УДК 517.5

В. Г. Кротов, Л. В. Смовж

Весовые оценки касательного граничного поведения

1 Введение

Существование граничных значений (свойство Фату) характерно для функций из пространств Харди. При этом граничные значения понимаются как пределы вдоль некоторых областей подхода к границе (области Фату). Исходным пунктом здесь явилась знаменитая теорема Фату [1] — ограниченная аналитическая в единичном круге функция почти всюду на границе круга имеет некасательный предел.

Свойство Фату может быть выражено количественно — в виде оценок для соответствующих максимальных функций. Впервые их нашли Харди и Литтлвуд [2]. Свойство Фату легко выводится из таких оценок, но на самом деле роль неравенств для максимальных функций значительно глубже [3].

Примерами областей Фату могут служить некасательные конусы Лузина для пространств Харди гармонических функций в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$ [4] или допустимые области Кораньи–Стейна для классов Харди голоморфных функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$ [5, 6]. При этом в каждом из случаев указанные области являются в определенном смысле наилучшими. Поэтому, для того, чтобы функция из того или иного класса Харди имела предельные значения вдоль более широких областей, необходимо налагать на нее дополнительные ограничения типа гладкости.

Систематическое исследование таких связей между гладкостью функции и геометрией областей Фату было начато сравнительно недавно — в работах [7]–[8], где рассматривалось касательное граничное поведение потенциалов (например, Бесселя) гармонических функций из классов Харди $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ (при $p \geq 1$ в [7] и при $p > 0$ в [8]). При этом существенное внимание было уделено именно оценкам норм максимальных функций.

Дальнейшему изучению задач о связи между гладкостью и свойством Фату были посвящены работы [9]–[17], в которых приведены также многочисленные приложения таких задач.

Наша работа продолжает исследования из [11]–[13] и [16], где касательное свойство Фату рассматривалось в общей ситуации пространств однородного типа [18] (X, d, μ) с квазиметрикой d и мерой μ. Перейдем к точным определениям.

Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, топология которого задается квазиметрикой d. Это означает,что функция $d : X \times X \to [0, \infty)$ удовлетворяет условиям

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad d(x, y) = d(y, x),$$

и существует такая постоянная $a_d \geq 1$, что $d(x, y) \leq a_d[d(x, z) + d(z, y)]$ при $x, y, z \in X$. Кроме того, семейство открытых шаров

$$B(x, t) = \{y \in X : d(x, y) < t\}$$

образует базу окрестностей топологии X. Для простоты считаем, что $\operatorname{diam} X = 1$.

Неотрицательная функция ν, определенная на σ-алгебре борелевских множеств из X, называется внешней мерой, если она монотонна и субаддитивна, то есть

$$G_1 \subset G_2 \Rightarrow \nu(G_1) \leq \nu(G_2), \quad \nu\left(\bigcup_j G_j\right) \leq \sum_j \nu(G_j).$$

Для борелевской функции f и внешней меры ν на X положим

$$\|f\|_{L^p_\nu(X)} = \left(p \int\limits_0^\infty \lambda^{p-1} \nu \left\{ |f| > \lambda \right\} d\lambda \right)^{1/p}, \quad p > 0.$$

Конечно, если ν является мерой, то эта величина совпадает с

$$\|f\|_{L^p_\nu(X)} = \left(\int_X |f|^p \, d\nu \right)^{1/p}.$$

Ниже всякую неотрицательную борелевскую меру на X будем называть просто мерой.

Обозначим через $\mathbf{X} = X \times [0,1)$ и с помощью соответствия $x \leftrightarrow (x,1)$ будем отождествлять X с границей $\mathbf{X}$.

Каждая положительная функция $\varepsilon : (0,1] \to (0,1]$ определяет область подхода $\Gamma_\varepsilon(x)$ к границе $\mathbf{X}$ в точке $x \in X$

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \{(y,t) \in \mathbf{X} : d(x,y) < \varepsilon(1-t)\}. \tag{1}$$

Степень "касания" $\Gamma_\varepsilon(x)$ и $X \times \{1\}$ связана с поведением функции ε вблизи $t = 0$. Именно, чем медленнее $\varepsilon(t)$ сходится к нулю при $t \to 0$, тем шире $\Gamma_\varepsilon(x)$. Всюду в дальнейшем считаем, что функция ε, определяющая область (1), является непрерывной и строго возрастающей.

Семейство областей (1) порождает соответствующую максимальную функцию

$$\mathcal{N}_\varepsilon u(x) = \sup\{|u(y,t)| : (y,t) \in \Gamma_\varepsilon(x)\}. \tag{2}$$

В случае[1] $\varepsilon_0(t) \equiv at$ вместо $\mathcal{N}_{\varepsilon_0} u$ будем писать $\mathcal{N}u$ и $\Gamma = \Gamma_{\varepsilon_0}$.

В [11, 16] изучалось свойство Фату для сглаживающих операторов вида

$$\mathcal{K}_\omega u(x,t) = \int\limits_0^1 \omega(1-s) u(x,ts) \frac{ds}{1-s}, \tag{3}$$

с ядрами степенного порядка в окрестности точки $s = 0$. В таком виде можно записать, например, дробные интегралы Коши-Сеге в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{C}^n$

$$\int_{\partial B^n} \frac{f(\eta)}{(1 - \langle z, \eta \rangle)^{n-\alpha}} \, d\sigma(\eta) = \frac{1}{B(\alpha, n)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{n-\alpha-1} f(sz) \, ds \tag{4}$$

(B — бета-функция Эйлера). В [11] приведены и другие примеры операторов вида (3), в близкой к (3) форме можно также записать и потенциалы Бесселя гармонических функций.

В [16] были доказаны весовые неравенства вида[2]

$$\|\mathcal{N}_\varepsilon(\mathcal{K}u)\|_{L^p_\nu(X)} \le c \, \|\mathcal{N}u\|_{L^p_\mu(X)} \tag{5}$$

[1] a всегда будет означать положительную постоянную, фиксированную произвольно.

[2] Всюду ниже c — различные положительные постоянные.

при $\varepsilon(t) = t^{\varepsilon_0}$, $\omega(s) = O(s^\alpha)$ на ядро и условии

$$\nu(B(x,s)) \le cs^\beta t^{-\gamma}\mu(B(x,t)) \ \ (x \in X,\ 0 < t < s \le 1), \tag{6}$$

$\beta = (\gamma - \alpha p)/\varepsilon_0 > 0$, на внешнюю меру ν и меру μ. Интерес к таким весовым оценкам продиктован отчасти тем, что в них внешняя мера ν может быть сингулярной относительно μ и сосредоточенной на подмногообразиях меньшей хаусдорфовой размерности. Кроме того, ν не обязана быть аддитивной и может быть, например, емкостью.

Нашей основной целью является доказательство неравенств вида (5) при более общих условиях (на ядро оператора (3) и на меры), которые не имеют степенного характера.

2 Основной результат

Говорят, что функция $\omega : (0,1] \to (0,1]$ почти возрастает (убывает), если найдется такая постоянная $c \ge 1$, что для всех $0 < t_1 < t_2 \le 1$ выполняется неравенство $\omega(t_1) \le c\,\omega(t_2)$ (соответственно $\omega(t_2) \le c\,\omega(t_1)$).

Обозначим $\mathbf{\Omega}(0)$ класс непрерывных функций $\omega : (0,1] \to (0,1]$ таких, что $\omega(+0) = 0$, $\omega(1) = 1$, а также $\omega(t)/t^b$ почти возрастает при некотором $b > 0$. Для $\gamma_0 > 0$ обозначим $\mathbf{\Omega}(\gamma_0)$ подкласс функций $\omega \in \mathbf{\Omega}(0)$, для которых $\omega(t)/t^{\gamma_0 - b}$ почти убывает при некотором $b > 0$. Пусть еще

$$\mathbf{\Omega}(\infty) = \bigcup_{\gamma_0 > 0} \mathbf{\Omega}(\gamma_0).$$

Говорят, что внешняя мера μ удовлетворяет условию удвоения, если

$$\mu\left(B\left(x, 2t\right)\right) \le c\mu\left(B\left(x,t\right)\right), \ \ (x \in X, \ \ t \in (0,1]). \tag{7}$$

Краткая запись для этого $\mu \in \mathbf{D}$. В этом случае тройка (X, d, μ) называется пространством однородного типа [18].

Легко видеть, что для меры $\mu \in \mathbf{D}$ при некотором $\gamma_0 > 0$

$$\mu\left(B\left(x,s\right)\right) \le c\left(\frac{s}{t}\right)^{\gamma_0} \mu\left(B\left(x,t\right)\right) \ \ (x \in X, \ \ t \in (0,1],\ 0 < t \le s \le 1) \tag{8}$$

(можно взять $\gamma_0 = \log_2 c$, где c — постоянная из неравенства (7)). Условимся записывать $\mu \in \mathbf{D}_{\gamma_0}$, если выполнено условие (8). Таким образом,

$$\mathbf{D} = \bigcup_{\gamma_0 > 0} \mathbf{D}_{\gamma_0}. \tag{9}$$

Введем "функциональный" аналог условия удвоения (8)

$$\frac{\mu\left(B\left(x,s\right)\right)}{\gamma(s)} \le c\,\frac{\mu\left(B\left(x,t\right)\right)}{\gamma(t)} \ \ (x \in X,\ 0 < t \le s \le 1) \tag{10}$$

и в таком случае будем писать, что $\mu \in \mathbf{D}(\gamma)$. Тогда, очевидно, что

$$\mathbf{D} = \bigcup_{\gamma \in \mathbf{\Omega}(\infty)} \mathbf{D}(\gamma). \tag{11}$$

Сравнение (9) и (11) показывает, что (10) дает более гибкую классификацию мер, со свойством удвоения (7), чем (8). Основное условие связи двух мер ν и μ на X, которое мы будем использовать вместо (6), похоже на (10)

$$\frac{\nu\left(B\left(x,s\right)\right)}{\beta(s)} \leq c\,\frac{\mu\left(B\left(x,t\right)\right)}{\gamma(t)} \quad (x \in X,\ 0 < t \leq s < 1). \tag{12}$$

Будем писать тогда, что $(\nu, \mu) \in \mathbf{D}(\beta, \gamma)$.

Оператор (3) корректно определен на классе непрерывных функций $u \in C(\mathbf{X})$, если измеримая функция $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$ такова, что

$$\int\limits_0^1 |\omega(s)| \frac{ds}{s} < \infty.$$

В частности, это условие выполнено, если $\omega \in \mathbf{\Omega}(0)$.

Приведем теперь основной результат нашей работы.

Теорема 1 *Пусть $p > 0$, $\varepsilon \in \mathbf{\Omega}(1)$, $\gamma \in \mathbf{\Omega}(\infty)$ и*

$$\omega,\ \gamma\omega^{-p} \in \mathbf{\Omega}(0). \tag{13}$$

Пусть также ν — внешняя мера, μ — мера на X, причем $(\nu, \mu) \in \mathbf{D}(\beta, \gamma)$, где

$$\beta(t) = \gamma\left(\varepsilon^{-1}(t)\right)\left[\omega\left(\varepsilon^{-1}(t)\right)\right]^{-p}. \tag{14}$$

Тогда

$$\left\|\mathcal{N}_\varepsilon\left(\mathcal{K}_\omega u\right)\right\|_{L^p_\nu} \leq c\left\|\mathcal{N} u\right\|_{L^p_\mu}, \quad u \in C(\mathbf{X}). \tag{15}$$

Если $\nu = \mu$, то теореме 1 можно придать следующую форму.

Теорема 2 *Пусть $p > 0$, $\gamma \in \mathbf{\Omega}(\infty)$, γ возрастает и выполнено (13), $\varepsilon \in \mathbf{\Omega}(1)$,*

$$\varepsilon(t) \leq c\gamma^{-1}\left\{\gamma(t)\left[\omega(t)\right]^{-p}\right\}. \tag{16}$$

Пусть также мера μ удовлетворяет условию (10).

Тогда

$$\left\|\mathcal{N}_\varepsilon\left(\mathcal{K}_\omega u\right)\right\|_{L^p_\mu} \leq c\left\|\mathcal{N} u\right\|_{L^p_\mu}, \quad u \in C(\mathbf{X}). \tag{17}$$

Условия (13) на ядро ω в случае степенных функций $\omega(t) = t^{\omega_0}$, $\gamma(t) = t^{\gamma_0}$ превращаются в неравенства $0 < \omega_0 < \frac{\gamma_0}{p}$, которые проясняют роль общих ограничений (13). Благодаря им мы можем исключить случаи, близкие к предельным $\omega(t) = 1$ и $\omega(t) = \gamma(t)^{1/p}$, когда правильная связь между параметрами имеет совершенно иной вид. Подробности, связанные с рассмотрением таких ситуаций, можно найти в работах [19, 20] (случай $\omega(t) = 1$) и [7, 10, 13, 14] (случай $\omega(t) = t^{\gamma_0/p}$).

Основные соотношения (14) и (16), при которых справедливы неравенства (15) и (17) соответственно, дают точные количественные соотношения для параметров. Уже для степенных функций они являются оптимальными и не допускают улучшения (см. об этом [7, 16]).

3 Доказательство основной теоремы

Сначала приведем ряд вспомогательных утверждений. Следующая геометрическая лемма, относящаяся к пространству с квазиметрикой (X, d), имеется в [18].

Лемма 1 *Существует постоянная $\rho = \rho_d \geq 1$ такая, что для любого множества $E \subset X$ и любого покрытия $\{B\}$ этого множества шарами существует не более чем счетное подсемейство $\{B_j\} \subset \{B\}$ со свойствами*

$$E \subset \bigcup_j \rho B_j, \quad B_i \cap B_j = \varnothing \ (i \neq j).$$

Здесь ρB — шар с тем же центром, что и B, радиуса в ρ раз больше. В случае неограниченного X от шаров из $\{B\}$ следует дополнительно потребовать ограниченность их радиусов.

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать обозначение

$$\delta_t = 1 - t, \quad t \in [0, 1).$$

Для $A \geq 1$ и функции $\varepsilon \in \mathbf{\Omega}(1)$ определим области

$$\Gamma_\varepsilon^A(x) = \left\{(y,t) \in \mathbf{X} : \ \delta_t < \varepsilon\left(\delta_t A^{-1}\right), d(x,y) < \varepsilon(\delta_t A^{-1})\right\}$$

и соответствующие максимальные функции

$$N_{\omega,\varepsilon}^A u(x) = \sup\left\{\omega(\delta_t)\,|u(y,t)| : (y,t) \in \Gamma_\varepsilon^A(x)\right\},$$

где $\omega : [0,1) \to \mathbb{R}_+$. Подобные конструкции впервые рассматривались в [8]. Впоследствии различные варианты таких функций изучались в [9], [11]–[13]. Здесь мы используем для работы с $N_{\omega,\varepsilon}^A$ методы из [11].

Лемма 2 *При условиях теоремы 1 существует такое $b > 0$, что для любых $A \geq 1$ и $u \in C(\mathbf{X})$*

$$\|N_{\omega,\varepsilon}^A u\|_{L_\nu^p(X)} \leq cA^{-b/p}\|\mathcal{N}u\|_{L_\mu^p(X)}.$$

Доказательство. Для максимальной функции $N_{\omega,\varepsilon}^A u$ при $\lambda > 0$ определим множества

$$E^\omega(\lambda) = \left\{x \in X \ : \ N_{\omega,\varepsilon}^A u(x) > \lambda\right\}$$

и выберем натуральное число $k_A \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$2^{-k_A-1} < \sup\left\{\delta_t : \delta_t < \varepsilon\left(A^{-1}\delta_t\right)\right\} \leq 2^{-k_A}.$$

Для $k \geq k_A$ обозначим

$$E_k^\omega(\lambda) = \left\{x \in E^\omega(\lambda) \ : \ 2^{-k-1} < t_\omega(x) \leq 2^{-k}\right\},$$

где t_ω задается равенством

$$t_\omega(x) = \sup\left\{\delta_t < \varepsilon\left(\delta_t A^{-1}\right) : \exists y \in X : d(x,y) < \varepsilon\left(\delta_t A^{-1}\right),\ \omega(\delta_t)\,|u(y,t)| > \lambda\right\}.$$

Ясно, что множества $E_k^\omega(\lambda)$ измеримы и

$$E_k^\omega(\lambda) \cap E_i^\omega(\lambda) = \varnothing\ , \ \bigcup_{k_A}^{\infty} E_k^\omega(\lambda) = E^\omega(\lambda), \quad k \neq i. \tag{18}$$

Введем также обозначения

$$N_0 u(x) = \sup\left\{ |u(y,t)| \ : \ d(x,y) < \delta_t/4a_d^2\,, \delta_t < \varepsilon\left(\delta_t A^{-1}\right) \right\},$$

$$t_0(x) = \sup\left\{ \delta_t : \delta_t < \varepsilon\left(\delta_t A^{-1}\right),\ \exists y \in X : d(x,y) < \delta_t/4a_d^2,\ |u(y,t)| > \lambda \right\}.$$

и

$$E^0(\lambda) = \{x \in X \ : \ N_0 u(x) > \lambda\},$$

$$E_k^0(\lambda) = \left\{ x \in E^0(\lambda) \ : \ 2^{-k-1} < t_0(x) < 2^{-k} \right\}, \quad k \geq k_A,$$

Тогда

$$E_k^0(\lambda) \cap E_i^0(\lambda) = \varnothing, \ \bigcup_{k_A}^{\infty} E_k^0(\lambda) = E^0(\lambda), \quad k \neq i.$$

Оценим $\nu(E_k^\omega(\lambda))$. Для этого рассмотрим произвольную точку $x \in E_k^\omega(\lambda)$ и найдем $y \in X$ и $t \in (1-2^{-k}, 1-2^{-k-1})$, для которых

$$d(x,y) < \varepsilon\left(\delta_t A^{-1}\right), \quad \omega(\delta_t)\,|u(y,t)| > \lambda, \quad \delta_t < \varepsilon\left(\delta_t A^{-1}\right).$$

Обозначим через $B_x = B\left(y, \varepsilon\left(\delta_t A^{-1}\right)\right)$, тогда $x \in B_x$ и семейство шаров $\{B_x : x \in E_k^\omega(\lambda)\}$ образует покрытие множества $E_k^\omega(\lambda)$. Следовательно, в силу леммы 1, из него можно выделить не более чем счетное подсемейство шаров $B_j = B\left(y_j, \varepsilon\left(\delta_{t_j} A^{-1}\right)\right)$, $j \geq 1$ такое, что

$$B_j \cap B_i = \varnothing, \ \ \nu\left(E_k^\omega(\lambda)\right) \leq \sum_j \nu(\rho B_j).$$

Так как $\omega \in \mathbf{\Omega}(0)$ и $\varepsilon \in \mathbf{\Omega}(1)$, то найдутся такие постоянные $c_0 \geq 1$, $b_1 > 0$ и $c_1 \geq 1$, что для всех $0 < t < s \leq 1$ справедливы неравенства

$$\omega(t) \leq c_0\, \omega(s),$$

$$\varepsilon(t) t^{-b_1} \leq c_1 \varepsilon(s) s^{-b_1}, \ \ \varepsilon(s)\, s^{\,b_1-1} \leq c_1\, \varepsilon(t)\, t^{\,b_1-1}. \tag{19}$$

Обозначим $k_\varepsilon = \left[\dfrac{1}{b_1} \log_2(4c_1 a_d^2) \right] + 1$ и покажем, что при $k \geq k_\varepsilon + k_A$ имеет место включение

$$B_j^* = B(y_j, a_d^{-2} 2^{-k-3}) \subset \bigcup_{i=k-k_\varepsilon}^{k} E_i^0\left(\frac{\lambda}{c_0 \omega(2^{-k})}\right), \ j \geq 1.$$

Действительно, пусть $x \in B_j^*$, тогда $d(x, y_j) < \dfrac{\delta_{t_j}}{4a_d^2}$, $\delta_{t_j} > 2^{-k-1}$ и $\left|u(y_j, \delta_{t_j})\right| > \dfrac{\lambda}{c_0 \omega(2^{-k})}$. Следовательно, $x \notin E_i^0\left(\lambda / c_0 \omega(2^{-k})\right)$ при $i > k$. Выберем точку (z, τ) так, что

$$d(x,z) < \delta_\tau/4a_d^2,\ \delta_\tau < \varepsilon\left(\delta_\tau A^{-1}\right), \ \ 2^{k_\varepsilon - k} < \delta_\tau,$$

тогда

$$d(x_j, z) \leq a_d^2\left[d(x_j, y_j) + d(y_j, x) + d(x,z)\right] \leq a_d^2\left[\varepsilon\left(\delta_{t_j} A^{-1}\right) + a_d^{-2} 2^{-k-3} + \delta_\tau/4a_d^2\right].$$

В силу (19)

$$\varepsilon\left(\delta_{t_j}A^{-1}\right)=\frac{\varepsilon\left(\delta_{t_j}A^{-1}\right)}{\left(\delta_{t_j}A^{-1}\right)^{b_1}}\left(\delta_{t_j}A^{-1}\right)^{b_1}\leq\frac{\varepsilon\left(\delta_\tau A^{-1}\right)}{\left(\delta_\tau A^{-1}\right)^{b_1}}\left(\delta_\tau\, 2^{-k_\varepsilon}A^{-1}\right)^{b_1}\leq\frac{\varepsilon\left(\delta_\tau A^{-1}\right)}{4a_d^2}.$$

Кроме того, $2^{-k}<\delta_\tau<\varepsilon\left(\delta_\tau A^{-1}\right)$, поэтому $d(x_j,z)<\varepsilon\left(\delta_\tau A^{-1}\right)$. Принимая во внимание, что $x_j\in E_k^\omega(\lambda)$ и $\delta_\tau>2^{k_\varepsilon-k}$ заключаем, что $|u(z,\tau)|\leq\dfrac{\lambda}{\omega(\delta_\tau)}\leq\dfrac{\lambda}{c_0\omega(2^{-k})}$. Последнее означает, что $x\notin E_i^0\left(\lambda/c_0\omega(2^{-k})\right)$ при всех $i<k-k_\varepsilon$. Таким образом, наше включение доказано.

Шары B_j^* лежат в попарно непересекающихся шарах B_j, следовательно, в силу (14), (18) и доказанного включения,

$$\nu\left\{E_k^\omega(\lambda)\right\}\leq\sum_j\nu\left(\rho B_j\right)\leq c\sum_j\frac{\beta\left(\rho\varepsilon\left(\delta_{t_j}A^{-1}\right)\right)}{\gamma\left(2^{-k-3}a_d^{-2}\right)}\mu\left(B_j^*\right)\leq$$

$$\leq\frac{c}{\gamma\left(2^{-k-3}a_d^{-2}\right)}\sum_j\gamma\left(\delta_{t_j}A^{-1}\right)\left[\omega\left(\delta_{t_j}A^{-1}\right)\right]^{-p}\mu\left(B_j^*\right).$$

Так как $\gamma\omega^{-p}\in\mathbf{\Omega}(0)$, то для некоторой постоянной $b>0$

$$\frac{\gamma(t)}{\omega^p(t)t^b}\leq c\frac{\gamma(s)}{\omega^p(s)s^b},\quad 0<t<s\leq 1. \tag{20}$$

Поэтому

$$\nu\left\{E_k^\omega(\lambda)\right\}\leq c\,A^{-b}\,\frac{\gamma\left(2^{-k}\right)\left[\omega\left(2^{-k}\right)\right]^{-p}}{\gamma\left(2^{-k-3}a_d^{-2}\right)}\,\mu\left(\bigcup_j B_j^*\right)\leq$$

$$\leq c\,A^{-b}\big[\omega\left(2^{-k}\right)\big]^{-p}\mu\left\{\bigcup_{i=k-k_\varepsilon}^{k}E_i^0\left(\frac{\lambda}{c_0\omega\left(2^{-k}\right)}\right)\right\}.$$

Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что

$$\nu\left\{\bigcup_{k=k_A}^{k_A+k_\varepsilon-1}E_k^\omega(\lambda)\right\}\leq c\,A^{-b}\big[\omega\left(2^{-k_A}\right)\big]^{-p}\mu\left\{\bigcup_{k=k_A}^{k_A+k_\varepsilon-1}E_k^0\left(\frac{\lambda}{c_0\omega\left(2^{-k_A}\right)}\right)\right\}.$$

Используя полученные оценки, докажем неравенство

$$\left\|N_{\omega,\varepsilon}^A u\right\|_{L_\nu^p(X)}^p\leq cA^{-b}\left(\left\|N_0u\right\|_{L_\mu^p(X)}\right)^p. \tag{21}$$

В самом деле,

$$\left\|N_{\omega,\varepsilon}^A u\right\|_{L_\nu^p(X)}^p=p\int\limits_0^\infty\lambda^{p-1}\nu\left\{E^\omega(\lambda)\right\}d\lambda\leq$$

$$\leq c\int\limits_0^\infty\lambda^{p-1}\left[\nu\left\{\bigcup_{k_A}^{k_A+k_\varepsilon-1}E_k^\omega(\lambda)\right\}+\sum_{k_A+k_\varepsilon}^\infty\nu\left\{E_k^\omega(\lambda)\right\}\right]d\lambda.$$

Для второго слагаемого под интегралом справедливы неравенства

$$\sum_{k=k_A+k_\varepsilon}^{\infty} \nu\left\{E_k^\omega(\lambda)\right\} \le c\,A^{-b} \sum_{k=k_A+k_\varepsilon}^{\infty} \sum_{i=k-k_\varepsilon}^{k} \left[\omega\left(2^{-k}\right)\right]^{-p} \mu\left\{E_i^0\left(\frac{\lambda}{c_0\omega(2^{-k})}\right)\right\} \le$$

$$\le c\,A^{-b} \sum_{i=k_A}^{\infty} \left(\omega\left(2^{-i-k_\varepsilon}\right)\right)^{-p} \mu\left\{E_i^0\left(\frac{\lambda}{c_0^2\omega(2^{-i})}\right)\right\} \le$$

$$\le \sum_{k=k_A+k_\varepsilon}^{\infty} \left(\omega\left(2^{-k}\right)\right)^{-p} \mu\left\{E_k^0\left(\frac{\lambda}{c_0^2\omega(2^{k_\varepsilon-k})}\right)\right\}.$$

Поэтому

$$\left\|N_{\omega,\varepsilon}^A u\right\|_{L_\nu^p(X)}^p \le c\,A^{-b} \left\{ \sum_{k=k_A}^{k_A+k_\varepsilon-1} \int_0^\infty \lambda^{p-1} \left(\omega\left(2^{-k_A}\right)\right)^{-p} \mu\left\{E_k^0\left(\frac{\lambda}{c_0\omega(2^{-k_A})}\right)\right\} d\lambda + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=k_A+k_\varepsilon}^{\infty} \int_0^\infty \lambda^{p-1} \left(\omega\left(2^{-k}\right)\right)^{-p} \mu\left\{E_k^0\left(\frac{\lambda}{c_0^2\omega(2^{k_\varepsilon-k})}\right)\right\} d\lambda \right\}.$$

Полагая $\lambda = sc_0\omega(2^{-k_A})$ в первом слагаемом, $\lambda = sc_0^2\omega(2^{k_\varepsilon-k})$ — во втором, с учетом (13) и (18) заключаем, что

$$\left\|N_{\omega,\varepsilon}^A u\right\|_{L_\nu^p(X)}^p \le c\,A^{-b} \sum_{k=k_A}^{\infty} \int_0^\infty s^{p-1} \mu(E_k^0(s))ds \le c\,A^{-b} \left\|N_0 u\right\|_p^p.$$

Таким образом, неравенство (21) доказано.

Доказательство теоремы 1. Запишем $\mathcal{K}_\omega u$ в виде суммы

$$\mathcal{K}_\omega u(x,t) = \int_0^1 \omega(1-s)u(y,ts)\frac{ds}{1-s} =$$

$$= \int_0^{1-\varepsilon(\delta_t)} \omega\left(1-\frac{s}{t}\right)u(y,s)\frac{ds}{t-s} + \int_{1-\varepsilon(\delta_t)}^{t} \omega\left(1-\frac{s}{t}\right)u(y,s)\frac{ds}{t-s} = I_1 + I_2.$$

Рассмотрим сначала I_2. Выберем $n \in \mathbb{N}$ так, что $2^n\delta_t < \varepsilon(\delta_t) \le 2^{n+1}\delta_t$ и положим $s_\nu = 1 - 2^\nu\delta_t$ для всех $\nu = 0, 1, \ldots, n$. Тогда, если $s \in (s_{\nu+1}, s_\nu)$, то

$$d(x,y) < \varepsilon(\delta_t) < \varepsilon\left(2^{-\nu}(1-s)\right)$$

и $1 - s < \varepsilon(\delta_t) < \varepsilon\left(2^{-\nu}(1-s)\right)$.

Поэтому на каждом из интервалов $(s_{\nu+1}, s_\nu)$, $\nu = 0, 1, \ldots$ для функции u справедливо неравенство

$$\omega(1-s)\left|u(y,s)\right| \le N_{\omega,\varepsilon}^{2^\nu} u(x),$$

что позволяет сделать следующую оценку

$$I_2 = \int\limits_{1-\varepsilon(\delta_t)}^{t} \frac{\omega(1-s/t)}{t-s}\, |u(y,s)|\, ds \le \sum_{\nu=0}^{n} \int\limits_{s_{\nu+1}}^{s_\nu} \frac{\omega(1-s/t)}{t-s}\, |u(y,s)|\, ds \le$$

$$\le c \sum_{\nu=0}^{n} \int\limits_{s_{\nu+1}}^{s_\nu} \frac{\omega(1-s/t)}{t-s}\, \frac{N^{2^\nu}_{\omega,\varepsilon} u(x)}{\omega(1-s)}\, ds \le c \sum_{\nu=0}^{n} \frac{N^{2^\nu}_{\omega,\varepsilon} u(x)}{\omega(1-s_\nu)}\, \omega(1-s_{\nu+1}).$$

Так как для I_1 будет $0 < s < (1-\varepsilon(\delta_t))\,/t$, то $d(x,y) < \varepsilon(\delta_t) < 1 - ts < (1-ts)^{1-\alpha}$ и

$$\int\limits_{0}^{(1-\varepsilon(\delta_t))/t} \omega(1-s)\, |u(y,ts)|\, \frac{ds}{1-s} \le$$

$$\le \int\limits_{0}^{(1-\varepsilon(\delta_t))/t} (1-s)^{\alpha-1}\ |\omega_1(1-ts) u(y,ts)|\, ds \le c\, N^1_{\omega_1,\varepsilon_1} u(x),$$

где

$$0 < \alpha < (b_0)^2/(b_0+p),\ \ b_0 = \min\{b_1, b\}, \tag{22}$$

b_1 определяется условием $\varepsilon \in \mathbf{\Omega}(1)$ (см. (19)), b — условием $\gamma\, \omega^{-p} \in \mathbf{\Omega}(0)$ (см. (20)), а

$$\omega_1(t) = \omega(t) t^{-\alpha},\ \ \varepsilon_1(t) = t^{1-\alpha}.$$

Таким образом, доказано неравенство

$$\mathcal{N}_\varepsilon(\mathcal{K}_\omega u)(x) \le c \left(\sum_{k=0}^{\infty} N^{2^k}_{\omega,\varepsilon} u(x) + N^1_{\omega_1,\varepsilon_1} u(x) \right).$$

Теперь для оценки первого слагаемого воспользуемся леммой 2. Пусть $a_k = 2^{-kb/2p}(1 - 2^{-b/2p})$, $k = 0, 1, \ldots$, тогда

$$\left\{ x : \sum_{k=0}^{\infty} N^{2^k}_{\omega,\varepsilon} u(x) > \lambda \right\} = \left\{ x : \sum_{k=0}^{\infty} N^{2^k}_{\omega,\varepsilon} u(x) > \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right\} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x : N^{2^k}_{\omega,\varepsilon} u(x) > \lambda\, a_k \right\}.$$

Принимая это во внимание, получаем

$$\int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} N^{2^k}_{\omega,\varepsilon} u > \lambda \right\} d\lambda \le \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu \left\{ N^{2^k}_{\omega,\varepsilon} u > \lambda\, a_k \right\} d\lambda \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-bk} a_k^{-p} \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu \left\{ N^{2^k}_{\omega,\varepsilon} u > \lambda \right\} d\lambda \le c\, \|\mathcal{N} u\|^p_{L^p_\mu}.$$

Для оценки второго слагаемого воспользуемся той же леммой, но с ω_1 и ε_1 вместо ω и ε. В силу выбора α и b_0 (см. (22)) справедливо неравенство

$$\beta(t) \le c\beta^*(t) \equiv c\, \gamma(\varepsilon_1^{-1}(t)) \left[\omega_1(\varepsilon_1^{-1}(t)) \right]^{-p}.$$

Действительно, так как для функции $\varepsilon \in \mathbf{\Omega}(1)$ выполнено (19), то

$$\varepsilon^{-1}(t) \le c\, t^{1/(1-b_0)} \le c\, t^{1/(1-\alpha)} \le c\, \varepsilon_1^{-1}(t), \ \ 0 < t < 1,$$

и с учетом (20) имеем

$$\beta(t) = \frac{\gamma(\varepsilon^{-1}(t))}{[\omega(\varepsilon^{-1}(t))]^p \left(\varepsilon^{-1}(t)\right)^{b_0}} \left(\varepsilon^{-1}(t)\right)^{b_0} \le c \,\frac{\gamma(\varepsilon_1^{-1}(t))}{\left[\omega(\varepsilon_1^{-1}(t))\right]^p} \left[\frac{\varepsilon^{-1}(t)}{t^{1/(1-\alpha)}}\right]^{b_0} \le$$

$$\le c\,\gamma\left(\varepsilon_1^{-1}(t)\right) \left[\omega\left(\varepsilon_1^{-1}(t)\right)\left(\varepsilon_1^{-1}(t)\right)^{-\alpha}\right]^{-p} \le c\beta^*(t).$$

Поэтому так как $(\nu, \mu) \in \mathbf{D}(\beta, \gamma)$, то $(\nu, \mu) \in \mathbf{D}(\beta^*, \gamma)$ и, следовательно, по лемме 2 справедливо неравенство

$$\|N^1_{\omega_1, \varepsilon_1} u\|_{L^p_\nu(X)} \le c\|\mathcal{N}u\|_{L^p_\mu(X)}.$$

Таким образом,

$$\|\mathcal{N}_\varepsilon(\mathcal{K}_\omega u)\|^p_{L^p_\nu(X)} \le c\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu\left\{\sum_{k=0}^\infty N^{2^k}_{\omega,\varepsilon} u > \lambda\right\} d\lambda +$$

$$+ c\int_0^\infty \lambda^{p-1}\nu\left\{N^1_{\omega_1,\varepsilon_1} u > \lambda\right\} d\lambda \le c\|\mathcal{N}u\|^p_{L^p(\mu)}$$

и неравенство (15) доказано.

4 Операторы типа потенциала

В этом параграфе мы рассмотрим применения теоремы 1 к операторам типа потенциала

$$\mathcal{P}_\omega f(x,t) = \int\limits_X \frac{\omega(d(x,y)+1-t)}{\gamma\left(d(x,y)+1-t\right)} f(y)d\mu(y), \ \ (x,t) \in \mathbf{X} \tag{23}$$

где, как и в предыдущем параграфе, X — компактное хаусдорфово пространство с квазиметрикой d и мерой μ.

Всюду в этом разделе мы будем считать, что мера μ на X удовлетворяет условию однородности

$$\frac{1}{c}\,\gamma(t) \le \mu(B(x,t)) \le c\gamma(t), \ \ x \in X, \ t \in (0,1). \tag{24}$$

Левая часть (24) — это (10) при $s = 1$. Так что новым ограничением в (24) по сравнению с (10) является правое неравенство. Оно необходимо для оценки потенциала (23) с помощью оператора вида (3).

Для этого нам понадобится также следующая экстремальная конструкция продолжения неотрицательной функции f с X на $\mathbf{X}$

$$\Pi f(x,t) = \inf\left\{f(y) : d(x,y) < a(1-t)\right\}.$$

Она рассматривалась в [14] в случае единичного шара в $\mathbb{C}^n$ и в [15] в общем случае.

Лемма 3 *Справедливы следующие утверждения*
1) если $u : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$, *то при* $(x,t) \in \mathbf{X}$

$$|u(x,t)| \le \Pi\left(\mathcal{N}u\right)(x,t), \quad \mathcal{N}\left(\Pi\left(\mathcal{N}u\right)\right)(x) \equiv \mathcal{N}u(x),$$

2) если $h : X \to [0,\infty)$ *полунепрерывна снизу, то*

$$\mathcal{N}\left(\Pi h\right)(x) \equiv h(x), \ x \in X.$$

Доказательство этой леммы повторяет рассуждения из [14] для случая единичного шара в $\mathbb{C}^n$ и мы на нем не останавливаемся.

В следующей лемме участвует максимальная функция Харди-Литтлвуда

$$Mf(x) = \sup \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| \, d\mu,$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B = B(y,t)$, содержащим точку $x \in X$.

Лемма 4 *Если функция* $f \in L^1_\mu(X)$ *неотрицательна,* ω, $\gamma\,\omega^{-1} \in \mathbf{\Omega}(0)$ *и* $\gamma \in \mathbf{\Omega}(\infty)$, *то*

$$\mathcal{P}_\omega f(x,t) \le c\,\mathcal{K}_\omega\left(\Pi\left(Mf\right)\right)(x,t), \ \ (x,t) \in \mathbf{X}.$$

Доказательство подобно обоснованию леммы 1 из [15] с некоторыми изменениями, соответствующими нашим условиям.

Пусть для краткости $r = 1 - t$, $u = \Pi(Mf)$. Если $0 \le t \le \frac{1}{2}$, то

$$\mathcal{P}_\omega f(x,t) \le \frac{\omega\left(1/2\right)}{\gamma\left(1/2\right)} \int\limits_X f(y) d\mu(y) \le c\, u(x,0),$$

поэтому можно считать, что $\frac{1}{2} < t < 1$. Выберем натуральное n так, чтобы $2^n r < 1 \le 2^{n+1} r$. Тогда

$$\mathcal{P}_\omega f(x,t) \le \int\limits_{B(x,2r)} \frac{\omega\left(d(x,y) + 1 - t\right)}{\gamma\left(d(x,y) + 1 - t\right)} f(y) d\mu(y) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{B(x,2^{k+1}r)\setminus B(x,2^k r)} \frac{\omega\left(d(x,y) + 1 - t\right)}{\gamma\left(d(x,y) + 1 - t\right)} f(y) d\mu(y) \ \le$$

$$\le c\frac{\omega(r)}{\gamma(r)} \int\limits_{B(x,2r)} f(y) d\mu(y) \ + c\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega\left(2^k r\right)}{\gamma\left(2^k r\right)} \int\limits_{B\left(x,2^{k+1}r\right)} f(y) d\mu(y).$$

В силу неравенства $1 - 2^{k+1} r \le t(1 - 2^k r)$ получим

$$\mathcal{P}_\omega f(x,t) \le c\omega(r) \inf\left\{Mf(z) : d(x,z) < 2r\right\} +$$

$$c\sum_{k=1}^{n} \omega\left(2^k r\right) \inf\left\{Mf(z) : d(x,z) < 2^{k+1} r\right\} \le$$

$$\le c\sum_{k=0}^{n} \omega(2^k r) u(x, 1 - 2^{k+1} r) \le c\sum_{k=0}^{n} \omega(2^k r) u(x, t(1 - 2^k r)) \le c\sum_{k=0}^{n} \omega(1 - s_k) u(x, t s_k),$$

где $s_k = 1 - 2^k r$. С другой стороны

$$\int\limits_{s_k}^{s_{k-1}} \frac{\omega(1-s)}{1-s}\, u(x,ts)ds \geq u(x,ts_k) \int\limits_{s_k}^{s_{k-1}} \frac{\omega(1-s)}{1-s}\, ds \geq c\,\omega(1-s_k)u(x,ts_k).$$

Из полученных оценок выводим

$$\mathcal{P}_\omega f(x,t) \leq \sum_{k=0}^{n} \omega(1-s_k)\, u(x,ts_k) \leq c \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-s)}{1-s}\, u(x,ts)ds \leq c\,\mathcal{K}_\omega u(x,t)$$

и лемма доказана.

Следующее утверждение вытекает непосредственно из теоремы 1, леммы 3 и обычного неравенства для максимальной функции Харди-Литтлвуда

$$\|Mf\|_{L^p_\mu(X)} \leq c\|f\|_{L^p_\mu(X)}, \quad p>1, \tag{25}$$

справедливого в случае $\mu \in \mathbf{D}$ [18].

Теорема 3 *Пусть $\varepsilon \in \mathbf{\Omega}(1)$, $\gamma \in \mathbf{\Omega}(\infty)$ и выполнено (13). Пусть также внешняя мера ν на X такова, что $(\nu,\mu) \in \mathbf{D}(\beta,\gamma)$, где β определяется из (14). Тогда*

$$\|\mathcal{N}_\varepsilon\left(\mathcal{P}_\omega f\right)\|_{L^p_\nu(X)} \leq c\left\|f\right\|_{L^p_\mu(X)}, \quad f \in L^p_\mu(X),\ p>1.$$

Рассмотрим конкретные примеры, иллюстрирующие теорему 3. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная липшицева область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ и, для удобства, звездная относительно начала координат, $\operatorname{diam} D = 1$. Звездность означает, что

$$D = \{y = rg(\theta)\theta : \theta \in S^{n-1}, 0 \leq r < 1\},$$

где $g : S^{n-1} \to \mathbb{R}_+$ — положительная липшицева функция на единичной сфере $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 3 будет применяться при следующем выборе основных параметров: $X = \partial D$ — граница области D, $d(x,y) = |x-y|$ — евклидова метрика, $\mu = \sigma$. При этом

$$\sigma(B(x,t)) \asymp t^{n-1},\ x \in \partial D,\ 0 < t \leq 1$$

с постоянными эквивалентности, не зависящими от x и t, т.е. сейчас условие (24) выполнено с $\gamma(t) = t^{n-1}$. Мы отождествляем $\partial D \times [0,1)$ и D с помощью отображения $(x,r) \to rx$, где $x \in \partial D$, $r \in [0,1)$.

Вместо областей (1) можно рассматривать

$$\Gamma^*_\varepsilon(x) = \{y \in D : |x-y| < a\varepsilon\left(\operatorname{dist}\left(y,\partial D\right)\right)\},\ x \in \partial D,$$

которые определены непосредственно в терминах D и более естественны. Они в существенном совпадают с областями $\Gamma_\varepsilon(P)$ (см. лемму 5 в [16]). Через $\mathcal{N}^*_\varepsilon u(x) = \sup\{|u(y)| : y \in \Gamma^*_\varepsilon(x)\}$ обозначаем соответствующие максимальные операторы.

Пусть

$$P_{\alpha,\beta}f(x) = \int_{\partial D} \frac{\left(\ln\frac{1}{|x-y|}\right)^\beta}{|x-y|^{n-\alpha-1}} f(y)d\sigma(y), \quad x \in D,$$

где $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Следствие 1 *Пусть* $p > 1$, $0 < \alpha < \frac{n-1}{p}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbf{\Omega}(1)$, ν *— внешняя мера на* ∂D, *удовлетворяющая условию*

$$\nu\left(B\left(x,t\right)\right) \le c\left[\varepsilon^{-1}(t)\right]^{n-\alpha p-1}\left(\ln\frac{e}{\varepsilon^{-1}(t)}\right)^{-\beta p}, x \in \partial D,\ 0 < t \le 1.$$

Тогда для любой функции $f \in L^p_\sigma(\partial D)$, $p > 1$

$$\left\|\mathcal{N}^*_\varepsilon\left(P_{\alpha,\beta}f\right)\right\|_{L^p_\nu(\partial D)} \le c\left\|f\right\|_{L^p_\sigma(\partial D)},$$

и $P_{\alpha,\beta}f$ *имеет* Γ^*_ε*-предел* ν*-почти всюду на* ∂D.

Так как

$$|x-y| \asymp |x - g(\theta)\theta| + 1 - r,\ \ x \in \partial D,\ y = rg(\theta)\theta \in D,$$

(см. лемму 5 из [16]), то ядро оператора $P_{\alpha,\beta}$ эквивалентно ядру оператора (23) при

$$\omega(t) = t^\alpha\left(\ln\frac{e}{t}\right)^\beta,$$

поэтому неравенства для $\mathcal{N}^*_\varepsilon\left(P_{\alpha,\beta}f\right)$ здесь вытекают непосредственно вытекает из теоремы 3, (25) и леммы 4. Утверждение о сходимости почти всюду выводится из оценок для максимальных операторов стандартным способом.

При $\beta = 0$ и $\varepsilon(t) = t^{\varepsilon_0}$ $(0 < \varepsilon_0 < 1)$ утверждение следствия 1 доказано в [15]. Приведем также частный случай $\nu = \sigma$ следствия 1.

Следствие 2 *Пусть* $p > 1$, $0 < \alpha < \frac{n-1}{p}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbf{\Omega}(1)$,

$$\varepsilon(t) \le ct^{1-\frac{\alpha p}{n-1}}\left(\ln\frac{e}{t}\right)^{-\frac{\beta p}{n-1}}.$$

Тогда для любой функции $f \in L^p_\sigma(\partial D)$

$$\left\|\mathcal{N}^*_\varepsilon\left(P_{\alpha,\beta}f\right)\right\|_{L^p_\sigma(\partial D)} \le c\left\|f\right\|_{L^p_\sigma(\partial D)},$$

и $P_{\alpha,\beta}f$ *имеет* Γ^*_ε*-предел* σ*-почти всюду на* ∂D.

5 Мультипликаторы степенных рядов.

Пусть B^n — единичный шар в $\mathbb{C}^n$, $n \ge 1$ и $H\left(B^n\right)$ — класс функций, голоморфных в B^n. Мы отсылаем к [5, 6] по поводу всех определений и фактов, относящихся к теории функций в B^n и используемых в этом параграфе.

Каждая функция $f \in H\left(B^n\right)$ разлагается в ряд по однородным многочленам

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(z), \tag{26}$$

сходящийся равномерно на компактах в B^n.

В этом параграфе мы рассмотрим приложения теоремы 1 к мультипликаторам

$$M_{N,\alpha}f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)^{-\alpha}\ln^{N}(m+2)F_m(z) \tag{27}$$

разложений (26) функций из пространств Харди $H^p(B^n)$, $p>0$. Отметим в связи с этим, что несколько в ином контексте касательное граничное поведение одномерных степенных рядов рассматривалось в работе [17].

Для $p>0$ пространство Харди $H^p(B^n)$ определяется как множество функций $f\in H(B^n)$, для которых

$$\|f\|_{H^p(B^n)}=\sup_{0\le r<1}\left(\int_{\partial B^n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{1/p}<\infty,$$

где σ — поверхностная мера на ∂B^n.

Теорема 1 будет применяться при следующем выборе основных параметров: $X=\partial B^n$ — граница шара B^n, $\mu=\sigma$ и $d(\zeta,\theta)=|1-\langle\zeta,\theta\rangle|$ — неизотропная квазиметрика. Здесь $\langle z,\zeta\rangle$ — комплексное скалярное произведение. При этом

$$\sigma(B(\zeta,t))\asymp t^n,\ \zeta\in\partial B^n,\ 0<t\le 1$$

с постоянными эквивалентности, не зависящими от ζ и t, т.е. сейчас условие (24) выполнено с $\gamma(t)=t^n$. В этом случае области Γ (см. (1) при $\varepsilon(t)=at$) совпадают, по существу, с допустимыми областями Кораньи–Стейна.

Мы отождествляем $\partial B^n\times[0,1)$ и B^n с помощью отображения $(\zeta,r)\to r\zeta$, где $\zeta\in\partial B^n$, $r\in[0,1)$.

Отметим для дальнейшего, что

$$\|\mathcal{N}f\|_{L^p(\partial B^n)}\le c\,\|f\|_{H^p(B^n)},\quad f\in H^p(B^n),\ 0<p<\infty. \tag{28}$$

Теорема 4 *Пусть $p>0$, $0<\alpha<\frac{n-1}{p}$, $N=0,1,\dots$, $\varepsilon\in\mathbf{\Omega}(1)$, ν — внешняя мера на ∂B^n, удовлетворяющая условию*

$$\nu\left(B\left(\zeta,t\right)\right)\le c\left[\varepsilon^{-1}(t)\right]^{n-\alpha p}\left(\ln\frac{e}{\varepsilon^{-1}(t)}\right)^{-Np},\quad \zeta\in\partial B^n,\ 0<t\le 1.$$

Тогда, для любой функции $f\in H^p(B^n)$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{N}_\varepsilon\left(M_{N,\alpha}f\right)\|_{L^p_\nu(\partial B^n)}\le c\,\|f\|_{H^p(B^n)}. \tag{29}$$

и $M_{N,\alpha}f$ имеет Γ_ε-предел ν-почти всюду на ∂B^n.

В случае $N=0$ и $\varepsilon(t)=t^{\varepsilon_0}$ $(0<\varepsilon_0<1)$ это было доказано в [16]. При $p>1$ в таком случае близкое утверждение было получено также в [12]. Именно, в [12] рассматривались дробные интегралы Коши-Сеге (4), которые также можно записать как мультипликатор

$$\int_{\partial B^n}\frac{f(\eta)}{(1-\langle z,\eta\rangle)^{n-\alpha}}\,d\sigma(\eta)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B(\alpha,n+m-\alpha)}{B(\alpha,n-\alpha)}F_m(z),$$

где B — бета-функция Эйлера (см. [11], с. 127).

Следствие 3 *Пусть* $p > 0$, $0 < \alpha < n/p$, $N = 0, 1, \dots$ *и* $\varepsilon \in \mathbf{\Omega}(1)$,

$$\varepsilon(t) \le ct^{1-\frac{\alpha p}{n}} \left(\ln \frac{e}{t}\right)^{-\frac{Np}{n}}.$$

Тогда, для любой функции $f \in H^p(B^n)$ *справедливо неравенство*

$$\|\mathcal{N}_\varepsilon (M_{N,\alpha} f)\|_{L^p_\sigma(\partial B^n)} \le c \|f\|_{H^p(B^n)}$$

и $M_{N,\alpha} f$ *имеет* Γ_ε*-предел* σ*-почти всюду на* ∂B^n.

При $N = 0$ это утверждение было доказано в [11]. В этом случае мультипликатор $M_{0,\alpha}$ допускает представление в виде (3)

$$M_{0,\alpha} f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-\alpha} F_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} f(sz)\, ds$$

— такие интегральные операторы рассматривал еще Адамар. Для $N \ge 1$ такое представление $M_{N,\alpha}$ получить не удалось и приходится преодолевать дополнительные технические трудности.

Для доказательства теоремы 4 нам понадобятся операторы

$$\mathcal{K}_{N,\alpha} f(z) = \int_0^1 \frac{\omega_{N,\alpha}(1-s)}{1-s} f(sz)\, ds, \quad z \in B^n, \tag{30}$$

где

$$\omega_{N,\alpha}(t) = t^\alpha \left(\ln \left(\frac{e^{(N+1)/\alpha}}{t}\right)\right)^N.$$

Лемма 5 *Если* $v_* > 0$, *то для оператора (27) справедливо представление*

$$M_{N,\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \mathcal{K}_{N,\alpha} f(z) - \sum_{k=1}^{N} A_k M_{N-k,\alpha} f(z) + K^1_N f(z) + K^2_N f(z) + K^3_N f(z) \right\} \tag{31}$$

где постоянные $A_k > 0$ *не зависят от* f *и* $z \in B^n$ *и*

$$K^1_N f(z) = -\int_0^{v_*} e^{-v} \left\{ g_N(v) - \frac{\omega_{N,\alpha}(v)}{v} \right\} f(ze^{-v}) dv,$$

$$K^2_N f(z) = -\int_0^{s_*} \frac{\omega_{N,\alpha}(1-s)}{1-s} f(sz)\, ds, \quad s_* = e^{-v_*},$$

$$K^3_N f(z) = \int_{v_*}^{\infty} e^{-v} \frac{\omega_{N,\alpha}(v)}{v} f(ze^{-v}) dv, \quad g_N(v) = \frac{\omega_{N,\alpha}(1-e^{-v})}{(1-e^{-v})}.$$

Доказательство. В силу разложения (26) для $\mathcal{K}_{N,\alpha} f(z)$ справедливо представление

$$\mathcal{K}_{N,\alpha} f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(z) \int_0^1 s^m \frac{\omega_{N,\alpha}(1-s)}{1-s}\, ds. \tag{32}$$

Каждый из интегралов в (32) можно записать в виде

$$\int_0^1 s^m\,\frac{\omega_{N,\alpha}(1-s)}{1-s}\,ds=\int_0^{s_*} s^m\,\frac{\omega_{N,\alpha}(1-s)}{1-s}\,ds+\int_{s_*}^1 s^m\,\frac{\omega_{N,\alpha}(1-s)}{1-s}\,ds=$$

$$=\int_0^{s_*} s^m\,\frac{\omega_{N,\alpha}(1-s)}{1-s}\,ds+\int_0^{v_*} e^{-v\,(m+1)}\,\frac{\omega_{N,\alpha}\left(1-e^{-v}\right)}{(1-e^{-v})}\,dv=$$

$$=\int_0^{s_*} s^m\,\frac{\omega_{N,\alpha}(1-s)}{1-s}\,ds+\int_0^{v_*} e^{-v\,(m+1)}\,\frac{\omega_{N,\alpha}(v)}{v}\,dv+\int_0^{v_*} e^{-v\,(m+1)}\left\{g_N(v)-\frac{\omega_{N,\alpha}(v)}{v}\right\}dv.$$

Таким образом

$$\int_0^1 s^m\,\frac{\omega_{N,\alpha}(1-s)}{1-s}\,ds=\int_0^{s_*} s^m\,\frac{\omega_{N,\alpha}(1-s)}{1-s}\,ds+\int_0^{v_*} e^{-v\,(m+1)}\left\{g_N(v)-\frac{\omega_{N,\alpha}(v)}{v}\right\}dv+$$

$$+\int_0^{\infty} e^{-v\,(m+1)}\,\frac{\omega_{N,\alpha}(v)}{v}\,dv-\int_{v_*}^{\infty} e^{-v\,(m+1)}\,\frac{\omega_{N,\alpha}(v)}{v}\,dv.$$

Полагая здесь $s=v(m+1)$, получим

$$\int_0^{\infty} e^{-v\,(m+1)}\,\frac{\omega_{N,\alpha}(v)}{v}\,dv=(m+1)^{-\alpha}\int_0^{\infty} e^{-s}s^{\alpha-1}\left(\ln\left(\frac{e^{(N+1)/\alpha}(m+1)}{s}\right)\right)^N ds=$$

$$=\Gamma(\alpha)(m+1)^{-\alpha}\left(\ln(m+1)\right)^N+\sum_{k=1}^{N}A_k\left(\ln(m+1)\right)^{N-k},$$

где $A_k=\sum\limits_{l=0}^{k}C_N^kC_k^l(-1)^l\Gamma^{(l)}(\alpha)\left(\dfrac{N+1}{\alpha}\right)^{k-l}$ ($\Gamma^{(l)}(\alpha)$ — производные Γ-функции).

Таким образом, оператор (30) представим в виде

$$\mathcal{K}_{N,\alpha}f(z)=\Gamma(\alpha)\,M_{N,\alpha}f(z)+\int_0^{v_*} e^{-v}\left\{g_N(v)-\frac{\omega_{N,\alpha}(v)}{v}\right\}f(ze^{-v})dv+$$

$$+\int_0^{s_*}\frac{\omega_{N,\alpha}(1-s)}{1-s}\,f(sz)\,ds-\int_{v_*}^{\infty} e^{-v}\,\frac{\omega_{N,\alpha}(v)}{v}f(ze^{-v})\,dv+\sum_{k=1}^{N}A_k\;M_{N-k,\alpha}f(z),$$

откуда непосредственно следует (31).

Доказательство теоремы 4. Так как $g_k(v)\sim\omega_{k,\alpha}(v)/v$ при $v\to 0$, то найдется такое $v_k>0$, что

$$\left|g_k(v)-\frac{\omega_{k,\alpha}(v)}{v}\right|\le g_k(v),\quad 0<v\le v_k.$$

Пусть v_* — минимальное из чисел v_k, $0\le k\le N$. В силу леммы 5 для $M_{k,\alpha}f(z)$ ($k=0,\dots,N$) справедливо разложение (31). Оценим операторы $K_k^1f(z)$, $K_k^2f(z)$ и $K_k^3f(z)$ в этом разложении.

В силу выбора v_* для $K_k^1f(z)$ получаем

$$\mathcal{N}_\varepsilon\left(K_k^1f\right)(\zeta)\le\mathcal{N}_\varepsilon\left\{\int_0^{v_*} e^{-v}g_k(v)\left|f(\cdot\,e^{-v})\right|dv\right\}(\zeta)\le$$

$$\leq \mathcal{N}_\varepsilon \left\{ \int_0^1 \frac{\omega_{k,\alpha}(1-s)}{1-s} \left| f(\cdot\, s) \right| ds \right\} (\zeta) \leq \mathcal{N}_\varepsilon \left(\mathcal{K}_{k,\alpha} |f| \right) (\zeta).$$

Для $K_k^2 f(z)$ справедливо неравенство

$$\left| K_k^2 f(z) \right| = \left| \int_0^{s_*} \frac{\omega_{k,\alpha}(1-s)}{1-s} f(sz) ds \right| \leq \sup_{0 \leq r \leq s_*} |f(rz)| \int_0^{s_*} \frac{\omega_{k,\alpha}(1-s)}{1-s} \, ds \leq c \, \|f\|_{H^p(B^n)} .$$

Аналогично оценим $K_k^3 f(z)$

$$\left| K_k^3 f(z) \right| \leq c \, \|f\|_{H^p(B^n)}$$

и, следовательно,

$$\left\| \mathcal{N}_\varepsilon \left(K_k^2 f + K_k^3 f \right) \right\|_{L^p_\nu(\partial B^n)} \leq c \, \|f\|_{H^p(B^n)} . \tag{33}$$

Далее при $0 \leq k \leq N$

$$\beta(t) \equiv \left[\varepsilon^{-1}(t) \right]^{n-\alpha p} \left[\ln \left(\frac{e}{\varepsilon^{-1}(t)} \right) \right]^{-Np} \leq \left[\varepsilon^{-1}(t) \right]^{n-\alpha p} \left[\ln \left(\frac{e}{\varepsilon^{-1}(t)} \right) \right]^{-kp} \equiv \beta^*(t),$$

поэтому $(\nu, \sigma) \in \mathbf{D}(\beta^*, n)$ и в силу (28) и теоремы 1 с $\omega = \omega_{N,\alpha}$ справедливо неравенство

$$\left\| \mathcal{N}_\varepsilon \left(\mathcal{K}_{k,\alpha} f \right) \right\|_{L^p_\nu(\partial B^n)} \leq c \, \|f\|_{H^p(B^n)} .$$

Таким образом,

$$\left\| \mathcal{N}_\varepsilon \left(\mathcal{K}_{k,\alpha} f + K_k^1 f \right) \right\|_{L^p_\nu(\partial B^n)} \leq c \, \|f\|_{H^p(B^n)} . \tag{34}$$

Теперь рассуждаем по индукции. При $N = 0$ тождество (31) принимает вид

$$M_{0,\alpha} f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \mathcal{K}_{0,\alpha} f(z) + K_0^1 f(z) + K_0^2 f(z) + K_0^3 f(z) \right\} ,$$

поэтому в силу (33) и (34)

$$\left\| \mathcal{N}_\varepsilon \left(M_{0,\alpha} f \right) \right\|_{L^p_\nu(\partial B^n)} \leq c \, \|f\|_{H^p(B^n)} . \tag{35}$$

Используя разложение (31) при $N = 1$, неравенства (33) и (34) при $k = 1$ и (35) получаем утверждение теоремы для $N = 1$, и так далее.

Список литературы

[1] Fatou P. Séries trigonométriques et séries de Taylor // Acta Math. 1906. V.30. P.335–400.

[2] Hardy G.H., Littlewood J.E. A maximal theorem with function-theoretic applications, Acta Math., 1930. V.54. P.81–116.

[3] Fefferman C., Stein E.M. H^p spaces of several variables // Acta Math. 1972. V.129, №3-4. P.137–193.

[4] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

[5] Рудин У. Теория функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.

[6] Александров А.Б. Теория функций в шаре // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.8 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). М.: ВИНИТИ, 1985. С.115–190.

[7] Nagel A., Rudin W., Shapiro J. Tangential boundary behavior of function in Dirichlet-type spaces // Ann. Math. 1982. V.116, №2. P.331–360.

[8] Nagel A, Stein E.M. On certain maximal functions and approach regions // Adv. in Math. 1984. V.54, №1. P.83–106.

[9] Ahern P., Nagel A. Strong L^p-estimates for maximal functions with respect to singular measure with applications to exceptional sets // Duke Math. J. 1986. V.53, №2. P.359–393.

[10] Кротов В.Г. О граничном поведении дробных интегралов голоморфных функций в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$ // Изв. вузов. Математика. 1988. №4. С.73–75.

[11] Кротов В.Г. Оценки для максимальных операторов, связанных с граничным поведением, и их приложения // Труды МИАН им.В.А.Стеклова. 1989. Т.190. С.117–138.

[12] Sueiro J. Tangential boundary limits and exceptional sets for harmonic function in Dirichlet-type spaces // Math. Ann. 1990. V.286, №4. P.661–678.

[13] Cifuentes P., Dorronsoro J., Sueiro J. Boundary tangential convergence in spaces of homogeneous type // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V.332, №1. P.331–350.

[14] Кротов В.Г. Точная оценка граничного поведения функций из классов Харди-Соболева в критическом случае // Матем. заметки. 1997. Т.62, №4, С.527–539.

[15] Катковская И.Н., Кротов В.Г. О касательном граничном поведении потенциалов // Труды Института математики НАН Беларуси. 2000. Т.5. С.80–83.

[16] Кротов В.Г. Касательное граничное поведение функций многих переменных // Мат. заметки. 2000. Т.68, №2. С.230–248.

[17] Седлецкий А.М. Касательные граничные значения преобразований Лапласа. Применение к аппроксимации типа Мюнца-Саса. // Известия РАН. Серия матем. 2003. V.67, №1. С.177–198.

[18] Coifman R.R., Weiss G. Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogenés // Lecture Notes in Math. 1971. V. 242. Springer-Verlag.

[19] Sjögren P. Une remarque sur la convergence des fonctions propres du Laplasian à valeur propre critique // Lect. Notes in Math. 1984. V. 1096. P.544–548.

[20] Rönning J.-O. Convergence results for the square root of the Poisson kernel // Math. Scand. 1997. V. 81. P.219–235.