УДК 512.547

В.В. Беняш-Кривец

О РАЗЛОЖИМОСТИ НЕКОТОРЫХ F–ГРУПП В АМАЛЬГАМИРОВАННОЕ СВОБОДНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

(Представлено академиком И.В. Гайшуном)

Х. Цишангом [1] исследовался вопрос о разложимости плоских разрывных групп в нетривиальное амальгамированное свободное произведение. Им получен ответ для всех типов таких групп, за исключением групп вида

$$H = \langle a, b \mid a^2 = [a, b]^h = 1\rangle,\ \ h \geq 2, \tag{1}$$

и

$$G = \langle c, d \mid c^2 = [c, d]^h = 1\rangle,\ \ h \geq 2, \tag{2}$$

где $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ — коммутатор x и y. В [2] доказано, что группы H и G представимы в виде нетривиального амальгамированного свободного произведения в случае, когда $h \neq 2^n$, $n \geq 1$. Цель настоящей статьи — доказать, что и в случае $h = 2^n$, $n \geq 2$, группы H и G разложимы в амальгамированное свободное произведение. Для двух групп $H = \langle a, b \mid a^2 = [a, b]^2 = 1\rangle$ и $G = \langle c, d \mid [c, d]^2 = 1\rangle$ вопрос о разложимости в нетривиальное амальгамированное свободное произведение остается открытым. Предлагаемое доказательство основано на изучении свойств некоторых двумерных представлений групп H и G и принципиально отлично от доказательств Х. Цишанга и Г. Розенбергера.

Теорема. *Пусть группы H и G задаются (1), (2) и пусть $h = 2^n$, $n \geq 2$. Тогда группы H и G являются нетривиальным амальгамированным свободным произведением, т.е.*

$$H = H_1 *_A H_2, \qquad H_1 \neq A \neq H_2,$$
$$G = G_1 *_B G_2, \qquad G_1 \neq B \neq G_2,$$

Важную роль в доказательстве теоремы играет следующий результат Х. Басса [3], который мы сформулируем в виде леммы.

Лемма 1 ([3]). *Пусть F — конечно порожденная подгруппа $\mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$. Тогда имеет место один из следующих четырех случаев:*

1) Существует эпиморфизм $f : F \to \mathbf{Z}$ такой, что $f(u) = 0$ для любого унипотентного элемента $u \in F$.

2) F является нетривиальным амальгамированным свободным произведением, т.е. $F = F_1 *_A F_2$, $F_1 \neq A \neq F_2$; при этом каждая конечно порожденная унипотентная подгруппа F содержится в подгруппе, сопряженной с F_1 или F_2.

3) F сопряжена подгруппе группы верхних треугольных матриц.

4) F сопряжена подгруппе группы $\mathbf{GL}_2(A)$, где A — кольцо целых алгебраических чисел в $\mathbf{C}$.

Для доказательства теоремы рассмотрим матрицы,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} s & -it \\ t & is \end{pmatrix},$$

где $s, t \in \mathbf{C}$. Очевидно, что для любых $s, t \in \mathbf{C}$ таких, что $s^2 + t^2 \neq 0$ соответствие $a \to X$, $b \to Y$ определяет представление $\rho : H \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$, поскольку $X^2 = E$ и $[X, Y] = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, т.е. $[X, Y]^4 = [X, Y]^h = E$. Найдем такие $s, t \in \mathbf{C}$, чтобы элемент $XY^{-2}XY^3 \in H$ был унипотентным. Для этого достаточно решить систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \det Y & = & 1 \\ \mathrm{tr}\, XY^{-2}XY^3 & = & 2 \end{array} \right. \tag{3}$$

Вычислив определитель и след, (3) можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s^2 + t^2 & = & -i \\ s^3(4 - 4i) + s(3i + 3) & = & 2 \end{array} \right. \tag{4}$$

Очевидно, (4) совместна, пусть (s, t) — одно из решений (4) и пусть ρ — соответствующее представление. Положим $H' = \rho(H)$. Подгруппа $H' \subset \mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$ обладает следующими свойствами.

Лемма 2. *H' — неприводимая подгруппа $\mathbf{GL}_2(\mathbf{C})$.*

Доказательство. Если бы H' была приводима, то для любых элементов $g, h \in H'$ мы имели бы $\mathrm{tr}\,[g, h] = 2$, в то время как $\mathrm{tr}\,[X, Y] = 0$.

Лемма 3. *Не существует ненулевых гомоморфизмов $f : H' \to \mathbf{Z}$ таких, что $f(u) = 0$ для любого унипотентного элемента $u \in H'$.*

Доказательство. Предположим, что $f : H' \to \mathbf{Z}$ — гомоморфизм, переводящий унипотентные элементы в 0. Так как $X^2 = E$, то $f(X^2) = 2f(X) = 0$, т.е. $f(X) = 0$. С другой стороны, $f(XY^{-2}XY^3) = f(Y) = 0$, поскольку $XY^{-2}XY^3$ — унипотентный элемент. Следовательно f — нулевой гомоморфизм.

Лемма 4. *H' не сопряжена подгруппе группы $\mathbf{GL}_2(A)$, где A — кольцо целых алгебраических чисел в $\mathbf{C}$.*

Доказательство. Так как $\mathrm{tr}\, Y = (i+1)s$, то второе уравнение в (4) можно переписать в виде

$$-2(\mathrm{tr}\, Y)^3 + 3\mathrm{tr}\, Y = 2.$$

Таким образом, $\mathrm{tr}\, Y$ является корнем уравнения

$$2\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0 \tag{5}$$

Легко проверить, что многочлен $f(\lambda) = 2\lambda^3 - 3\lambda + 2$ не имеет рациональных корней и, следовательно, неприводим над $\mathbf{Q}$. Поскольку старший коэффициент $f(\lambda)$ не равен 1, то корни $f(\lambda)$ не являются целыми алгебраическими числами, в частности, $\mathrm{tr}\, Y \notin A$. Таким образом, H' не может быть сопряжена подгруппе $\mathbf{GL}_2(A)$, поскольку в этом случае для любого $h \in H'$ имели бы $\mathrm{tr}\, h \in A$.

Из лемм 1–4 следует, что группа H' является нетривиальным амальгамированным свободным произведением, т.е.

$$H' = A_1 *_B A_2, \qquad A_1 \neq B \neq A_2.$$

Хорошо известно, что если $f : E \to F$ — эпиморфизм групп, $F = F_1 *_A F_2$ — нетривиальное амальгамированное свободное произведение, то и $E = f^{-1}(F_1) *_{f^{-1}(A)} f^{-1}(F_2)$

— также нетривиальное амальгамированное свободное произведение. Из этого немедленно получается утверждение теоремы для группы H. Рассмотрим теперь группу G. Соответствие $c \to a$, $d \to b$ определяет эпиморфизм $G \to H$ и поэтому G также является нетривиальным амальгамированным свободным произведением.

Замечание. В случае $h = 2$ приведенное выше доказательство не проходит, поскольку несложно показать, что в этом случае для любого представления $\rho : H \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{C})$ группа $\rho(H)$ не может одновременно удовлетворять условиям лемм 2–4.

Литература

1. Zieshang H. // Math. Zeit. 1976. V. 151. P. 165–188. 2.Rosenberger G. // Arch. der Math. 1977. V. 29. P. 623–627. 3. Bass H. // in "The Smith Conjecture"rdited by John Morgan, Wiley, New York, 1984.

Поступило

УДК 512.547

Беняш-Кривец В.В. О разложимости некоторых F–групп в амальгамированное свободное произведение // Доклады Академии наук Беларуси.

Вопрос о разложимости плоских разрывных групп в нетривиальное амальгамированное свободное произведение исследовался Х. Цишангом. Им получен ответ для всех типов таких групп, за исключением групп вида $H = \langle a, b \mid a^2 = [a, b]^h = 1\rangle$ и $G = \langle c, d \mid c^2 = [c, d]^h = 1\rangle$. Г. Розенбергер показал, что группы H и G представимы в виде нетривиального амальгамированного свободного произведения в случае, когда $h \neq 2^n$, $n \geq 1$. В настоящей работе доказано, что и в случае $h = 2^n$, $n \geq 2$, группы H и G также разложимы в амальгамированное свободное произведение.

Библиогр. — 3 назв.

Summary

Доказана разложимость в нетривиальное амальгамированное свободное произведение F–групп $H = \langle a, b \mid a^2 = [a, b]^h = 1\rangle$ и $G = \langle c, d \mid c^2 = [c, d]^h = 1\rangle$ при $h > 2$.

For $h > 2$ the decomposition of the F–groups $H = \langle a, b \mid a^2 = [a, b]^h = 1\rangle$ and $G = \langle c, d \mid c^2 = [c, d]^h = 1\rangle$ into proper free products with amalgamation is proved.

Benyash-Krivetz V.V.
On decomposition of some F–groups into proper free products with amalgamation.

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела алгебры и теории чисел ИМ АНБ. Домашний адрес: 220098 Минск, ул. Рафиева, д. 97, кв. 224. Рабочий телефон: 68–47–78, домашний телефон: 74–73–36.