Неравенство сильного типа для свертки с корнем квадратным из ядра Пуассона

И. Н. Катковская, В. Г. Кротов

1 Введение

Пусть
$$p(z,\theta)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-|z|^2}{|z-e^{i\theta}|^2}$$
— ядро Пуассона в единичном круге B комплексной плоскости.

Хорошо известно (см., например, [1]), что для любой функции $f\in L^1[-\pi,\pi]$ ее интеграл Пуассона
$$Pf(z)=\int_{-\pi}^{\pi}p(z,\theta)f(\theta)\,d\theta$$
для почти всех $\varphi\in[-\pi,\pi]$ сходится к $f(\varphi)$, когда z стремится к $e^{i\varphi}$, оставаясь в некасательной области [1]
$$\left\{z:|z-e^{i\varphi}|<a(1-|z|^2)\right\},\quad a>0. \tag{1}$$
Литтлвуд [2] (см. также [1]) показал, что это — наилучший результат в следующем смысле. Если C_0 — любая простая замкнутая кривая, проходящая через точку $z=1$, расположенная целиком, за исключением этой точки, внутри B и касающаяся границы B в этой точке, кривая C_θ получается из C_0 поворотом вокруг $z=0$ на угол θ, то существует произведение Бляшке, которое для почти всех θ не стремится ни к какому пределу, если $z\to e^{i\theta}$, оставаясь внутри C_θ.

В работе [4] было начато изучение граничного поведения сверток со степенями ядра Пуассона
$$P_lf(z)=\int_{-\pi}^{\pi}\left[p(z,\theta)\right]^{l+\frac{1}{2}}f(\theta)\,d\theta,\quad l\geq 0. \tag{2}$$

[1] В дальнейшем a означает произвольно фиксированную положительную постоянную, а через c (с индексами) мы обозначаем различные положительные постоянные, зависящие, возможно, от некоторых параметров, но эта зависимость для нас несущественна.

Интерес к ним объясняется тем, что $P_l(z,\cdot)$ (и $P_lf(z)$) является решением уравнения

$$\frac{1}{4}(1-|z|^2)^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\left(l^2-\frac{1}{4}\right)u$$

($\frac{1}{4}(1-|z|^2)^2\Delta u$ — лапласиан в гиперболической метрике). Конечно, сходимости $P_lf(z)$ трудно ожидать без нормировки.

Пусть

$$\mathcal{P}_lf(z)=\frac{P_lf(z)}{P_l1(z)} \tag{3}$$

Отметим, что[2]

$$P_l1(z)\asymp\begin{cases}(1-|z|)^{\frac{1}{2}-l}, & l>0,\\ \\ (1-|z|)^{\frac{1}{2}}\log\frac{2}{1-|z|}, & l=0.\end{cases} \tag{4}$$

(неважно по какому основанию берутся логарифмы, нам будет удобно всюду считать основание равным 2).

При $l>0$ граничное поведение интегралов $\mathcal{P}_lf(z)$ такое же, как и при $l=\frac{1}{2}$ (оно было описано выше). Иначе обстоит дело при $l=0$. В этом случае граничное поведение операторов (3) изучалось в работах [4]-[8], где было показано, что $\mathcal{P}_lf(z)$ сходится к $f(\varphi)$, когда z стремится к $e^{i\varphi}$, оставаясь внутри области

$$\left\{z\in\mathbb{C}:|z-e^{i\varphi}|<a(1-|z|)\left(\log\frac{2}{1-|z|}\right)^p\right\}. \tag{5}$$

для каждой функции $f\in L^p[-\pi,\pi]$ при почти всех $\varphi\in[-\pi,\pi]$. Случай $p=1$ рассмотрен в [4], а $p>1$ — в [6]–[7]. Отметим, что области (5) существенно шире некасательных областей (1) и допускают касательный подход к точке $e^{i\varphi}$, причем большему p соответствует большая степень касания.

Доказательство сходимости почти всюду в работах [4]–[7] опиралось на неравенство слабого типа

$$\mu\left\{\mathcal{L}_p\left(\mathcal{P}_0f\right)>\lambda\right\}\leq c\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^p_\mu(X)}\right)^p,\ \ \lambda>0, \tag{6}$$

для максимального оператора

$$\mathcal{L}_pf(e^{i\varphi})=\sup\left\{|f(z)|:|\arg z-\varphi|<a(1-|z|)\left(\log\frac{2}{1-|z|}\right)^p\right\},$$

соответствующего областям (5). Из (6) результаты о касательной сходимости почти всюду $\mathcal{P}_lf(z)$ выводятся стандартным способом. Кроме того, в [6]–[7] показано также, что области подхода к границе (5) выбраны оптимально и не могут быть расширены.

[2]Запись $f\asymp g$ означает, что существует постоянная $c>0$, такая, что $1/c\leq f/g\leq c$.

В нашей работе [9] неравенство (6) было распространено на пространства однородного типа.

Пусть X – компактное хаусдорфово пространство, топология которого задается квазиметрикой d. Это означает, что функция $d : X \times X \to [0, \infty)$ удовлетворяет условиям

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad d(x,y) = d(y,x), \quad d(x,y) \leq a_d[d(x,z) + d(z,y)] \tag{7}$$

для любых $x, y, z \in X$ (постоянная $a_d \geq 1$ не зависит от выбора элементов x, y, z в X) и семейство открытых шаров

$$B(x,t) = \{y \in X : d(x,y) < t\}$$

образует базу окрестностей топологии X. В дальнейшем для простоты будем считать, что $\mathrm{diam} X \leq 1$.

Пусть еще μ — положительная борелевская мера на X, удовлетворяющая условию однородности

$$\mu(B(x,t)) \asymp t^{\gamma} \tag{8}$$

порядка $\gamma > 0$ (постоянные слабой эквивалентности в (8) не зависят от $x \in X$ и $t \in (0, \mathrm{diam} X])$. Обычно тройка (X, d, μ) называется пространством однородного типа [3]. Через $L^p_\mu(X)$, $1 \leq p < \infty$, обозначаем обычные лебеговы пространства, построенные по мере μ.

В этой работе мы рассматриваем операторы

$$\mathcal{P}_0 f(x,t) = \left(\log \frac{2}{t}\right)^{-1} \int_X \frac{f(y)}{(d(x,y) + t)^{\gamma}} \, d\mu(y). \tag{9}$$

В частном случае $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, d — евклидова метрика и μ — мера Лебега (тогда $\gamma = 1$) эти операторы совпадают, по существу, с (3) при $l = 0$ (см. (4) и ниже раздел 3). Для нас эти операторы представляют интерес как предельный случай $\alpha = 0$ операторов типа потенциала на пространствах однородного типа

$$\int_X \frac{f(y)}{(d(x,y) + t)^{\gamma - \alpha}} \, d\mu(y), \quad 0 < \alpha < \gamma,$$

граничное поведение которых рассматривались в нашей работе [9].

Введем максимальные функции

$$\mathcal{L}_\delta u(x) = \sup \left\{ |u(y,t)| : \, d(x,y) < at \left(\log \frac{2}{t}\right)^{\delta} \right\}, \quad a > 0, x \in X, \tag{10}$$

зависящие от параметра $\delta \geq 0$. При $\delta = 0$ будем обозначать $\mathcal{L}_0 = N$ (это — "некасательная" максимальная функция).

В частности, в [9] неравенство слабого типа (6) было распространено на общий случай пространств однородного типа

$$\mu\left\{\mathcal{L}_\delta\left(\mathcal{P}_0 f\right) > \lambda\right\} \le c\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^p_\mu(X)}\right)^p, \quad \lambda > 0,$$

где $\delta = p/\gamma$. При этом в [9] использовался метод, отличный от применявшегося в [4]-[7].

Из теоремы 1 в [9] также можно вывести точные результаты о граничном поведении операторов (3) при $l < 0$.

2 Основная теорема и ее доказательство

Главной целью настоящей работы является доказательство того, что для $p > 1$ на самом деле справедливо большее — неравенство (6) можно усилить и заменить неравенством сильного типа, причем в общей ситуации. Именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 1 *Если $p > 1$ и $\delta = p/\gamma$, то*

$$\|\mathcal{L}_\delta\left(\mathcal{P}_0 f\right)\|_{L^p_\mu(X)} \le c_p \|f\|_{L^p_\mu(X)},$$

где постоянная c_p не зависит от $f \in L^p_\mu(X)$.

В дальнейшем для простоты считаем, что в (10) $a = 1$. Для доказательства нам понадобится ряд вспомогательных фактов. Начнем с хорошо известных.

Лемма 1 *Пусть $E \subset X$ и $\{B\}$ — любое семейство шаров ограниченных радиусов, покрывающее E.*

Тогда существует конечное или счетное подсемейство $\{B_j\} \subset \{B\}$ со свойствами

$$B_i \cap B_j = \varnothing\,(i \ne j), \quad E \subset \bigcup_j \rho_d B_j, \tag{11}$$

где $\rho_d \ge 1$ зависит только от d.

Здесь ρB – шар с тем же центром, что и B, радиуса в ρ раз больше. Доказательство леммы имеется в [3].

С помощью леммы 1 стандартным способом [3] выводятся обычные свойства максимальной функции Харди-Литтлвуда

$$Mf(x) = \sup \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f|\, d\mu,$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B = B(y,t)$, содержащим точку $x \in X$.

Лемма 2 *Для каждого $p \geq 1$ существует такая постоянная c_p, что*
1) для всех функций $f \in L^1_\mu(X)$ и $\lambda > 0$

$$\mu\left\{Mf > \lambda\right\} \leq \frac{c_1}{\lambda}\|f\|_{L^1_\mu(X)},$$

2) для всех функций $f \in L^p_\mu(X)$

$$\|Mf\|_{L^p_\mu(X)} \leq c_p\|f\|_{L^p_\mu(X)}.$$

Введем параметрическое семейство областей подхода к границе

$$D_{A,\delta}(x) = \left\{(y,t) : d(x,y) < t\left(\log\frac{2}{t}\right)^\delta,\ A < \left(\log\frac{2}{t}\right)^\delta\right\} \tag{12}$$

и отметим, что второе неравенство, определяющее $D_{A,\delta}(x)$, равносильно такому

$$t < \exp\left(1 - A^{1/\delta}\right) = \tau_A. \tag{13}$$

Определим также семейство максимальных функций

$$\mathcal{L}_{A,\delta}u(x) = \sup\left\{\left(\log\frac{2}{t}\right)^{-1} u(y, At) : (y,t) \in D_{A,\delta}(x)\right\}, \tag{14}$$

с помощью которых можно оценить оператор $\mathcal{L}_\delta\left(\mathcal{P}_0 f\right)$. Это показывает лемма 3 ниже, в которой используется следующее обозначение

$$u(y,t) = \frac{1}{\mu(B(y,t))}\int_{B(y,t)}|f|\,d\mu.$$

где $f \in L^1_\mu(X)$. Тогда ясно, что

$$Nu(x) = Mf(x),\ \ x \in X. \tag{15}$$

Лемма 3 *Существует такая постоянная c, что*

$$\mathcal{L}_\delta\left(\mathcal{P}_0 f\right)(x) \leq c\left(Mf(x) + \sum_{\nu=0}^{\infty}\mathcal{L}_{2^\nu,\delta}u(x)\right).$$

для всех $x \in X$ и $f \in L^1_\mu(X)$.

Доказательство. Пусть $x \in X$ и пара $(y,t) \in X \times (0,1)$ удовлетворяет условию

$$d(x,y) < \tau = t \left(\log \frac{2}{t} \right)^{\delta}.$$

Разобьем интеграл, определяющий оператор (9), на три части

$$\int_X \frac{f(z)}{(d(y,z)+t)^{\gamma}} \, d\mu(z) = \int_{B(y,t)} + \int_{t<d(x,y)\le\tau} + \int_{d(x,y)>\tau} \equiv I_1 + I_2 + I_3$$

и каждую из них будем оценивать отдельно.

Прежде всего заметим, что

$$|I_1| \le u(y,t).$$

Кроме того, если $n = \left[\log_2 \frac{\tau}{t}\right] + 2$, то

$$|I_2| \le \sum_{\nu=0}^{n-1} \int\limits_{2^{\nu}t<d(y,z)\le 2^{\nu+1}t} \frac{f(z)}{(d(y,z)+t)^{\gamma}} \, d\mu(z) \le \sum_{\nu=0}^{n-1} (2^{\nu}t)^{\gamma} \int_{B(y,2^{\nu+1}t)} |f| \, d\mu \le$$

$$\le c \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{1}{\mu B(y,2^{\nu+1}t)} \int_{B(y,2^{\nu+1}t)} |f| \, d\mu \le c \sum_{\nu=1}^{n} u(y,2^{\nu}t).$$

Наконец, если $m = \left[\log_2 \frac{1}{\tau}\right] + 2$, то

$$|I_3| \le \sum_{\nu=0}^{m-1} \int\limits_{2^{\nu}\tau<d(y,z)\le 2^{\nu+1}\tau} \frac{f(z)}{(d(y,z)+t)^{\gamma}} \, d\mu(z) \le \sum_{\nu=0}^{m-1} (2^{\nu}\tau)^{\gamma} \int_{B(y,2^{\nu+1}\tau)} |f| \, d\mu \le$$

$$\le c \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{1}{\mu B(y,2^{\nu+1}\tau)} \int_{B(y,2^{\nu+1}\tau)} |f| \, d\mu \le cmMf(x) \le c \log \frac{1}{\tau} Mf(x).$$

Из полученных неравенств для I_1, I_2 и I_3 легко вытекает утверждение леммы 3.

Следующая лемма играет ключевую роль. При ее доказательстве мы будем следовать схеме рассуждений из работы второго автора [10], видоизменяя ее соответственно рассматриваемой ситуации.

Лемма 4 (основная) *Для каждого $p > 1$ существует такая постоянная c_p, что*

$$\|\mathfrak{L}_{A,\delta} u\|_{L^p_{\mu}(X)} \le c_p A^{-\frac{\gamma}{p}} \|f\|_{L^p_{\mu}(X)} \tag{16}$$

при всех $f \in L^p_{\mu}(X)$ и $A \ge 1$.

Доказательство. Рассмотрим лебеговы множества максимального оператора (14)

$$E_A(\lambda) = \{x \in X : \mathfrak{L}_{A,\delta}u(x) > \lambda\}, \quad \lambda > 0.$$

Разобьем их на части следующим образом. Определим натуральное число k_A из условия $2^{-k_A-1} < \tau_A \le 2^{-k_A}$, обозначим

$$t_A(x) = \sup\left\{t < \tau_A : \exists\,(y,t) \in D_{A,\delta}(x),\ \left(\log\frac{2}{t}\right)^{-1} u(y, At) > \lambda\right\}$$

и для $k \ge k_A$ введем множества

$$E_{A,k}(\lambda) = \left\{x \in E_A(\lambda) : t_A(x) \in \left(2^{-k-1}, 2^{-k}\right]\right\}.$$

Они измеримы и

$$E_{A,k}(\lambda) \cap E_{A,i}(\lambda) = \varnothing, \quad E_A(\lambda) = \bigcup_{k=k_A}^{\infty} E_{A,k}(\lambda).$$

Введем также некоторую модификацию некасательной максимальной функции

$$N_A u(x) = \sup\left\{u(y, A\tau) : d(x,y) < \frac{A\tau}{4a_d^2},\ \tau < \tau_A\right\}$$

Тогда ясно, что

$$N_A(x) \le N(x), \quad x \in X. \tag{17}$$

Как и выше введем лебеговы множества

$$E(\lambda) = \{x \in X : N_A u(x) > \lambda\},$$

и разобьем их на части

$$E_k(\lambda) = \left\{x \in E(\lambda) : \tau(x) \in \left(2^{-k-1}, 2^{-k}\right]\right\},$$

где

$$\tau(x) = \sup\left\{\tau < \tau_A : \exists\, y\ \ d(x,y) < \frac{A\tau}{4a_d^2},\ u(y, A\tau) > \lambda\right\}.$$

Тогда множества $E_k(\lambda)$ измеримы и

$$E_k(\lambda) \cap E_i(\lambda) = \varnothing, \quad E(\lambda) = \bigcup_{k=k_A}^{\infty} E_k(\lambda).$$

Оценим меру $\mu E_{A,k}(\lambda)$. Пусть $x \in E_{A,k}(\lambda)$, тогда существует такая пара $(y_x, t_x) \in X \times \left(2^{-k-1}, 2^{-k}\right]$, что

$$d(x, y_x) < t_x \left(\log \frac{2}{t_x}\right)^{\delta}, \;\; u(y_x, At_x) > \lambda \log \frac{2}{t_x} \geq k\lambda. \tag{18}$$

Рассмотрим семейство шаров

$$B_x = B\left(y_x, t_x \left(\log \frac{2}{t_x}\right)^{\delta}\right), \;\; x \in E_{A,k}(\lambda).$$

По лемме 1 из него можно выделить конечное или счетное подсемейство $\{B_{x_j}\}$ со свойствами

$$B_{x_j} \cap B_{x_i} = \varnothing, \;\; \mu E_{A,k}(\lambda) \leq c \sum_j \mu B_{x_j}.$$

Введем новое семейство шаров

$$B^*_{x_j} = B(y_{x_j}, At_{x_j}) \;\; (j \geq 1).$$

Пусть

$$\varphi(t) = t \left(\log \frac{2}{t}\right)^{\delta},$$

тогда, как легко видеть, существует такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что

$$\varphi(t) < \frac{\varphi(\tau)}{4a_d^2} \;\text{ при }\; 2^{k_0} t < \tau. \tag{19}$$

(см. (7)).

Покажем, что справедливы включения

$$B^*_{x_j} \subset \bigcup_{i=k-k_0}^{k} E_i(k\lambda), \;\; k \geq k_0 + k_A. \tag{20}$$

Пусть $x \in B^*_{x_j}$ и пара (z, τ) такова, что

$$d(x, z) < \frac{A\tau}{2a_d^2}, \;\; 2^{k_0 - k} < \tau < \tau_A.$$

Тогда в силу (7), (13), (18) и (19)

$$d(x_j, z) \leq a_d^2 \left[d(x_j, y_j) + d(y_j, x) + d(x, z)\right] \leq$$

$$\leq a_d^2 \left[t_{x_j} \left(\log \frac{2}{t_{x_j}} \right)^{\delta} + At_{x_j} + \frac{A\tau}{2a_d^2} \right] < \tau \left(\log \frac{2}{\tau} \right)^{\delta}.$$

Следовательно, $(z, \tau) \in D_{A,\delta}(x_j)$ (см. (12)), но $x_j \in E_{A,k}(\lambda)$ и $2^{k_0-k} < \tau < \tau_A$, поэтому

$$u(z, A\tau) \leq \lambda \log \frac{2}{\tau} < \lambda \log 2^{k-k_0+1} < k\lambda$$

Это означает, что $x \notin E_i(k\lambda)$ при $i < k - k_0$.

С другой стороны, так как $t_{x_j} > 2^{-k-1}$, $d(x, y_j) < At_{x_j}$, то из второго неравенства (18) вытекает, что $x \notin E_i(k\lambda)$ при $i > k$. Таким образом, включение (20) доказано.

Теперь, используя (20), получаем при $k \geq k_0 + k_A$

$$\mu E_{A,k}(\lambda) \leq c \sum_j \mu B_{x_j} = c \sum_j \frac{\mu B_{x_j}}{\mu B^*_{x_j}} \cdot \mu B^*_{x_j} = ck^p A^{-\gamma} \sum_j \mu B^*_{x_j} =$$

$$= ck^p A^{-\gamma} \mu \left(\bigcup_j B^*_{x_j} \right) \leq ck^p A^{-\gamma} \mu \left(\bigcup_{i=k-k_0}^{k} E_i(k\lambda) \right). \tag{21}$$

Подобным образом, но с существенными упрощениями, доказывается и неравенство

$$\mu \left(\bigcup_{k=k_A}^{k_A+k_0-1} E_{A,k}(\lambda) \right) \leq ck_A^p A^{-\gamma} \mu \left(\bigcup_{i=k_A}^{k_A+k_0-1} E_i(k\lambda) \right) \tag{22}$$

В самом деле, пусть для краткости

$$S_A(\lambda) = \bigcup_{k=k_A}^{k_A+k_0-1} E_{A,k}(\lambda)$$

и $x \in S_A(\lambda)$, тогда существует такая пара $(y_x, t_x) \in X \times \left(2^{-k_A-k_0}, \tau_A\right]$, что

$$d(x, y_x) < t_x \left(\log \frac{2}{t_x} \right)^{\delta}, \;\; u(y_x, At_x) > \lambda \log \frac{2}{t_x} \geq k\lambda. \tag{23}$$

Как и выше рассмотрим семейство шаров

$$B_x = B\left(y_x, t_x \left(\log \frac{2}{t_x} \right)^{\delta} \right), \;\; x \in E_{A,k}(\lambda).$$

По лемме 1 из него можно выделить конечное или счетное подсемейство $\{B_{x_j}\}$ со свойствами

$$B_{x_j} \cap B_{x_i} = \varnothing, \;\; \mu S_A(\lambda) \leq c \sum_j \mu B_{x_j}.$$

Введем новое семейство шаров

$$B^*_{x_j} = B(y_{x_j}, At_{x_j}), \ \ j \geq 1,$$

тогда в силу (23)

$$B^*_{x_j} \subset \bigcup_{k=k_A}^{k_A+k_0-1} E_k(\lambda).$$

Повторяя доказательство неравенства (21), получим (22).

Из (21) и (22) нетрудно вывести оценку для нормы

$$\|\mathcal{L}_{A,\delta}u\|^p_{L^p_\mu(X)} = p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu E_A(\lambda)\,d\lambda = p\sum_{k=k_A}^\infty \int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu E_{A,k}(\lambda)\,d\lambda \leq$$

$$\leq c\sum_{k=k_A}^\infty k^p A^{-\gamma} \sum_{i=k-k_0}^{k} \int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu E_i(k\lambda)\,d\lambda.$$

Заменяя в последнем интеграле $k\lambda$ на новое λ, получим (см. еще (17) и (15) и лемму 2)

$$\|\mathcal{L}_{A,\delta}u\|^p_{L^p_\mu(X)} \leq cA^{-\gamma}\sum_{k=k_A}^\infty \int_0^\infty \lambda^{p-1}\sum_{i=k-k_0}^{k}\mu E_i(\lambda)\,d\lambda \leq cA^{-\gamma}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\sum_{i=0}^\infty \mu E_i(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= cA^{-\gamma}\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu E(\lambda)\,d\lambda = cA^{-\gamma}\|N_A u\|^p_{L^p_\mu(X)} = cA^{-\gamma}\|Mf\|^p_{L^p_\mu(X)} \leq cA^{-\gamma}\|f\|^p_{L^p_\mu(X)}.$$

и лемма 4 доказана.

Утверждение теоремы 1 вытекает теперь непосредственно из лемм 2-4.

3 Некоторые обобщения и частные случаи

3.1 Локальная форма теоремы 1.

Прежде всего отметим, что доказательство теоремы 1 носит локальный характер. Это позволяет доказать следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2 *Пусть $G \subset X$ — открытое множество и $p > 1$. Тогда для любого компакта $K \subset G$ существует такая постоянная $c_p(K)$, что для $f \in L^1_\mu(X) \cap L^p_\mu(G)$ выполнено неравенство*

$$\|\mathcal{L}_\delta\left(\mathcal{P}_0 f\right)\|_{L^p_\mu(K)} \leq c_p(K)\left(\|f\|_{L^1_\mu(X)} + \|f\|_{L^p_\mu(G)}\right).$$

Доказательство в значительной степени повторяет рассуждения, проведенные выше. Поэтому мы остановимся кратко лишь на изменениях, которые надо сделать.

Пусть число $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Разобьем оператор (9) на две части

$$\mathcal{P}_0 f(x,t) = \int_{B(x,\varepsilon)} \frac{f(y)}{(d(x,y)+t)^\gamma}\, d\mu(y) + \int_{X\setminus B(x,\varepsilon)} \frac{f(y)}{(d(x,y)+t)^\gamma}\, d\mu(y).$$

Второе слагаемое оценивается сверху через $c\|f\|_{L^1_\mu(X)}$ равномерно по x и t, а первое оценивается точно так же, как и выше (см. леммы 3 и 4), только вместо максимальной функции Харди-Литтлвуда Mf будет участвовать усеченная максимальная функция

$$M_\varepsilon f(x) = \sup \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f|\, d\mu,$$

где точная верхняя грань берется по всем шарам $B = B(y,t)$ радиуса $0 < t < \varepsilon$, содержащим точку $x \in X$.

3.2 Весовая форма теоремы 1.

Используя то же доказательство, можно получить весовой вариант теоремы 1. Для формулировки нам понадобятся некоторые определения.

Неотрицательная функция ν, определенная на борелевских множествах из X, называется внешней мерой, если она монотонна и субаддитивна, то есть

$$G_1 \subset G_2 \;\Rightarrow\; \nu(G_1) \le \nu(G_2), \;\; \nu\left(\bigcup_j G_j\right) \le \sum_j \nu(G_j).$$

Если f — борелевская функция и ν — внешняя мера на X, то положим

$$\|f\|_{L^p_\nu(X)} = \left(p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu\{|f| > \lambda\}\, d\lambda\right)^{1/p}.$$

Для меры ν это — обычная норма в $L^p_\nu(X)$.

Теорема 3 *Пусть $p > 1$, $0 \le \delta \le p/\gamma$, $\beta = p - \gamma\delta$ и ν — внешняя мера, удовлетворяющая условию*

$$\nu(B(x,t)) \le ct^\gamma \left(\log \frac{2}{t}\right)^\beta \tag{24}$$

(c не зависит от $x \in X$ и $t > 0$).

Тогда

$$\|\mathcal{L}_\delta\left(\mathcal{P}_0 f\right)\|_{L^p_\nu(X)} \le c_p \|f\|_{L^p_\mu(X)},$$

где постоянная c_p не зависит от $f \in L^p_\mu(X)$.

Доказательство слово в слово копирует обоснование теоремы 1, лишь в момент оценки отношения мер νB_{x_j} и $\mu B^*_{x_j}$ в (21) и (22) надо дополнительно использовать (24). Тогда мы получим

$$\frac{\nu B_{x_j}}{\mu B^*_{x_j}} \le \frac{ct_j^\gamma \left(\log \frac{2}{t_j}\right)^{\gamma\delta} \left(\log \frac{2}{t_j\left(\log \frac{2}{t_j}\right)^\delta}\right)^\beta}{(At_j)^\gamma} \le \frac{c\left(\log \frac{2}{t_j}\right)^{\gamma\delta+\beta}}{A^\gamma} \le ck^{\gamma\delta+\beta}A^{-\gamma} = ck^p A^{-\gamma}.$$

Оставшаяся часть доказательства проходит без изменения.

Теорема 1 является частным случаем $\beta = 0$ теоремы 3. Последней также можно придать локальный характер в духе теоремы 2.

3.3 Многомерные аналоги оператора (3).

Рассмотрим, наконец, два частных случая оператора (9), каждый из которых обобщает оператор (3) с $\lambda = 0$ на многомерный случай. К ним применимы теоремы 1-3.

Пусть $X = S^{n-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, μ — поверхностная мера Лебега на S^{n-1}, нормированная условием $\mu(S^{n-1}) = 1$, $d(x,y) = |x-y|$ — евклидова метрика. Тогда в условии (8) $\gamma = n-1$.

Многомерным аналогом (2) будет оператор

$$P_l f(x) = \int_{S^{n-1}} [p(x,\theta)]^{l+\frac{n-1}{n}} f(\theta)\, d\mu(\theta),$$

где

$$p(x,\theta) = \frac{1-|x|^2}{|x-\theta|^n}.$$

— ядро Пуассона для единичного шара (см, например, [11]). При выбранных обозначениях (9) имеет вид

$$\mathcal{P}_0 f(x) = \left(\log \frac{2}{1-|x|}\right)^{-1} \int\limits_{S^{n-1}} \frac{f(\eta)}{|x-\eta|^{n-1}}\, d\mu(\eta) \asymp \left(\log \frac{2}{t}\right)^{-1} \int\limits_{S^{n-1}} \frac{f(\eta)}{(|\theta-\eta|+t)^{n-1}}\, d\mu(\eta),$$

где $t = 1-|x|$, $\theta = x/|x|$.

Пусть $X = S^{2n-1}$ — единичная сфера в $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, μ — поверхностная мера Лебега, $\mu(S^{n-1}) = 1$, $d(\zeta,\xi) = |1-\langle\zeta,\xi\rangle|$ — неизотропная квазиметрика ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ — комплексное скалярное произведение). В этом случае $\gamma = n$.

Сейчас естественным является также инвариантное ядро Пуассона [12]

$$P_n(z,\zeta) = \frac{(1-|z|^2)^n}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{2n}}$$

и по аналогии с (2) мы приходим к

$$P_l f(z) = \int_{S^{2n-1}} [p(z,\eta)]^{l+\frac{1}{2}} f(\eta)\, d\mu(\eta).$$

Оператор (9) принимает вид

$$\mathcal{P}_0 f(z) = \left(\log \frac{2}{1-|z|}\right)^{-1} \int\limits_{S^{2n-1}} \frac{f(\eta)}{|1-\langle z,\eta\rangle|^n}\, d\mu(\eta) \asymp$$

$$\asymp \left(\log \frac{2}{t}\right)^{-1} \int\limits_{S^{2n-1}} \frac{f(\eta)}{(|1-\langle \zeta,\eta\rangle| + t)^n}\, d\mu(\eta),$$

где $t = 1-|z|$, $\zeta = z/|z|$.

В заключение отметим, что возможны и другие приложения теорем 1-3. Примерами могут быть граничное поведение интегралов Пуассона в поликруге или на симметрических римановых пространствах (см. [5]–[7]).

Список литературы

[1] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.1. М.: Мир, 1965.

[2] Littlewood J.E. On a theorem of Fatou // J. London Math. Soc. 1927. V. 2. P. 172-176.

[3] Coifman R.R., Weiss G. Extensions of Hardy spaces and their use in analysis // Bull.Amer.Math.Soc. 1977, V. 83, N 4, P. 569–645.

[4] Sjögren P. Une remarque sur la convergence des fonctions propres du Laplasian à valeur propre critique // Lect. Notes in Math. 1984. V. 1096. P. 544-548.

[5] Sjögren P. Convergence results for the square root of the Poisson kernel // Pacific J. Math. 1988. V. 131. P. 361-391.

[6] Rönning J.-O. Convergence results for the square root of the Poisson kernel. // PhD Thesis. — Chalmers Univ. of Tehnology of Göteborg, 1993.

[7] Rönning J.-O. Convergence results for the square root of the Poisson kernel // Math. Scand. 1997. V. 81. P. 219-235.

[8] Sjögren P. Approach regions for the square root of the Poisson kernel and bounded functions // Bull. Austral. Math. Soc. 1997. V. 55. P. 521-527.

[9] Катковская И.Н., Кротов В.Г. О касательном граничном поведении потенциалов // Труды Института математики НАН Беларуси. 2000. Т. 5. С. 80–83.

[10] Кротов В.Г. Оценки для максимальных операторов, связанных с граничным поведением, и их приложения // Труды МИАН им.В.А.Стеклова. 1989. Т.190. С.117–138.

[11] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

[12] Рудин У. Теория функций в единичном шаре в $\mathbf{C}^n$. М.: Мир, 1984.

Кротов Вениамин Григорьевич
доктор физико-математических наук, профессор
Белорусский государственный университет, кафедра математических методов теории управления
220134, Минск, Беларусь, ул.Якубовского, 24/1, кв.126
телефон (8-10-375-17) 258-77-77
e-mail: krotov@bsu.by
Катковская Ирина Николаевна
кандидат физико-математических наук, доцент
Белорусский государственный технический университет, кафедра высшей математики
220134, Минск, Беларусь, ул.Якубовского, 24/1, кв.126
телефон (8-10-375-17) 258-77-77
e-mail: krotov@bsu.by

И. Н. Катковская, В. Г. Кротов

Неравенство сильного типа для свертки с корнем квадратным из ядра Пуассона

Аннотация

Граничное поведение сверток с ядром Пуассона и с корнем квадратным из ядра Пуассона существенно различно. Первые имеют лишь некасательный предел. Для последних имеет место сходимость по областям, допускающих логарифмический порядок касания с границей (P.Sjögren, J.-O.Rönning). Этот результат был обобщен авторами на пространства однородного типа.

Здесь мы доказываем ограниченность в L^p, $p > 1$, и некоторые весовые оценки для соответствующего максимального оператора. Ранее было известно лишь неравенство слабого типа.

Ключевые слова: *ядро Пуассона, касательная сходимость, пространства однородного типа.*

I. N. Katkovskaya, V. G. Krotov

The strong type inequality for convolution with the square root from Poisson kernel

Аннотация

The boundary behaviour of convolutions with Poisson kernel and with square root from Poisson kernel is essentially differs. The first ones have only nontangential limit. For the last ones the convergence is over domains admittings a logarithmic order of the contact with the boundary (P.Sjögren, J.-O.Rönning). This result was generalized by authors on the spaces of homogeneous type.

Here we prove the boundedness in L^p, $p > 1$, and some weighted estimates for the corresponding maximal operator. Earlier it was known only weak type inequality.

Key words: *Poisson kernel, boundary behaviour, tangential convergence.*