

Аналог теоремы Уитни для реберных графов мультиграфов и реберные мультиграфы

© 1997 г. И. Э. Зверович

Получен аналог теоремы Уитни для реберных графов мультиграфов. Введены и изучены реберные мультиграфы.

1. Введение

Мы придерживаемся терминологии книги [1]. Одним из основных инструментов исследования реберных графов является следующая классическая теорема Уитни [4] (теорема 8.3 в [1]).

Теорема 1. Пусть G и G' — связные графы, реберные графы которых изоморфны. Тогда графы G и G' изоморфны всегда, кроме случая, когда один из них есть K_3 , а другой $K_{1,3}$.

В теореме 4 мы получим аналог этого результата для реберных графов мультиграфов, а в теореме 6 для реберных мультиграфов.

Характеризационные результаты, полученные для реберных графов, в настоящее время уже перенесены на реберные графы мультиграфов. Например, аналог следующей теоремы Байнеке [2] получен в [3] (теорема 3 ниже).

Теорема 2. Граф G является реберным графом некоторого графа тогда и только тогда, когда ни один из девяти графов, приведенных на рис. 1, не является порожденным подграфом графа G .

Теорема 3. Граф G является реберным графом некоторого мультиграфа тогда и только тогда, когда ни один из семи графов, приведенных на рис. 2, не является порожденным подграфом графа G .

В теореме 5 мы получим аналогичный результат, дающий характеристику реберных мультиграфов.

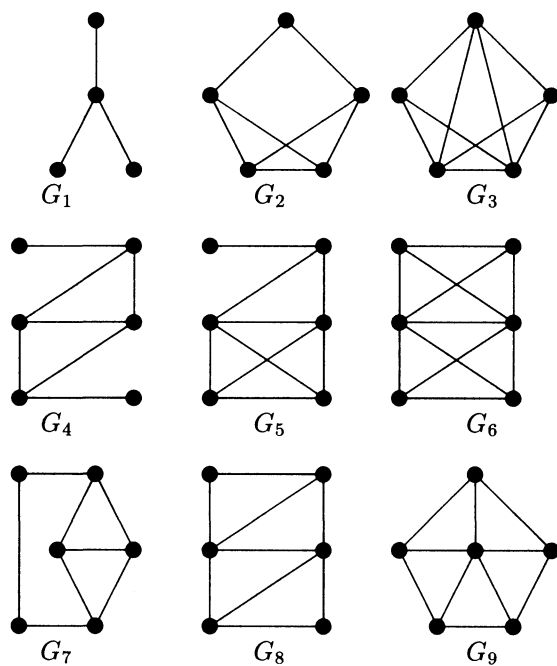


Рис. 1. Запрещенные порожденные графы для реберных графов

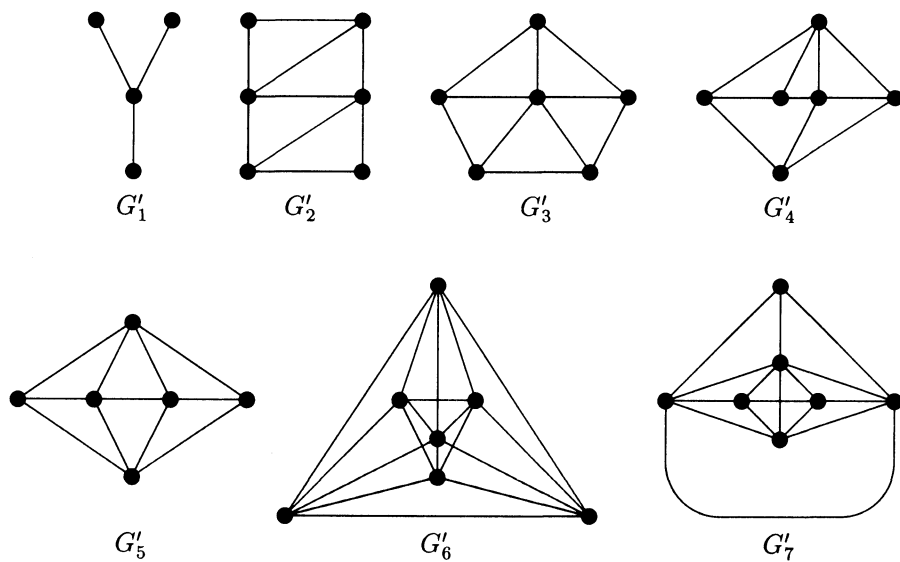


Рис. 2. Запрещенные порожденные подграфы для реберных графов мультиграфов

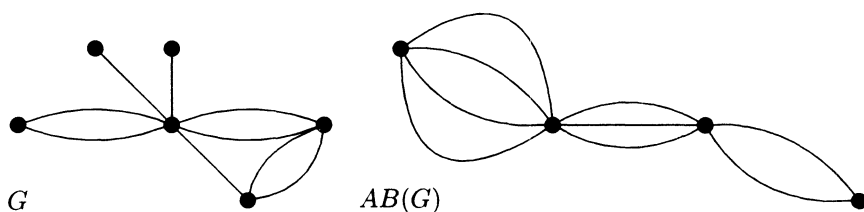


Рис. 3. Иллюстрация операции AB

2. Аналог теоремы Уитни для реберных графов мультиграфов

Базисным графом $U(G)$ мультиграфа G называется граф с множеством вершин VG , в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они смежны в G . Мультизвездой S_m мы будем называть любой мультиграф, у которого число ребер равно m , $m \geq 1$, и базисный граф которого является звездой. Центром мультизвезды S_m называется вершина, имеющая степень m . Если $|VS_m| = 2$, то центром считается только одна из двух вершин. Вершины, отличные от центра мультизвезды, называются концевыми.

Порожденный подграф $H = S_m$ мультиграфа G называется висячей мультизвездой, если $\deg_H u = \deg_G u$ для любой концевой вершины $u \in VH$.

Мультитреугольником mK_3 называется любой мультиграф, у которого базисный граф есть K_3 . Порожденный подграф $H = mK_3$ называется висячим мультитреугольником с корнем $v \in VH$, если $\deg_H x = \deg_G x$ для любой вершины $x \in VH - \{v\}$ и $\deg_H v < \deg_G v$.

Определим теперь два преобразования произвольного мультиграфа G .

Операция А. Для каждой максимальной (по включению) висячей мультизвезды в G отождествим все ее концевые вершины.

Операция В. Для каждого висячего мультитреугольника H с корнем v и множеством вершин $VH = \{v, x, y\}$ удалим все ребра между вершинами v и x , а затем добавим $\deg x$ новых ребер между вершинами v и y .

Мультиграф, полученный из G последовательным применением операций А и В (в любой последовательности), обозначим $AB(G)$. Ясно, что мультиграфы G и $AB(G)$ всегда имеют одинаковое число ребер. Преобразование AB иллюстрируется на рис. 3.

Теорема 4. Пусть G и G' — связные мультиграфы, у которых реберные графы изоморфны. Мультиграфы $AB(G)$ и $AB(G')$ изоморфны всегда, кроме двух случаев:

- (1) один из них есть мультизвезда S_m порядка 2, а другой — мультитреугольник с m ребрами;

- (2) оба являются мультитреугольниками с кратностями ребер $\{m_1, m_2, m_3\}$ и $\{m'_1, m'_2, m'_3\}$, причем

$$m_1 + m_2 + m_3 = m'_1 + m'_2 + m'_3, \quad \{m_1, m_2, m_3\} \neq \{m'_1, m'_2, m'_3\}.$$

Доказательство. Пусть $H = L(G) = L(G')$, и $N(u)$ — множество вершин, смежных с $u \in VH$. Две вершины $u, v \in VH$ назовем раздвоенными, если $N(u) \cup \{u\} = N(v) \cup \{v\}$. Отношение быть раздвоенными является отношением эквивалентности на множестве VH . Обозначим через $C_1, \dots, C_k$ соответствующие классы эквивалентности вершин.

При $k = 1$ граф H является полным, поэтому любые два ребра мультиграфа G смежны. Это возможно только в том случае, когда G либо является мультизвездой S_m , либо мультитреугольником с m ребрами. То же самое справедливо и для G' . Поэтому при $k = 1$ теорема верна.

Далее, пусть $k > 1$. Удалим из каждого класса C_i все вершины, кроме одной. Полученный в результате граф обозначим через H_1 . Так как никакие две вершины в H_1 не являются раздвоенными, $H_1 = L(G_1)$, причем в G_1 нет кратных ребер. Легко видеть, что граф H_1 связан, поэтому граф G_1 также можно считать связным. Отсюда и из теоремы 1 следует, что граф G_1 определен однозначно. Действительно, из условия $k > 1$ следует, что $H_1 \neq K_3$ и $G \notin \{K_3, K_{1,3}\}$.

Итак, мы нашли общий подграф G_1 графов G и G' , удовлетворяющий следующему свойству: для любого ребра $e \in EG - EG_1$ (или $EG' - EG_1$) существует смежное с ним ребро $f \in EG_1$, которое имеет с e одинаковое множество смежных ребер. Такие два ребра будем называть раздвоенными, поскольку им соответствуют раздвоенные вершины в реберном графе. Ясно, что кратные ребра всегда являются раздвоенными.

В графе H_1 нет раздвоенных вершин. Следовательно, в графе G_1 нет раздвоенных ребер. Это означает, что в G_1 каждая висячая звезда есть K_2 и нет висячих треугольников. Разобьем множество ребер графа G_1 на три подмножества:

- множество E_1 висячих ребер (т.е. ребер, инцидентных вершине степени 1);
- множество E_2 ребер uv , у которых одна из концевых вершин (например, v) имеет степень 2, причем существует вершина $w \neq u$ степени 1, которая смежна с v ;
- множество $E_3 = EG_1 - (E_1 \cup E_2)$.

Пусть $f \in E_1$, $f = uv$, и $\deg u = 1$. Так как $\deg v = 1$, существует вершина $w \neq u$, смежная с v . Каждая висячая звезда в G_1 есть K_2 , поэтому $\deg w > 1$, т.е. существует вершина x , смежная с w . Далее, если ребро e раздвояно с ребром f , то $v \in e$. Действительно, в противном случае $e = uv$, но тогда ребра e и wx смежны, что невозможно, поскольку ребра f и wx не смежны. Итак, если $f \in E_1$, то множество всех ребер, раздвоенных с ребром f (в графе G или G'), образует мультизвезду с центром в вершине v . Концевыми вершинами этой мультизвезды являются, кроме вершины u , вершины, не принадлежащие VG_1 . Две различные мультизвезды не имеют, очевидно, общих вершин. Таким образом, мультизвезда, соответствующая ребру $f \in E_1$, является висячей в графах G и G' .

Пусть теперь $f \in E_2$, $f = uv$, $\deg v = 2$, и вершина v смежна с вершиной $w \neq u$ степени 1. В G_1 нет висячих звезд, поэтому $\deg u \geq 2$. Пусть вершина u смежна с

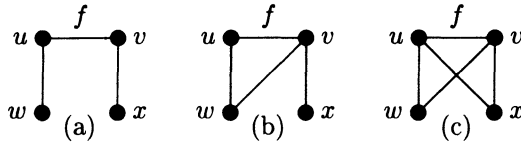


Рис. 4.

вершиной $x \neq v$. Возьмем любое ребро e , раздвоенное с f (в графе G или G'). Если $\deg u > 2$, то возможны только два варианта $e = f$ и $e = uv$. При наличии хотя бы одного ребра uw в графе G (или G') мы получаем висячий мультитреугольник uvw с корнем в вершине u . Если $\deg u = 2$, то возможен еще один вариант, $e = vx$. Но для того, чтобы ребра f и e были раздвоенными, необходимо, чтобы $\deg x = 1$, т.е. $G_1 = P_4$. В этом случае ситуация становится аналогичной рассмотренной выше. Наличие одновременно ребер $e = uv$ и $e' = vx$ невозможно из-за их несмежности.

Наконец, пусть $f \in E_3$, $f = uv$. Так как $f \notin E_1$, то $\deg u > 1$ и $\deg v > 1$. Поэтому существует вершина $w \neq v$, смежная с u , и существует вершина $x \neq u$, смежная с v . Можно считать, что $w \neq x$. Действительно, если $w = x$, то поскольку в графе G_1 нет висячих треугольников, найдется еще одна вершина, смежная хотя бы с одной из вершин u или v .

Если ребро e раздвоено с ребром f в графе G (или G'), то либо $e = uv$, либо $e = ux$, либо $e = vw$. Ясно, что при наличии в графе G_1 ребра wx , не смежного с f , возможен только один вариант $e = uv$.

Предположим, что ребро wx отсутствует. Тогда возможны три неизоморфных варианта для порожденного подграфа $G_1(\{u, v, w, x\})$, показанные на рис. 4.

Случай (а). Так как $e \notin E_2$, то возможны три подслучая:

- (a1) $\deg u > 2$, $\deg v > 2$;
- (a2) $\deg u > 2$, $\deg x > 1$;
- (a3) $\deg w > 1$, $\deg x > 1$.

Легко проверить, что в каждом из этих трех случаев $e = uv$, поскольку варианты $e = ux$ и $e = vw$ приводит к противоречию с тем, что ребра f и e раздвоены.

Случай (б). Вариант $e = ux$ невозможен ввиду наличия ребра vw . Покажем, что $e \neq vw$. Так как в графе G_1 нет висячих треугольников, то по крайней мере одна из вершин u или w имеет степень, большую 2. Если u смежна с некоторой вершиной $y \notin \{v, w\}$, то ребро vw не смежно с ребром uy . Если же w смежна с вершиной $z \notin \{u, v\}$, то ребро vw будет смежно с ребром wz . Так как оба варианта противоречат тому, что ребра e и f раздвоены, то $e \neq vw$ и, следовательно, $e = uv$.

Случай (с). Очевидно, что $e = uv$ (из-за наличия ребер ux и vw).

Таким образом, если $f \in E_3$, то любое ребро, раздвоенное с f , является ребром, кратным f .

Из вышеизложенного ясно, что применение операций A и B к мультиграфам G и G' приводит к изоморфным мультиграфам. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в связном мультиграфе G нет висячих мультизвезд и висячих мультитреугольников, и сам G не является мультитреугольником, то он определяется с точностью до изоморфизма своим реберным графом.*

Напомним, что вершина графа называется симплициальной, если ее окружение порождает полный граф. Класс эквивалентности C_i , введенный в доказательстве теоремы 4, назовем симплициальным, если он состоит из симплициальных вершин. Далее, назовем вершину полусимплициальной, если ее окружение порождает дизъюнктное объединение двух полных графов. Соответственно, класс эквивалентности называется полусимплициальным, если он состоит из полусимплициальных вершин.

Следствие 2. *Пусть G — связный мультиграф и $H = L(G)$. Если в графе H каждый симплициальный и каждый полусимплициальный класс содержит ровно одну вершину, то мультиграф G определяется с точностью до изоморфизма графом H .*

Доказательство. Достаточно заметить, что ребрам каждой висячей мультизвезды в G соответствует в H симплициальный класс эквивалентности, а ребрам каждого висячего треугольника соответствует один симплициальный и один полусимплициальный класс. Остается применить следствие 1.

3. Реберные мультиграфы

Как видно из предыдущего параграфа, реберный граф довольно слабо определяет мультиграф-прообраз. Этот недостаток может быть ликвидирован следующей моделью.

Определим реберный мультиграф $LM(G)$ мультиграфа G : вершины $LM(G)$ биективно соответствуют ребрам G и две вершины в $LM(G)$ являются смежными столько раз, сколько общих вершин имеют в G соответствующие им ребра. Таким образом, кратность ребер в $LM(G)$ не превосходит 2.

Обозначим через M_2^k мультиграф с двумя вершинами и k кратными ребрами. Следующая теорема дает характеристику реберных мультиграфов в терминах запрещенных порожденных подграфов (аналог теоремы 2)

Теорема 5. *Мультиграф G является реберным мультиграфом тогда и только тогда, когда ни один из мультиграфов M_2^k , $k \geq 3$, H_1-H_4 (рис. 5) и G_1-G_9 (рис. 1) не является порожденным подграфом мультиграфа G .*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что ни один из перечисленных в формулировке мультиграфов не является реберным мультиграфом.

Докажем достаточность. Так как подграфа M_2^k при всех $k \geq 3$ нет, кратности всех ребер не превосходят 2.

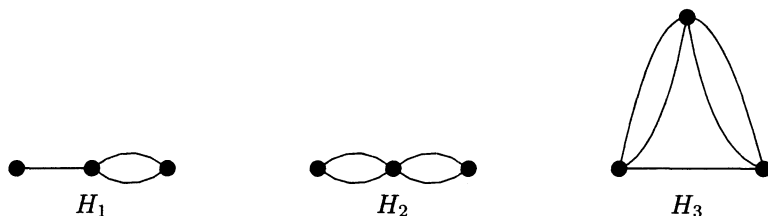


Рис. 5.

Рассмотрим остовный подграф G' графа G , содержащий все ребра кратности 2 и не содержащий ребер кратности 1. В мультиграфе G' удалим одно ребро из каждой пары кратных ребер и получим некоторый граф G'' . Так как G не содержит порожденных подграфов H_2 и H_3 , граф G' не содержит порожденного подграфа H_2 . Соответственно, в G'' нет порожденного подграфа P_3 . Легко проверить, что в этом случае G'' есть дизъюнктивное объединение полных графов. Мультиграф назовем 2-полным, если в нем любые две вершины соединены ровно двумя ребрами. Мы показали, что G' есть дизъюнктивное объединение 2-полных графов.

Две вершины графа G назовем эквивалентными, если они принадлежат одному 2-полному подграфу. Обозначим через $D_1, \dots, D_k$ соответствующие классы эквивалентности.

Для любого $i = 1, \dots, k$ и любых двух вершин $u, v \in D_i$ выполняется равенство $N(u) \cup \{u\} = N(v) \cup \{v\}$. Действительно, в противном случае G содержит порожденный подграф H_1 .

Удалим из каждого класса D_i все вершины, кроме одной. В результате получим некоторый реберный граф G^* , так как в G^* нет порожденных подграфов G_1 – G_9 (теорема 2). Пусть $G^* = L(H^*)$. Каждому ребру e графа H^* соответствует вершина v графа G^* . Если $v \in D_i$, то заменим ребро e на $|D_i|$ кратных ребер. В результате получим такой мультиграф H , что $G = LM(H)$. Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть G и G' — связные мультиграфы, у которых реберные мультиграфы изоморфны. Тогда мультиграфы G и G' изоморфны всегда, кроме случая, когда один из них есть мультитреугольник с кратностями ребер m_1, m_2, m_3 , а другой — мультизвезда с базисным графом $K_{1,3}$ и такими же кратностями ребер.

Следующее простое утверждение обобщает один результат Ф. Харари (теорема 8.2 в [1]).

Предложение 1. Связный мультиграф G изоморфен своему реберному мультиграфу $LM(G)$ тогда и только тогда, когда G — простой цикл порядка $n \geq 2$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $G = LM(G)$. Тогда в G число вершин равно числу ребер. Поэтому G является одноциклическим графом. Если в G есть вершина степени, большей 2, то в $LM(G)$ есть по крайней мере два цикла и $G \neq LM(G)$. Поэтому $G = C_n$ ($n \geq 2$). Предложение доказано.

Автор благодарит Р. И. Тышкевич за привлечение его внимания к проблеме перенесения теоремы Уитни на мультиграфы в связи с исследованиями наследственных подклассов реберных графов.

Список литературы

1. Харари Ф. *Теория графов*. Мир, Москва, 1973.
2. Beineke L. W. Derived graphs and digraphs. In: *Beitrage zur Graphentheorie*. Leipzig, 1968, pp. 17–33.
3. Bermond J. C., Meyer J. C. Graphe representatif des arretes d'un multigraphe. *J. Math. Pures et Appl.* (1973) **52**, 299–308.
4. Whitney H. Congruent graphs and connectivity of graphs. *Amer. J. Math.* (1932) **54**, 150–168.

Статья поступила 26.07.1994.

Переработанный вариант поступил 26.05.1995.