УДК 512.543.76

В. В. Беняш-Кривец

О разложении свободного произведения циклических групп с одним соотношением в амальгамированное свободное произведение

Данная работа посвящена изучению проблемы разложения свободного произведения циклических групп с одним соотношением в нетривиальное амальгамированное свободное произведение. Доказаны две теоремы, из которых отметим следующую.

Пусть $G = \langle a, b \mid a^{2n} = R^m(a,b) = 1\rangle$, *где* $n \geqslant 0$, $m \geqslant 2$, $R(a,b)$ – *циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной* a *и* b, *которое содержит* b. *Тогда* G *является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.*

В качестве следствия этой теоремы получаем доказательство гипотезы Файна, Левина и Розенбергера о том, что любая группа с двумя образующими и одним соотношением с кручением является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

Библиография: 13 названий.

Введение

Свободным произведением семейства групп $\{G_i\}$, $i \in I$, с одним соотношением называется группа $G = (*G_i)/N(S)$, где S – циклически редуцированное слово в свободном произведении $*G_i$, $N(S)$ – его нормальное замыкание; S называется *соотношением*. Свободные произведения с одним соотношением имеют много общих свойств с группами с одним соотношением [1]. Мы рассматриваем случай, когда G_i является циклической группой и соотношение является собственной степенью, т.е. $S = R^m$, где R – циклически редуцированное слово в $*G_i$ и $m \geqslant 2$.

Определение 1. Группа G, имеющая копредставление

$$G = \langle a_1, \dots, a_n \mid a_1^{l_1} = \dots = a_n^{l_n} = R^m(a_1, \dots, a_n) = 1\rangle,$$

где $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$, $l_i = 0$ или $l_i \geqslant 2$ для всех i, $R(a_1, \dots, a_n)$ – циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной $a_1, \dots, a_n$, называется *свободным произведением* n *циклических групп с одним соотношением* (*one relator product of cyclics* в англоязычной литературе).

Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики НАН Беларуси в рамках государственной программы фундаментальных исследований “Математические структуры”.

В данной работе рассматривается проблема разложения свободных произведений циклических групп с одним соотношением в нетривиальное амальгамированное свободное произведение. Первый общий результат о разложении таких групп был получен в [2]. Теорема 3 из [2] утверждает, что если G является свободным произведением с одним соотношением n циклических групп, $n \geqslant 3$, то G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

Случай свободного произведения двух циклических групп с одним соотношением, т.е. групп вида

$$G = \langle a, b \mid a^m = b^n = R^l(a, b) = 1 \rangle,$$

где $l \geqslant 2$, $R(a, b)$ – циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной a и b, является значительно более сложным. Группы такого вида называют *обобщенными треугольными группами.* Эти группы иногда допускают разложение в нетривиальное амальгамированное свободное произведение, а иногда нет. Например, известно (см. [3]), что обычные треугольные группы

$$T(m, n, p) = \langle a, b \mid a^m = b^n = (ab)^p = 1 \rangle,$$

где $m, n, p \geqslant 2$, неразложимы в нетривиальное амальгамированное свободное произведение. В [3] Цишанг исследовал проблему разложения в амальгамированное свободное произведение для плоских разрывных групп. Он дал полный ответ, когда такая группа является нетривиальным амальгамированным свободным произведением, за исключением групп $H_1 = \langle a, b \mid [a, b]^n = 1 \rangle$ и $H_2 = \langle c, d \mid c^2 = [c, d]^n = 1 \rangle$, $n \geqslant 2$. Розенбергер [4] доказал, что группы H_1 и H_2 являются нетривиальным амальгамированным свободным произведением в случае, когда n не является степенью 2. В недавних работах [5], [6] этот факт доказан для произвольного n. Отметим, что этот результат является также непосредственным следствием теоремы 1. Следующая гипотеза высказана в [2]:

Гипотеза 1. *Произвольная группа с двумя образующими и одним соотношением с кручением является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.*

Отметим, что если группа G имеет более двух образующих, то утверждение гипотезы 1 справедливо в силу упоминавшейся выше теоремы 3 из [2]. Кроме того, в [2] эта гипотеза доказана в случае, когда группа G имеет копредставление $G = \langle a, b \mid R^m(a, b) = 1 \rangle$, где $m \geqslant 2$ и $R(a, b)$ – циклически редуцированное слово, не лежащее в коммутанте свободной группы, порожденной a и b.

В предлагаемой работе доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть $G = \langle a, b \mid a^{2n} = R^m(a, b) = 1 \rangle$, где $n \geqslant 0$, $m \geqslant 2$, $R(a, b)$ – циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной a и b, которое содержит b. Тогда G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.*

Теорема 2. *Пусть $G = \langle a, b \mid a^n = R^m(a, b) = 1 \rangle$, где $n = 0$ или $n \geqslant 2$, $m \geqslant 3$ и $R(a, b)$ – циклически редуцированное слово в свободной группе с образующими a и b, содержащее b. Если $R(a, b) = a^{u_1} b^{v_1} \cdots a^{u_s} b^{v_s}$, где $0 < u_i < n$, $v_i \neq 0$ для $i = 1, \ldots, s$ и $\prod_{i=1}^{s} |v_i| \geqslant 3$, то G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.*

Следствие 1. *Пусть G – группа с двумя образующими и одним соотношением с кручением. Тогда G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.*

Доказательство следствия 1. Хорошо известно, (см., например, [7]), что если G – конечно порожденная группа с одним соотношением с кручением, то G имеет копредставление вида $G = \langle a_1, \dots, a_n \mid R^m(a_1, \dots, a_n) = 1\rangle$, где $m \geqslant 2$, $R(a_1, \dots, a_n)$ – циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной $a_1, \dots, a_n$. В нашем случае $G = \langle a, b \mid R^m(a, b) = 1\rangle$ и согласно теореме 2 G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

Следствие 2. *Группы $H_1 = \langle a, b \mid [a, b]^n = 1\rangle$ и $H_2 = \langle c, d \mid c^2 = [c, d]^n = 1\rangle$ являются нетривиальным амальгамированным свободным произведением для любого $n \geqslant 2$.*

§ 1. Некоторые вспомогательные результаты

Здесь мы докажем ряд вспомогательных утверждений. Далее через E мы будем обозначать единичную матрицу в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, $\mathcal{O}$ – кольцо целых алгебраических чисел в $\mathbb{C}$, $F_2 = \langle g, h\rangle$ – свободную группу ранга 2 с образующими g и h, $\operatorname{tr} X$ – след матрицы X. Следующий результат Басса [8] играет ключевую роль в доказательстве теорем 1 и 2.

Предложение 1 (см. [8]). *Пусть H – конечно порожденная подгруппа $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

1) *существует эпиморфизм $f\colon H \to \mathbb{Z}$ такой, что $f(u) = 0$ для всех унипотентных элементов $u \in H$;*
2) *H сопряжена подгруппе группы треугольных матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где a и c – корни из единицы;*
3) *H сопряжена подгруппе группы $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O})$;*
4) *H является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.*

Следующее наблюдение полезно для построения матриц конечного порядка в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$.

Лемма 1. *Пусть $m > 1$ и $X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Если $\operatorname{tr} X = \pm 2\cos(r\pi/m)$, где $r \in \{1, \dots, m-1\}$, то $X^{2m} = E$. В частности, если $\operatorname{tr} X = 0$, то $X^2 = -E$.*

Доказательство. Пусть, например, $\operatorname{tr} X = 2\cos(r\pi/m)$. Тогда характеристический многочлен матрицы X имеет корни $\alpha = \cos(r\pi/m) + i\sin(r\pi/m)$ и $\alpha^{-1} = \cos(r\pi/m) - i\sin(r\pi/m)$, где α является корнем степени $2m$ из 1. Таким образом, X сопряжена матрице $X_1 = \operatorname{diag}(\alpha, \alpha^{-1})$, следовательно, $X^{2m} = E$.

Далее нам потребуются так называемые “характеры Фрике” (см. [9]–[11]). Для произвольного элемента $w = w(g, h) \in F_2$ рассмотрим следующую регулярную функцию:

$$\tau_w\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \qquad \tau_w(A, B) = \operatorname{tr}(w(A, B)).$$

В [9] доказано (см. также [12]), что для произвольного $w \in F_2$

$$\tau_w = Q_w(\tau_g, \tau_h, \tau_{gh}),$$

где $Q_w \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ – многочлен с целыми коэффициентами. Функцию τ_w обычно называют *характером Фрике*, а многочлен Q_w – *многочленом Фрике* элемента $w \in F_2$. Пусть u, v – произвольные элементы F_2. Следующие соотношения между характерами Фрике следуют из соотношений между следами произвольных матриц в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ и могут быть легко проверены:

$$1)\ \ \tau_{u^{-1}} = \tau_u;\quad 2)\ \ \tau_{uv} = \tau_{vu};\quad 3)\ \ \tau_{vuv^{-1}} = \tau_u;\quad 4)\ \ \tau_{uv} = \tau_u \tau_v - \tau_{uv^{-1}}. \tag{1}$$

Следующее утверждение достаточно хорошо известно и его легко доказать непосредственным вычислением, хотя трудно указать точную ссылку.

Лемма 2. *Для произвольных $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ существуют такие матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, что*

$$\tau_g(A, B) = \operatorname{tr} A = \alpha, \qquad \tau_h(A, B) = trB = \beta, \qquad \tau_{gh}(A, B) = \operatorname{tr} AB = \gamma.$$

Эта лемма означает, в частности, что характеры Фрике $\tau_g, \tau_h, \tau_{gh}$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$ и, следовательно, многочлен Фрике Q_w элемента w определен однозначно. Далее, нам нужна явная формула для нахождения многочлена Фрике, полученная в [13]. Чтобы сформулировать этот результат, рассмотрим многочлены $P_n(\lambda)$, которые удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda)$$

и начальным условиям

$$P_0(\lambda) = 1, \qquad P_{-1}(\lambda) = 0.$$

Если $n < 0$, положим

$$P_n(\lambda) = -P_{|n|-2}(\lambda)$$

Степень многочлена $P_n(\lambda)$ равна n, если $n > 0$, и равна $|n| - 2$, если $n < 0$.

Лемма 3. 1) *Многочлен $P_n(\lambda)$, $n \geqslant 1$, имеет n нулей, определенных формулой*

$$\lambda_{n,k} = 2\cos\frac{k\pi}{n+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

2) *$P_{n-1}(2) = n$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.*

3) *Пусть $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$. Тогда*

$$Q_{gh^n}(x, y, z) = P_{n-1}(y)z - P_{n-2}(y)x. \tag{2}$$

Доказательство. 1) Индукцией по n легко проверить, что

$$P_n(2\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}\,.$$

Теперь утверждение п. 1) получается непосредственным вычислением.

Пункты 2) и 3) доказываются индукцией по n (по поводу (2) см. также [12, формула (6)]).

Далее, пусть $w = g^{\alpha_1}h^{\beta_1}\cdots g^{\alpha_s}h^{\beta_s} \in F_2$ – циклически редуцированное слово в F_2 и пусть $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$. Рассмотрим многочлен Фрике $Q_w(x,y,z)$ как многочлен от z. Пусть

$$Q_w(x,y,z) = M_n(x,y)z^n + M_{n-1}(x,y)z^{n-1} + \cdots + M_0(x,y).$$

Предложение 2 (см. [13]). *Степень многочлена Фрике $Q_w(x,y,z)$ относительно z равна s, т.е. равна числу блоков вида $g^{\alpha_i}h^{\beta_i}$ в w. Старший коэффициент $M_s(x,y)$ многочлена $Q_w(x,y,z)$ имеет вид*:

$$M_s(x,y) = \prod_{i=1}^{s} P_{\alpha_i-1}(x)P_{\beta_i-1}(y).$$

Следующая лемма играет важную роль в доказательстве теорем 1 и 2.

Лемма 4. *Пусть $G = \langle a,b \mid a^n = R^m(a,b) = 1\rangle$ и пусть $A,B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие матрицы, что $\operatorname{tr} A = \alpha$, где $\alpha = \pm 2\cos(t\pi/n)$ для некоторого $t \in \{1,\dots,n-1\}$, и $Q_R(\alpha,y,z) = c$, где Q_R – многочлен Фрике элемента $R(g,h) \in F_2$, $c = \pm 2\cos(r\pi/m)$ для некоторого $r \in \{1,\dots,m-1\}$, $y = \operatorname{tr} B$, $z = \operatorname{tr} AB$. Положим $H = \langle A,B\rangle$. Предположим, что выполнены следующие два условия*:

1) *существует унипотентный (либо конечного порядка) элемент $u \in H$ вида $u = A^{\alpha_1}B^{\beta_1}\cdots A^{\alpha_s}B^{\beta_s}$ такой, что $l = \sum_{i=1}^{s}\beta_i \neq 0$;*
2) *существует элемент $h \in H$ такой, что $\operatorname{tr} h \notin \mathcal{O}$.*

Тогда группа G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

Доказательство. Покажем, что группа H не удовлетворяет условиям 1)–3) предложения 1. Предположим, что $f\colon H \to \mathbb{Z}$ – такой эпиморфизм, что $f(z) = 0$ для любого унипотентного элемента $z \in H$. Тогда $f(A) = 0$, поскольку $A^{2n} = E$ в силу леммы 1. Далее, $f(u) = lf(B) = 0$, а значит, $f(B) = 0$, поскольку по условию u либо унипотентен, либо имеет конечный порядок. Таким образом, $f(H) = \{0\}$ – противоречие. Далее, по условию существует элемент $h \in H$ такой, что $\operatorname{tr} h \notin \mathcal{O}$. Следовательно, H не удовлетворяет условиям 2) и 3) предложения 1. Таким образом, H является нетривиальным амальгамированным свободным произведением, т.е. $H = H_1 *_F H_2$, где $H_1 \neq F \neq H_2$. Так как $-E \in Z(H)$, то $-E \in F$. Пусть $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{H}$, $\overline{H}_1$, $\overline{H}_2$, $\overline{F}$ являются образами A, B, H, H_1, H_2, F в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, соответственно. Тогда $\overline{H}_1 \neq \overline{F} \neq \overline{H}_2$ и, следовательно, $\overline{H} = \overline{H}_1 *_{\overline{F}} \overline{H}_2$ – нетривиальное амальгамированное свободное произведение. Условие $Q_R(\alpha,y,z) = c$ означает, что $\operatorname{tr} R(A,B) = c$. Тогда в силу леммы 1 $R^{2m}(A,B) = E$. Таким образом,

$\overline{A}^n = R^m(\overline{A}, \overline{B}) = 1$ в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Следовательно, $\overline{H}$ является эпиморфным образом G, и мы получаем утверждение леммы 4. (Хорошо известно, что если $\varphi\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ – эпиморфизм групп и Γ_2 является нетривиальным амальгамированным свободным произведением, то и Γ_1 такова.)

Следующая лемма будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Лемма 5. 1) *Для заданных* $s, m, M \in \mathbb{Z}$, *удовлетворяющих условиям* $m \geqslant 2$, $|M| \geqslant 3$, *существуют* $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ *и* $r \in \{1, \dots, m-1\}$ *такие, что* $((-1)^s 2 - c)/M \notin \mathscr{O}$, *где* $c = 2\varepsilon\cos(r\pi/m)$.

2) *Для заданного* $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 2$, *существует* $r \in \{1, \dots, m-1\}$ *такое, что* $(2 + 2\cos(r\pi/m))^{-1} \notin \mathscr{O}$.

3) *Если* $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 3$, *то* $\cos(\pi/m) \notin \mathscr{O}$.

4) *Для любых заданных* $m, M \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 3$ *и* $|M| \geqslant 3$, *существует такое* $r \in \{1, \dots, m-1\}$, *что* $(4/M)\cos(r\pi/m) \notin \mathscr{O}$.

Доказательство. 1) Не теряя общности, мы можем считать, что s четно. Предположим, что для любых $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ и $r \in \{1, \dots, m-1\}$ число $(2-c)/M$ является целым алгебраическим. Тогда число $(2-c)/M + (2+c)/M = 4/M$ также целое алгебраическое. Так как $|M| \geqslant 3$, это возможно лишь в случае, когда $|M| = 4$. Пусть, для определенности, $M = 4$. Если m четно, мы положим $r = m/2$. Тогда $c = 0$ и $2/M = \frac{1}{2} \notin \mathscr{O}$ – противоречие. Пусть m нечетно и пусть $F_1 = \{2\cos(2r\pi/m) \mid r = 1, \dots, m-1\}$. Тогда

$$\sum_{c \in F_1} \frac{2-c}{4} = \frac{2(m-1) - \sum_{c \in F_1} c}{4} = \frac{2(m-1)+1}{4},$$

поскольку $1 + \sum_{c \in F_1} c = 0$ как сумма всех корней из 1 степени m. Число $(2(m-1)+1)/4$, очевидно, не является целым алгебраическим – противоречие, доказывающее 1).

2) Так как

$$\frac{1}{2 + 2\cos(r\pi/m)} = \frac{1}{4\cos^2(r\pi/(2m))},$$

то достаточно доказать, что для некоторого $r \in \{1, \dots, m-1\}$ число $(2\cos(r\pi/(2m)))^{-1}$ не принадлежит $\mathscr{O}$. Согласно лемме 3 многочлен $P_{2m-1}(\lambda)$ имеет корни 0, $\pm 2\cos(r\pi/(2m))$, $r = 1, \dots, m-1$. Легко проверить индукцией по m, что

$$P_{2m-1}(\lambda) = \lambda\bigl(\lambda^{2m-2} + a_1\lambda^{2m-4} + \dots + (-1)^{m+1}m\bigr). \tag{3}$$

Следовательно, числа $(\pm 2\cos(r\pi/(2m)))^{-1}$ являются корнями многочлена $P_{2m-1}(1/\lambda)$ или, что эквивалентно, корнями многочлена

$$g_1(\lambda) = \lambda^{2m-2} + \dots + (-1)^{m+1}\frac{1}{m}.$$

Так как $1/m \notin \mathscr{O}$, то по меньшей мере один из корней многочлена $g_1(\lambda)$ не является целым алгебраическим, что и доказывает 2).

3) Достаточно доказать, что существует такое $r \in \{1, \dots, m-1\}$, что $\cos(r\pi/m) \notin \mathcal{O}$, поскольку если $\cos(\pi/m) \in \mathcal{O}$, то и $\cos(r\pi/m) \in \mathcal{O}$ для любого $r \in \mathbb{Z}$. В силу леммы 3 числа $2\cos(r\pi/m)$, $r = 1, \dots, m-1$, являются корнями многочлена $P_{m-1}(\lambda)$. Если $m = 2k$, то из (3) следует, что числа $\cos(r\pi/(2k))$, $r = 1, \dots, 2k-1$, являются корнями многочлена $g_1(2\lambda)$ или, что эквивалентно, корнями уравнения

$$\lambda^{2k-1} + \dots + (-1)^{k-1}\frac{k}{2^{2k-2}}\lambda = 0.$$

Так как $k \geqslant 2$, то $k < 2^{2k-2}$ и, следовательно, число $k/2^{2k-2}$ не является целым алгебраическим. Следовательно, существует r такое, что $\cos(r\pi/(2k)) \notin \mathcal{O}$.

Пусть $m = 2k+1$. Тогда по индукции легко проверить, что

$$P_{2k}(\lambda) = \lambda^{2k} + \dots + (-1)^k. \tag{4}$$

В силу леммы 3 числа $\cos(r\pi/(2k+1))$, $r = 1, \dots, 2k$, являются корнями многочлена $P_{2k}(2\lambda)$ или, что эквивалентно, корнями уравнения

$$\lambda^{2k} + \dots + \frac{(-1)^k}{2^{2k}} = 0.$$

Так как $(-1)^k/2^{2k} \notin \mathcal{O}$, то существует r такое, что $\cos(r\pi/(2k+1)) \notin \mathcal{O}$.

4) Из леммы 3 следует, что числа $(4/M)\cos(r\pi/m)$, $r = 1, \dots, m-1$, являются корнями многочлена $P_{m-1}(M\lambda/2)$. Рассмотрим два случая.

Пусть $m = 2k+1$. Тогда в силу (4) числа $(4/M)\cos(r\pi/(2k+1))$, $r = 1, \dots, 2k$, являются корнями уравнения

$$\lambda^{2k} + \dots + (-1)^k\Big(\frac{2}{M}\Big)^{2k} = 0.$$

Так как $|M| \geqslant 3$, то $(-1)^k(2/M)^{2k} \notin \mathcal{O}$, следовательно, последнее уравнение имеет корень, который также не принадлежит $\mathcal{O}$.

Пусть $m = 2k$. Тогда в силу (3) числа $(4/M)\cos(r\pi/m)$, $r = 1, \dots, m-1$, являются корнями уравнения

$$\lambda^{2k-1} + \dots + (-1)^{k+1}k\Big(\frac{2}{M}\Big)^{2k-2}\lambda = 0.$$

Легко видеть, что $(-1)^{k+1}k(2/M)^{2k-2} \notin \mathcal{O}$. Тем самым 4), а вместе с тем и лемма 5 доказаны.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы 1. Если $n > 1$, то мы можем рассмотреть группу $G_1 = \langle a, b \mid a^2 = R^m(a,b) = 1\rangle$, которая является эпиморфным образом G. Таким образом, мы можем предположить без потери общности, что $n = 1$. Наша цель состоит в том, чтобы построить представление

$\varphi\colon G \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ такое, что группа $\varphi(G)$ является нетривиальным амальгамированным свободным произведением. Существуют следующие три случая, каждый из которых мы рассмотрим отдельно:

1) $R(a,b) = ab^{n_1}\cdots ab^{n_s}$ является циклически редуцированным словом, лежащим в подгруппе свободной группы с образующими a и b, порожденной a^2 и коммутантом, и при этом существует i такое, что $|n_i| > 1$;
2) $R(a,b)$ такое же как в случае 1), при этом $|n_i| = 1$ для всех $i = 1,\ldots,s$;
3) $R(a,b)$ является циклически редуцированным словом, которое не принадлежит подгруппе свободной группы с образующими a и b, порожденной a^2 и коммутантом.

Случай 1. Пусть $R(a,b) = ab^{n_1}\cdots ab^{n_s}$. Из условий, наложенных на элемент $R(a,b)$, следует, что s четно и $\sum_{i=1}^{s} n_i = 0$. Чтобы применить лемму 4, покажем, что существуют матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что

$$\mathrm{tr}\, A = 0, \qquad \mathrm{tr}\, B = 2, \qquad \mathrm{tr}\, AB = z,$$

где z – некоторое комплексное число, не принадлежащее $\mathscr{O}$ и удовлетворяющее уравнению

$$Q_R(0,2,z) = c, \tag{5}$$

$c = \pm 2\cos(r\pi/m)$ для некоторого $r \in \{1,\ldots,m-1\}$.

Согласно предложению 2 мы можем записать (5) в виде

$$M_s(0,2)z^s + M_{s-1}(0,2)z^{s-1} + \cdots + M_0(0,2) - c = 0, \tag{6}$$

где $M_s(0,2) = \prod_{i=1}^{s} P_0(0)P_{n_i-1}(2) = \prod_{i=1}^{s} n_i$ в силу леммы 3. Так как s четно, $\sum_{i=1}^{s} n_i = 0$ и существует i такое, что $|n_i| > 1$, то $\prod_{i=1}^{s} |n_i| \geqslant 3$. Таким образом, $|M_s(0,2)| \geqslant 3$. Далее, справедлива следующая

Лемма 6. *Пусть $R = gh^{n_1}\cdots gh^{n_s} \in F_2$, где s четно, и $Q_R(x,y,z) = M_s(x,y)z^s + \cdots + M_0(x,y)$ – многочлен Фрике элемента R, где $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$. Тогда $M_0(0,2) = (-1)^{s/2}2$.*

Доказательство. Прежде всего, сделаем следующие наблюдения.

1) $Q_{h^i}(0,2,z) = 2$, поскольку если $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ и B – унипотентная матрица, то B^i унипотентна для любого i. Следовательно, $\tau_{h^i}(A,B) = \mathrm{tr}\, B^i = 2$.

2) Из леммы 3 следует, что $Q_{gh^i}(0,2,z) = P_{i-1}(2)z = iz$.

Утверждение леммы докажем индукцией по s. Если $s = 2$, то используя соотношения (1), получаем

$$Q_{gh^{n_1}gh^{n_2}}(0,2,z) = Q_{gh^{n_1}}(0,2,z)Q_{gh^{n_2}}(0,2,z) - Q_{h^{n_2-n_1}}(0,2,z) = n_1n_2z^2 - 2,$$

т.е. $M_0(0,2) = -2$. Для произвольного $s > 2$ имеем

$$\begin{aligned} Q_R(0,2,z) = Q_{gh^{n_1}}(0,2,z)&Q_{gh^{n_2}\cdots gh^{n_s}}(0,2,z) \\ &- Q_{gh^{n_3}\cdots gh^{n_s-n_1+n_2}}(0,2,z) = n_1zf(z) - g(z), \end{aligned}$$

где

$$
\begin{aligned}
f(z) &= Q_{gh^{n_2}\cdots gh^{n_s}}(0,2,z),\\
g(z) &= Q_{gh^{n_3}\cdots gh^{n_s-n_1+n_2}}(0,2,z).
\end{aligned}
$$

Мы видим, что свободный член многочлена $Q_R(0,2,z)$ совпадает со свободным членом $g(z)$. По индукции имеем

$$M_0(0,2) = -(-1)^{(s-2)/2}2 = (-1)^{s/2}2.$$

Лемма 6 доказана.

Учитывая лемму 6, мы можем записать (6) в виде

$$z^s + \frac{M_{s-1}(0,2)}{M_s(0,2)}z^{s-1} + \cdots + \frac{(-1)^{s/2}2 - c}{M_s(0,2)} = 0. \tag{7}$$

Из 1) леммы 5 следует, что можно выбрать $c = \pm 2\cos(r\pi/m)$ в уравнении (7) таким, чтобы свободный коэффициент $((-1)^{s/2} - c)/M_s(0,2)$ не принадлежал $\mathcal{O}$. Тогда (7) имеет корень z_0, который не является целым алгебраическим. Согласно лемме 2 существуют матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что

$$\operatorname{tr} A = 0, \qquad \operatorname{tr} B = 2, \qquad \operatorname{tr} AB = z_0.$$

Применение леммы 4 завершает доказательство теоремы 1 в первом случае.

Случай 2. Пусть $R(a,b) = ab^{\varepsilon_1}ab^{\varepsilon_2}\cdots ab^{\varepsilon_s}$. Из наших предположений следует, что s четно, $\varepsilon_i \in \{-1,1\}$ для всех $i = 1,\dots,s$ и $\sum_{i=1}^{s}\varepsilon_i = 0$.

Предположим вначале, что для некоторого $j < s$ мы имеем $\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}$. Пусть $c = a$, $d = ab^{\varepsilon_j}$ – новые образующие группы G. Нетрудно проверить, что тогда G имеет копредставление вида

$$G = \langle c, d \mid c^2 = R_1^m(c,d) = 1\rangle,$$

где $R_1(c,d) = cd^{l_1}\cdots cd^{l_t}$ – циклически редуцированное слово, лежащее в подгруппе свободной группы с образующими c и d, порожденной c^2 и коммутантом, и при этом существует l_i такое, что $|l_i| \geqslant 2$. Этот случай был рассмотрен выше в первом случае.

Таким образом, пусть $R(a,b) = abab^{-1}\cdots abab^{-1} = (abab^{-1})^l$ для некоторого $l > 0$. Следовательно, группа G имеет копредставление вида

$$G = \langle a, b \mid a^2 = (abab^{-1})^t = 1\rangle,$$

где $t \geqslant 2$. Покажем, что существуют матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, удовлетворяющие условиям:

$$1)\quad \operatorname{tr} A = 0;\quad 2)\quad \operatorname{tr} AB^{-2}AB^3 = 2;\quad 3)\quad \operatorname{tr} AB \notin \mathcal{O};\quad 4)\quad \operatorname{tr} ABAB^{-1} = c,$$

где $c = \pm 2\cos(r\pi/m)$ для некоторого $r \in \{1, \ldots, m-1\}$. Используя характеры Фрике, условия 2) и 4) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} \tau_{ghgh^{-1}}(A,B) = c, \\ \tau_{gh^{-2}gh^3}(A,B) = 2. \end{cases} \tag{8}$$

Используя соотношения (1) между характерами Фрике, легко получить, что

$$\tau_{ghgh^{-1}} = -\tau_{gh}^2 + \tau_g\tau_h\tau_{gh} - \tau_h^2 + 2$$

и

$$\tau_{gh^{-2}gh^3} = (\tau_g\tau_h^2 - \tau_h\tau_{gh} - \tau_g)(\tau_h^2\tau_{gh} - \tau_g\tau_h - \tau_{gh}) - \tau_h^5 + 5\tau_h^3 - 5\tau_h.$$

Положим $y = \tau_h(A,B) = \operatorname{tr} B$, $z = \tau_{gh}(A,B) = \operatorname{tr} AB$. Так как $\tau_g(A,B) = \operatorname{tr} A = 0$, мы получаем

$$\tau_{ghgh^{-1}}(A,B) = -z^2 - y^2 + 2, \qquad \tau_{gh^{-2}gh^3}(A,B) = -(y^3-y)z^2 - (y^5 - 5y^3 + 5y).$$

Таким образом, (8) можно записать в виде:

$$\begin{cases} z^2 + y^2 - 2 + c = 0, \\ (y^3 - y)z^2 + y^5 - 5y^3 + 5y + 2 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Из (9) следует, что

$$y^3 - \Big(1 + \frac{1}{c+2}\Big)y - \frac{2}{c+2} = 0. \tag{10}$$

Согласно 2) леммы 5 существует такое $r \in \{1, \ldots, m-1\}$, что число $1/(c+2)$ не принадлежит $\mathcal{O}$. Тогда уравнение (10) имеет корень $y_0 \notin \mathcal{O}$. Пусть (y_0, z_0) – некоторое решение (9). Согласно лемме 2 существуют матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что

$$\operatorname{tr} A = 0, \qquad \operatorname{tr} B = y_0, \qquad \operatorname{tr} AB = z_0.$$

Применяя лемму 4, завершаем доказательство теоремы 2 во втором случае.

Случай 3. Пусть $R(a,b) = ab^{n_1}\cdots ab^{n_s}$ и $R(a,b)$ не принадлежит подгруппе свободной группы с образующими a и b, порожденной a^2 и коммутантом. Случай $\sum_{i=1}^s n_i \neq 0$ был рассмотрен в [2, теорема 5]. Поэтому мы можем считать, что s нечетно и $\sum_{i=1}^s n_i = 0$.

Вначале рассмотрим случай $m = 2$. Пусть $G_1 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = R^2(a,b) = 1\rangle$. Покажем, что $G_1 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1\rangle$ является свободным произведением двух циклических групп второго порядка. Достаточно доказать, что $R^2(a,b) = 1$ в G. Мы докажем более общий факт: если $w(a,b) = ab^{l_1}\cdots ab^{l_s}$, где $s = 2k+1$ и $\sum_{i=1}^s l_s$ – четное число, тогда $w^2(a,b) = 1$ в G_1. Воспользуемся индукцией по s. Если $s = 1$, то утверждение очевидно. Для произвольного s среди показателей $l_1, \ldots, l_s$ существует четный. Пусть, например, l_1 четно. Тогда $b^{l_1} = 1$ в G_1 и

$$w(a,b) = b^{l_2}ab^{l_3}\cdots ab^{l_s},$$

т.е. $w(a,b)$ сопряжено с
$$w_1(a,b) = ab^{l_3} \cdots ab^{l_2+l_s}.$$
Поскольку сумма $l_3 + \cdots + (l_2 + l_s)$ по-прежнему четна, мы можем применить индукцию и получить, что $w_1^2(a,b) = 1$ в G_1. Следовательно, $w^2(a,b) = 1$ в G_1. Поскольку группа G_1 является эпиморфным образом G, мы получаем, что G является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

Рассмотрим теперь случай $m \geqslant 3$. Покажем, что существуют такие матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, что
$$\operatorname{tr} A = 0, \qquad \operatorname{tr} B = y_0, \qquad \operatorname{tr} AB = 2, \qquad Q_R(0, y_0, 2) = 2\cos\frac{\pi}{m},$$
где y_0 – некоторое комплексное число, не являющееся целым алгебраическим и $Q_R(x,y,z)$ – многочлен Фрике слова $R(g,h) \in F_2$. Справедлива

Лемма 7. 1) *Справедливо следующее равенство*: $Q_R(0,y,z) = zf(y,z)$, *где* $f(y,z) \in \mathbb{Z}[y,z]$.

2) *Многочлен* $f_1(y) = f(y,2)$ *не является константой.*

Доказательство. 1) Из леммы 3 следует, что $Q_{gh^n}(0,y,z) = P_{n-1}(y)z$ и при $s = 1$ утверждение доказано. Пусть $s > 1$. Тогда, используя соотношения (1), получаем
$$\tau_{gh^{n_1}\dots gh^{n_s}} = \tau_{gh^{n_1}}\tau_{gh^{n_2}\dots gh^{n_s}} - \tau_{gh^{n_3}\dots gh^{n_s - n_1 + n_2}}.$$
По индукции имеем
$$Q_R(0,y,z) = P_{n_1-1}(y) f_1(y,z) z - z f_2(y,z) = z f(y,z)$$
для некоторого многочлена $f(y,z) \in \mathbb{Z}[y,z]$.

2) Рассмотрим $\mathbb{Z}$-алгебру T, порожденную всеми характерами Фрике τ_w, $w \in F_2$. Любой автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Aut}(F_2)$ индуцирует автоморфизм
$$\sigma' \colon T \to T, \qquad \tau_w \mapsto \tau_{\sigma(w)}.$$
Рассмотрим автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Aut}(F_2)$ такой, что
$$\sigma(g) = g, \qquad \sigma(h) = gh.$$
Тогда $\sigma' \in \mathrm{Aut}(T)$ такой автоморфизм, что
$$\sigma'(x) = x_1 = x, \qquad \sigma'(y) = y_1 = z, \qquad \sigma'(z) = z_1 = xz - y.$$
Далее, имеем
$$\sigma'(\tau_{R(g,h)}) = \tau_{\sigma(R(g,h))} = \tau_{R(\sigma(g),\sigma(h))},$$
следовательно,
$$\sigma'(Q_R(x,y,z)) = Q_R(x_1,y_1,z_1) = Q_R(x,z,xz-y).$$

Таким образом, $\sigma'(Q_R(0,y,2)) = Q_R(0,2,-y)$. Из предложения 2 следует, что многочлен $Q_R(0,2,-y) \in \mathbb{Z}[y]$ имеет степень s, поскольку для его старшего коэффициента M_s выполнено $|M_s| = \prod_{i=1}^{s} |n_i| \neq 0$. Итак, $Q_R(0,2,-y)$ – не константа, следовательно, $\sigma'^{-1}(Q_R(0,2,-y)) = Q_R(0,y,2) = 2f_1(y)$ – также не константа. Лемма 7 доказана.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 1. Согласно лемме 7 равенство $Q_R(0,y_0,2) = 2\cos(\pi/m)$ эквивалентно равенству

$$f_1(y_0) = \cos\frac{\pi}{m}\,. \tag{11}$$

В силу 3) леммы 5 число $\cos(\pi/m)$ не является целым алгебраическим, следовательно, существует корень y_0 уравнения (11), который также не является целым алгебраическим. В силу леммы 2 существуют матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что

$$\operatorname{tr} A = 0, \qquad \operatorname{tr} B = y_0, \qquad \operatorname{tr} AB = 2.$$

Применив лемму 4, мы завершаем доказательство теоремы 1.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Учитывая теорему 1, мы можем считать, что $n \geqslant 3$. Пусть $R(g,h) \in F_2$ и пусть Q_R – многочлен Фрике слова R. Покажем, что существуют матрицы такие $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, что

$$\operatorname{tr} A = \alpha, \qquad \operatorname{tr} B = 2, \qquad \operatorname{tr} AB = z,$$

где $\alpha = 2\cos(\pi/n)$, z – некоторое комплексное число, не являющееся целым алгебраическим и удовлетворяющее уравнению

$$Q_R(\alpha, 2, z) = c, \tag{12}$$

где $c = \pm 2\cos(r\pi/m)$ для некоторого $r \in \{1, \dots, m-1\}$. Согласно предложению 2 мы можем записать (12) в виде

$$M_s(\alpha,2)z^s + M_{s-1}(\alpha,2)z^{s-1} + \dots + M_0(\alpha,2) - c = 0, \tag{13}$$

где

$$M_s(\alpha,2) = \prod_{i=1}^{s} P_{u_i-1}(\alpha)P_{v_i-1}(2).$$

В силу леммы 3 $P_{u_i-1}(\alpha) \neq 0$, $P_{v_i-1}(2) = v_i$, поэтому $M_s(\alpha,2) \neq 0$. Запишем (13) в виде

$$z^s + \frac{M_{s-1}(\alpha,2)}{M_s(\alpha,2)} + \dots + \frac{M_0(\alpha,2) - c}{M_s(\alpha,2)} = 0. \tag{14}$$

Покажем, что мы можем выбрать c так, что $(M_0(\alpha,2) - c)/M_s(\alpha,2) \notin \mathscr{O}$. Предположим, что для любого $r \in \{1, \dots, m-1\}$ оба числа

$$\frac{M_0(\alpha,2) + 2\cos(r\pi/m)}{M_s(\alpha,2)} \quad \text{и} \quad \frac{M_0(\alpha,2) - 2\cos(r\pi/m)}{M_s(\alpha,2)}$$

принадлежат $\mathcal{O}$. Тогда их разность

$$\frac{4\cos(r\pi/m)}{M_s(\alpha,2)} \in \mathcal{O}.$$

Так как для любого r многочлен $P_r(\lambda)$ имеет целые коэффициенты, то $P_{u_i-1}(\alpha) \in \mathcal{O}$. Следовательно, для любого $r \in \{1,\dots,m-1\}$

$$\frac{4\cos(r\pi/m)}{M_s(\alpha,2)} P_{u_i-1}(\alpha) = \frac{4\cos(r\pi/m)}{M} \in \mathcal{O},$$

где $M = \prod_{i=1}^{s} v_i \in \mathbb{Z}$ и $|M| \geqslant 3$ по условию теоремы. Мы получили противоречие с 4) леммы 5. Это означает, что существует корень z_0 уравнения (14), который не принадлежит $\mathcal{O}$. В силу леммы 2 существуют матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что

$$\operatorname{tr} A = \alpha, \qquad \operatorname{tr} B = 2, \qquad \operatorname{tr} AB = z_0.$$

Применив лемму 4, мы завершаем доказательство теоремы 2.

В заключение сформулируем следующую гипотезу.

Гипотеза 2. *Группа* $G = \langle a, b \mid a^n = R^m(a,b) = 1\rangle$, *где* $m \geqslant 2$, $n = 0$ *или* $n \geqslant 2$ *и* $R(a,b)$ – *циклически редуцированное слово в свободной группе с образующими* a *и* b, *содержащее* b, *является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.*

Учитывая теоремы 1, 2 и теорему 5 из [2], эта гипотеза не доказана в следующем случае: n – нечетно, $R(a,b) = a^l R_1(a,b)$, где $0 \leqslant l < n$ и $R_1(a,b) = a^{u_1} b^{v_1} \cdots a^{u_s} b^{v_s}$ – циклически редуцированное слово, лежащее в коммутанте свободной группы с образующими a и b, такое, что $\prod_{i=1}^{s} |v_i| \in \{1,2\}$.

Эта статья была написана во время посещения автором университета г. Билефельд (ФРГ) в качестве гостя SFB 343 "Diskrete Strukturen in der Mathematik".

Список литературы

1. *Howie J.* One relator products of groups // Proceedings of groups St. Andrews. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. P. 216–220.
2. *Fine B., Levin F., Rosenberger G.* Free subgroups and decompositions of one-relator products of cyclics; Part 2: Normal torsion free subgroups and FPA decompositiomns // J. Indian Math. Soc. 1985. V. 49. P. 237–247.
3. *Zieschang H.* On decompositions of discontinuous groups of the plane // Math. Z. 1976. V. 151. P. 165–188.
4. *Rosenberger G.* Bemerkungen zu einer Arbeit von H. Zieschang // Arch. Math. (Basel). 1977. V. 29. P. 623–627.
5. *Long D. D., Maclachlan C., Reid A. W.* Splitting groups of signature $(1,n)$ // J. Algebra. 1996. V. 185. P. 329–341.
6. *Dunwoody M. J., Sageev M.* Splittings of certain Fuchsian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. №7. P. 1953–1954.
7. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.
8. *Bass H.* Finitely generated subgroups of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})_2(\mathbb{C})$ // The Smith Conjecture. New York: Wiley, 1984. P. 127–136.

9. *Horowitz R.* Characters of free groups represented in the two dimensional linear group // Comm. Pure. Appl. Math. 1972. V. 25. P. 635–649.
10. *Magnus W.* The uses of 2 by 2 matrices in combinatorial group theory // Results Math. 1981. V. 4. №2. P. 171–192.
11. *Culler M., Shalen P.* Varieties of group representations and splittings of 3 manifolds // Ann. of Math. (2). 1983. V. 117. P. 109–147.
12. *Helling H.* Diskrete Untergruppen von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ // Invent. Math. 1972. V. 17. P. 217–229.
13. *Traina C.* Trace polynomial for two generated subgroups of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 79. P. 369–372.

Институт математики НАН Беларуси, Минск
E-mail: `benyash@im.bas-net.by`

Поступила в редакцию
21.10.1997