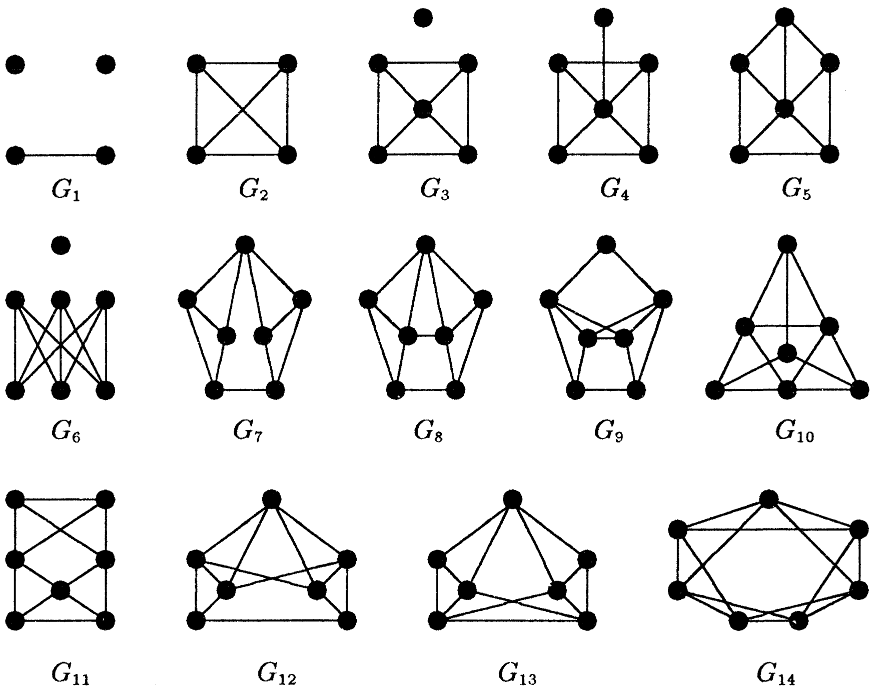


Рис. 2. Минимальные запрещенные порожденные подграфы для класса $C(3,1)$

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 2, установим несколько вспомогательных утверждений.

Положим $Z_i = \{G \in Z(3,1) \mid \alpha(G) = i\}$, $i \geqslant 1$ и $Z^* = \bigcup\limits_{i \geqslant 4} Z_i$.

Лемма 4. $Z^* = \{G_6\}$.

Доказательство. Пусть $G \in Z^*$. Так как $\alpha(G_i) < 4$ при любом $i = 1, 2, \ldots, 14$, кроме $i = 6$, то G не совпадает с графами $G_1, \ldots, G_5$ и $G_7, \ldots, G_{14}$. Более того, в силу минимальности граф G не содержит всех этих графов в качестве порожденных подграфов. Пусть I — наибольшее независимое множество в графе G.

Так как $G_1 \notin \mathrm{ISub}(G)$ и $\alpha(G) \geqslant 4$, то справедливо следующее

Свойство А. Каждая вершина $u \notin I$ смежна со всеми вершинами из I, кроме, быть может, одной.

Пусть $H = G - I$. Сначала докажем, что $H \in C(2,1)$. По утверждению (iii) предложения 1 достаточно показать, что графы $C_3, C_5, K_1 \cup C_4$ не принадлежат множеству $\mathrm{ISub}(H)$.

Пусть $C_3 \in \mathrm{ISub}(H)$. Так как $G_2 = K_4$ не является порожденным подграфом графа G, то каждая вершина из I не смежна с некоторой вершиной из C_3. Из $|I| \geqslant 4$ следует, что в C_3 имеется вершина, которая не смежна по крайней мере с двумя вершинами в I. Противоречие со свойством А.

Пусть теперь $C_5 \in \mathrm{ISub}(G)$. Так как $G_5 \notin \mathrm{ISub}(G)$, то каждая вершина из I не смежна с некоторой вершиной из C_5. Тогда из свойства А следует, что в I имеются две вершины такие, что каждая из них смежна ровно с четырьмя вершинами из C_5. Эти четыре вершины вместе с вершинами из C_5 порождают G_{12} или G_{13}. Противоречие.

Окончательно, пусть $F = K_1 \cup C_4 \in \mathrm{ISub}(H)$. Обозначим $VC_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (вершины перечислены в порядке обхода цикла) и $VF \backslash VC_4 = \{v_5\}$. Так как $G_3, G_4 \notin \mathrm{ISub}(G)$, то каждая вершина из I не смежна с некоторой вершиной из C_4. Пусть $v_i \nsim w_i \in I$, $1 \leqslant i \leqslant 4$. По свойству А имеем $v_i \sim I \backslash \{w_i\}, 1 \leqslant i \leqslant 4$. Если $v_5 \nsim w_1$, то $G(\{v_1, v_3, v_5, w_1\}) = G_1$. Противоречие. Поэтому $v_5 \sim w_1$. Аналогично $v_5 \sim w_2$. Тогда $VH \cup \{w_1, w_2\}$ порождает G_9. Противоречие.

Таким образом, $H \in C(2,1)$. Пусть $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ есть 1-ограниченная 2-раскраска графа H. В 3-раскраске $\mathfrak{C}_1 = I, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ графа G условие (1) может не выполняться для вершины u и класса $\mathfrak{C}_i$ только в том случае, когда $u \in \mathfrak{C}_1$ и $2 \leqslant i \leqslant 3$. (Это следует из выбора H и свойства А.) Предположим, что (1) действительно не выполняется для вершины $u \in \mathfrak{C}_1$ и класса $\mathfrak{C}_2$, т. е. u не смежна по крайней мере с двумя вершинами из $\mathfrak{C}_2$.

Если $|\mathfrak{C}_2| \geqslant 3$, то $u \nsim \mathfrak{C}_2$ (иначе $G_1 \in \mathrm{ISub}(G)$). Тогда по свойству А каждая вершина из $\mathfrak{C}_2$ смежна с каждой вершиной из $D = \mathfrak{C}_1 \backslash \{u\}$. Так как $|D| = |I| - 1 \geqslant 3$, то любые три вершины из D вместе с любыми тремя вершинами из $\mathfrak{C}_2$ и u порождают G_6. В силу минимальности $G = G_6$. Таким образом, в случае $|\mathfrak{C}_2| \geqslant 3$ лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{C}_2 = \{v, w\}$. Сначала предположим, что имеется вершина $x \in \mathfrak{C}_3$, которая смежна с вершинами v и w. Так как $|I| \geqslant 4$, то по свойству А имеются вершины $y, z \in I \backslash \{u\}$, каждая из которых смежна с вершинами x, v и w. Поэтому множество $\{u, v, w, x, y, z\}$ порождает G_3 или G_4. Противоречие. Итак, каждая вершина из $\mathfrak{C}_3$ смежна только с одной вершиной из $\mathfrak{C}_2$.

Так как $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ является 1-ограниченной раскраской графа H, то $|\mathfrak{C}_3| \leqslant 2$ и H есть один из графов $2K_1, K_1 \cup K_2$ или $2K_2$.

Если $H = 2K_1$, то G имеет 1-ограниченную 3-раскраску $I, \{v\}, \{w\}$.

Пусть теперь $H = K_1 \cup K_2$, т. е. $\mathfrak{C}_2 = \{v, w\}$, $\mathfrak{C}_3 = \{x\}$ и $x \sim v$, но $x \not\sim w$. Определим новую 3-раскраску $\mathfrak{C}_1, \{v\}, \{w, x\}$ графа G и покажем, что она является 1-ограниченной. Так как $u \sim x$ (иначе $G(\{u, v, w, x\}) = G_1$), то по свойству A любая вершина $y \in \mathfrak{C}_1 \backslash \{u\}$ смежна с w, т. е. условие (1) выполняется для любой вершины из I и цветного класса $\{w, x\}$.

Случай, когда $H = 2K_2$, аналогичен: если $\mathfrak{C}_3 = \{x, y\}$, $x \sim v$ и $y \sim w$, то новая раскраска $\mathfrak{C}_1, \{v, y\}, \{w, x\}$ является 1-ограниченной, т. е. $G \in C(3,1)$. Противоречие. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть $G \in Z_3 \backslash \{G_1, G_3, G_4, G_9\}$. Тогда для любой вершины $u \in VG$ и любой 1-ограниченной 3-раскраски графа $G - u$ вершина u не смежна не более чем с одной вершиной каждого цветного класса.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. существуют граф G из множества $Z_3 \backslash \{G_1, G_3, G_4, G_9\}$ и вершина $u \in VG$ такие, что в некоторой 1-ограниченной 3-раскраске $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ графа $G - u$ имеется цветной класс (пусть $\mathfrak{C}_1$) и две вершины $v_1, v_2 \in \mathfrak{C}_1$, которые не смежны с u.

Из $\alpha(G) = 3$ и $G_1 \notin \mathrm{ISub}(G)$ следует

Свойство B. Для любого независимого множества I мощности 3 каждая вершина, которая не принадлежит I, смежна по крайней мере с двумя вершинами из I.

Поскольку $u \not\sim \{v_1, v_2\})$, то по свойству B имеем $|\mathfrak{C}_1| = 2$. Поэтому G имеет 3-раскраску $\mathfrak{C}'_1 = \mathfrak{C}_1 \cup \{u\}, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$.

По свойству B условие (1) выполняется для любой вершины, которая не принадлежит $\mathfrak{C}'_1$, и класса $\mathfrak{C}'_1$. Так как $G \notin C(3,1)$, то (1) не выполняется для вершины u и либо $\mathfrak{C}_2$, либо $\mathfrak{C}_3$. В силу симметрии можем считать, что u не смежна с вершинами $w_1, w_2 \in \mathfrak{C}_2$. Как и выше, имеем $|\mathfrak{C}_2| = 2$.

Множество $\{u, v_1, w_1, w_2\}$ не является независимым и не порождает граф G_1. Поэтому $v_1 \sim \{w_1, w_2\}$. Аналогично $v_2 \sim \{w_1, w_2\}$.

Пусть $x \in \mathfrak{C}_3$. Если $x \not\sim u$, то $x \sim \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2$ по свойству B. Поэтому $G = G_3$ и $u \sim \mathfrak{C}_3$. Рассмотрим все возможные случаи для графа $G - u$ такие, что

(i) $|\mathfrak{C}_3| \leqslant 3$ (так как $\alpha(G) = 3$);

(ii) $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$ является 1-ограниченной 3-раскраской;

(iii) каждая вершина $x \in \mathfrak{C}_3$ смежна не более чем с тремя вершинами из $\mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2$ (иначе $\mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2 \cup \{u, x\}$ порождает G_4);

(iv) отсутствуют вершины $x, y \in \mathfrak{C}_3$ такие, что x смежна с обеими вершинами из $\mathfrak{C}_1$ и только с одной вершиной из $\mathfrak{C}_2$, а y смежна с обеими вершинами из $\mathfrak{C}_2$ и только с одной вершиной из $\mathfrak{C}_1$ (иначе $\mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2 \cup \{u, x, y\}$ порождает G_9).

Имеется в точности 6 возможностей (рис. 3). Тогда $G \in C(3,1)$ (u имеет цвет 1, а цвета остальных вершин указаны на рис. 3). Противоречие. Справедливость свойства B установлена.

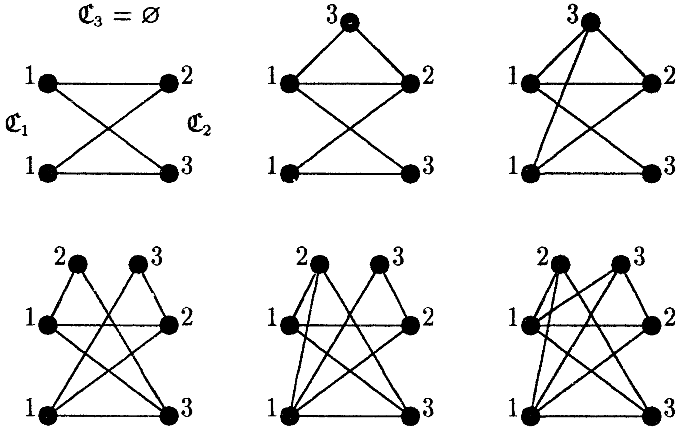


Рис. 3

Свойство C. $\delta(G) \geqslant |VG| - 4$ для любого $G \in Z_3 \backslash \{G_3, G_4, G_9\}$.

Имеем $\delta(G_1) = 0 = |VG_1| - 4$. Для $G \neq G_1$ мы можем использовать лемму 5: каждая вершина $u \in VG$ не смежна сама с собой и самое большее с одной вершиной каждого цветного класса 1-ограниченной 3-раскраски графа $G - u$. Доказательство окончено.

Свойство D. Если $G \in Z_3 \backslash \{G_3, G_4, G_9\}$ и I — независимое множество мощности 3, то каждая вершина множества I не смежна самое большее с одной вершиной из $VG \backslash I$.

Действительно, если u не удовлетворяет свойству D, то $\deg u \leqslant |VG| - 5$. Противоречие со свойством C. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. $Z_3 = \{G_1, G_3, G_4, G_9, G_{10}\}$.

Доказательство. Предположим, что $G \in Z_3$ и $G \notin \{G_1, G_3, G_4, G_9, G_{10}\}$. В силу минимальности граф G не содержит $G_1, \ldots, G_{14}$ в качестве порожденных подграфов (так как $\alpha(G_i) \neq 3$, кроме $i = 1, 3, 4, 9, 10$).

Пусть $I = \{u_1, u_2, u_3\}$ является независимым множеством в G и $H = G - I$. Докажем, что H имеет 1-ограниченную 2-раскраску $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$. Тогда 3-раскраска $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, I$ графа G является 1-ограниченной по свойствам B и D, т. е. $G \in C(3,1)$. Противоречие. По утверждению (iii) предложения 1 достаточно доказать, что $C_3, C_5, K_1 \cup C_4 \notin \mathrm{ISub}(H)$.

Пусть сначала $F = C_3 \in \mathrm{ISub}(H); VF = \{v_1, v_2, v_3\}$. Так как $G_2 = K_4 \notin \mathrm{ISub}(G)$, то с учетом свойства B можно считать, что $u_i \nsim v_i$, $i = 1, 2, 3$. Получаем порожденный подграф, изображенный на рис. 4, *а*, который имеет 1-ограниченную 3-раскраску. Так как $G \notin C(3,1)$, то G содержит вершину $z \notin I \cup VF$. По свойству D имеем $z \sim I$.

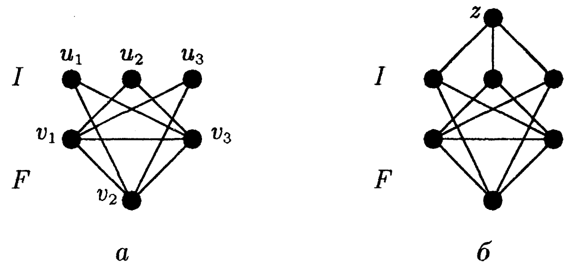


Рис. 4

Если $z \nsim VF$, то получаем порожденный подграф G_{10} (рис. 4, *б*). Противоречие. Если z смежна только с одной вершиной из VF (например, с v_1), то $VF \cup \{u_2, u_3, z\}$ порождает G_5. Если z смежна по крайней мере с двумя вершинами из VF (например, с v_1 и v_2), то $\{v_1, v_2, u_3, z\}$ порождает G_2. В любом случае противоречие.

Пусть $C_5 \in \mathrm{ISub}(H)$. Как и в доказательстве леммы 4, получаем один из порожденных подграфов G_5, G_{12} или G_{13}. Противоречие.

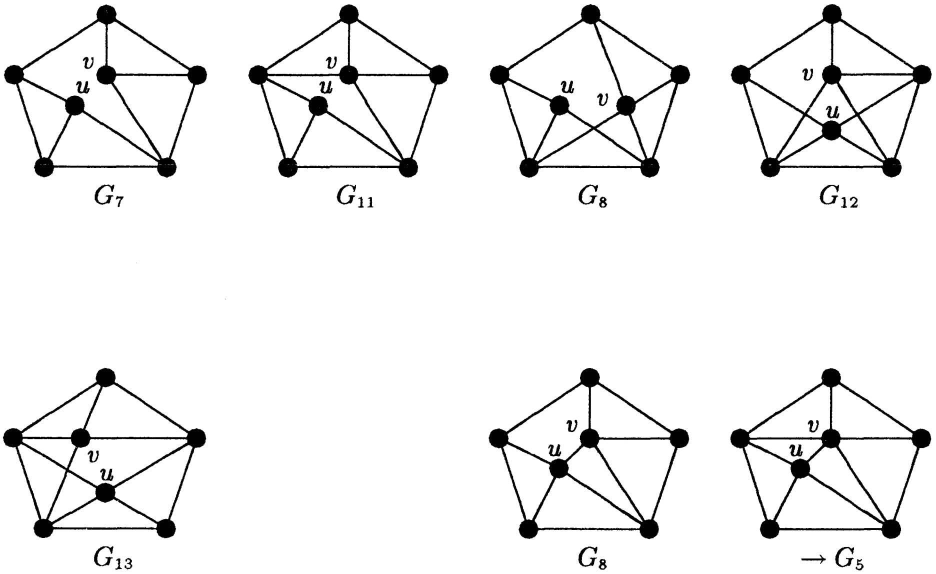
Наконец, как и в доказательстве леммы 4, убеждаемся в том, что если $K_1 \cup C_4 \in \mathrm{ISub}(H)$, то G содержит G_3, G_4 или G_9 в качестве порожденного подграфа. Противоречие. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. $Z_2 = \{G_5, G_7, G_8, G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{14}\}$.

Доказательство. Пусть $G \in Z_2 \setminus \{G_i \mid i = 5, 7, 8, 11, 12, 13, 14\}$. Как и выше, получаем, что графы $G_1, \ldots, G_{14}$ не принадлежат $\mathrm{ISub}(G)$.

Случай 1: $C_5 \in \mathrm{ISub}(G)$. Пусть $VC_5 = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ (вершины перечислены в порядке обхода цикла). Если $G = C_5$, то $G \in C(3,1)$. Противоречие. Поэтому имеется вершина $u \notin VC_5$. Так как $G_5 \notin \mathrm{ISub}(G)$, то в VC_5 имеется вершина, которая не смежна с u. Пусть $w_1 \nsim u$. Множества $\{u, w_1, w_i\}, i = 3, 4$, и $\{u, w_2, w_5\}$ не являются независимыми (так как $\alpha(G) = 2$). Поэтому $u \sim \{w_3, w_4\}$ и u смежна по крайней мере с одной из вершин w_2, w_5. Таким образом, каждая вершина, которая не принадлежит VC_5, смежна либо с тремя, либо с четырьмя последовательными вершинами цикла C_5. Так как $G \notin C(3,1)$, то имеется вершина $v \notin VC_5 \cup \{u\}$. Ясно, что v также смежна либо с тремя, либо с четырьмя последовательными вершинами цикла C_5. Все возможные варианты для $G(VC_5 \cup \{u, v\})$ изображены на рис. 5

(с учетом условий $G_2 = K_4 \notin \mathrm{ISub}(G)$ и $\alpha(G) = 2$). Все графы на рис. 5 либо совпадают с $G_7, G_8, G_{11}, G_{12}, G_{13}$, либо содержат G_5. Противоречие.



а $(u \not\sim v)$ *б* $(u \sim v)$

Рис. 5

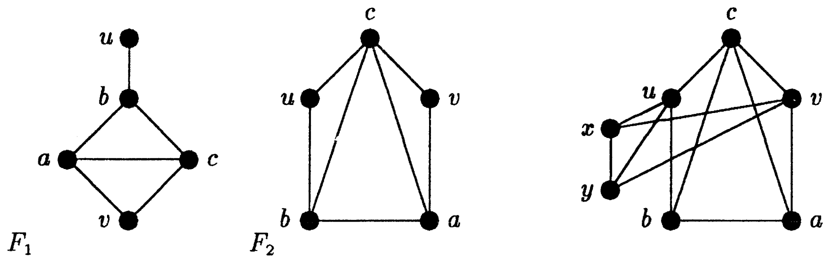
Случай 2: $C_5 \notin \mathrm{ISub}(G)$. Так как $G \notin C(3,1)$, то $n = |VG| \geqslant 4$. Из $G_2 = K_4 \notin \mathrm{ISub}(G)$ следует, что в G имеются две несмежные вершины u и v. Пусть $H = G - \{u, v\}$. Если $H \in C(2)$, то $G \in C(3)$. Так как $\alpha(G) = 2$, то каждая 3-раскраска графа G является 1-ограниченной. Из $G \notin C(3,1)$ следует, что $G \notin C(3)$ и $H \notin C(2)$. Так как $G - u \in C(3,1)$ и мощность каждого цветного класса не превосходит $\alpha(G) = 2$, то $n \leqslant 7$ и $|VH| \leqslant 5$. Поскольку H не является двудольным, в нем имеется нечетный цикл. Так как $C_5 \notin \mathrm{ISub}(G)$, то в H имеется треугольник T.

Так как $G_2 \notin \mathrm{ISub}(G)$, то $u \not\sim a \in VT$. Поскольку множество $\{a, u, v\}$ не является независимым, $v \sim a$. Аналогично $v \not\sim b \in VT$ и $u \sim b$. Пусть $VT \backslash \{a, b\} = \{c\}$. Так как множество $\{u, v, c\}$ не является независимым, то вершина c смежна по крайней мере с одной из вершин u, v. Пусть $X = VT \cup \{u, v\}$. Тогда $G(X) \in \{F_1, F_2\}$ (рис. 6, *а*).

Поскольку граф $G - \{b, v\}$ не двудольный, в нем имеется треугольник T'. Пусть $x \in VT' \backslash X$.

Сначала рассмотрим граф F_1 (см. рис. 6, *а*). Если $x \not\sim u$, то $x \sim \{a, c, v\}$ (поскольку $\alpha(G) = 2$). Противоречие с тем, что $G_2 \notin$

$\mathrm{ISub}(G)$. Поэтому $x \sim u$. Покажем, что $x \sim b$. Если $x \nsim b$, то $x \sim v$ (так как $\{b, v, x\}$ не является независимым) и x не смежна по крайней мере с одной из вершин a, c (иначе $G_2 \in \mathrm{ISub}(G)$). Пусть $x \nsim a$. Тогда $G(\{u, b, a, v, x\}) = C_5$. Противоречие. Таким образом, $x \sim \{u, b\}$. Так как либо $x \nsim a$, либо $x \nsim c$, то $ac \notin ET'$. Поэтому T' содержит вершину $y \notin X \cup \{x\}$. Как и выше, получаем, что $y \sim \{u, b\}$. Тогда $G(\{u, b, x, y\}) = G_2$. Противоречие.



а *б*

Рис. 6

Теперь рассмотрим граф F_2. Предположим, что $x \sim c$. Так как $\alpha(G) = 2$ и $G_2 \notin \mathrm{ISub}(G)$, то $x \sim \{u, v\}, x \nsim \{a, b\}$, т. е. $\{u, b, a, v, x\}$ порождает C_5. Противоречие. Таким образом, $x \nsim c$. Поскольку $n = 7$, то VT' есть либо $\{u, x, y\}$, либо $\{a, x, y\}$, где $y \notin X \cup \{x\}$. Аналогично граф $G - \{a, u\}$ содержит либо треугольник $\{v, x, y\}$, либо треугольник $\{b, x, y\}$. Так как $G_2 \notin \mathrm{ISub}(G)$, то мы получаем подграф (не обязательно порожденный), изображенный на рис. 6, *б*.

Так как $\{x, u, b, a, v\}$ не порождает C_5, то либо $x \sim a$, либо $x \sim b$. В силу симметрии можно считать, что $x \sim a$. Так как множество $\{x, v, a, y\}$ не порождает G_2, то $y \nsim a$. Аналогично получаем, что $y \sim b$ и $x \nsim b$. Отсюда следует, что $G = G_{14}$. Противоречие. Лемма 7 доказана.

Доказательство теоремы 2. Несложно проверить, что графы $G_2, G_5, G_7, G_8, G_{10}, \ldots, G_{14}$ не являются 3-раскрашиваемыми, а графы G_1, G_3, G_4, G_6, G_9 не имеют 1-ограниченной 3-раскраски. Поэтому $C(3,1) \subseteq \mathrm{FIS}(G_1 - G_{14})$.

Для доказательства включения $\mathrm{FIS}(G_1, \ldots, G_{14}) \subseteq C(3,1)$ рассмотрим минимальный граф $G \in \mathrm{FIS}(G_1, \ldots, G_{14}) \setminus C(3,1)$. Ясно, что $G \in Z(3,1)$. Если $\alpha(G) \geqslant 4$, то $G = G_6$ по лемме 4. Если $\alpha(G) = 3$, то $G \in \{G_1, G_3, G_4, G_9, G_{10}\}$ по лемме 6. Если $\alpha(G) = 2$, то $G \in \{G_5, G_7, G_8, G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{14}\}$ по лемме 7. Окончательно, если $\alpha(G) = 1$, то $G = G_2$. В любом случае имеем противоречие с условием $G \in \mathrm{FIS}(G_1, \ldots, G_{14})$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973.
2. **Ramsey F. P.** On a problem of formal logic // Proc. London Math. Soc. 1930. V. 30. P. 264–286.

Адрес автора:

Белорусский
государственный университет,
пр. Фр. Скорины, 4,
220050 Минск, Беларусь.
E-mail: igor@mmf.bsu.unibel.by

Статья поступила
2 декабря 1997 г.