ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2009, том 45, № 1, с. 111–122

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.955

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИПАРАБОЛИЧЕСКИХ ФАКТОРИЗОВАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СГЛАЖИВАЮЩИХСЯ ОПЕРАТОРОВ

© 2009 г. **Ф. Е. Ломовцев**

Доказаны теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений задач Коши для квазипараболических факторизованных дифференциально-операторных уравнений с переменными областями определения. Впервые выведена рекуррентная формула сильных решений задач Коши по количеству дифференциально-операторных множителей этих уравнений. Установлена корректная разрешимость в сильном смысле новых смешанных задач для уравнений в частных производных с зависящими от времени коэффициентами в граничных условиях.

Задачи Коши для квазигиперболических факторизованных дифференциально-операторных уравнений четных порядков с переменными областями определения гладких операторных коэффициентов изучались в [1]. Задачи Коши для квазипараболических факторизованных дифференциально-операторных уравнений, которыми условимся называть изучаемые ниже уравнения (1) при $m > 1$, ранее не рассматривались. К таким задачам сводятся смешанные задачи для зависящих от времени параболических, гиперболических и неклассических уравнений в частных производных с зависящими от времени граничными условиями, например, исследованная ниже смешанная задача (26)–(28).

1. Постановка задач Коши. В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$ рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\mathcal{L}_m(t)u \equiv (d/dt + A_m(t))\cdots(d/dt + A_1(t))u = f, \quad t \in]0,T[\,, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$l_j u \equiv (d^j u/dt^j)|_{t=0} = \varphi_j, \quad 0 \le j \le m-1, \quad m = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

где u и f – функции переменной t со значениями в H и $A_k(t)$ – положительно-определенные самосопряженные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A_k(t))$, $t \in [0,T[$.

Предполагается, что все операторы $A_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, удовлетворяют условиям I, IV работы [1], из которых при каждом $t \in [0,T[$ вытекают неравенства

$$|A_s(t)u - A_k(t)u|_{\alpha,t} \ge c_{s,k}|u|_{\alpha+2,t} \quad \forall u \in W^{\alpha+2}(t), \quad 0 \le \alpha \le 2m-2, \quad 1 \le s < k \le m, \tag{3}$$

где постоянные $c_{s,k} > 0$ не зависят от u и t.

Наделяя области определения $D(A^{\alpha/2m}(t))$ положительных дробных степеней $A^{\alpha/2m}(t)$ самосопряженных операторов $A(t) = A_1^m(t)$ в H эрмитовыми нормами $|v|_{\alpha,t} = |A^{\alpha/2m}(t)v| = |A_1^{\alpha/2}(t)v|$, так же как в [1], получаем гильбертовы пространства $W^\alpha(t)$, $t \in [0,T[$, $0 \le \alpha \le 2m$, $W^0(t) = H$.

Наложим на операторы $A_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, еще следующее условие.

III. Существуют линейные положительные самосопряженные операторы $B(t)$, $t \in [0,T[$, в H с зависящими от t областями определения $D(B(t))$, у которых ограниченные обратные операторы $B^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T[\,,\mathcal{L}(H))$ сильно непрерывны по t в H,

$$A_k(t)B^{-1}(t) \in L_\infty(\,]0,T[\,,\mathcal{L}(H)), \quad 1 \le k \le m,$$

при почти всех t существует сильная производная $dB^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0,T[\,,\mathcal{L}(H))$ [2] и равномерно по t существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\bigg(\frac{dB_\varepsilon^{-1}(t)}{dt}u,u\bigg)=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}(A_k(t)B_\varepsilon^{-1}(t)u,u)=|A_k^{1/2}(t)u|^2\quad \forall u\in W^1(t),\quad 1\le k\le m, \tag{4}$$

где $B_\varepsilon^{-1}(t)=(I+\varepsilon B(t))^{-1}$, $\varepsilon>0$, – семейство сглаживающих операторов и $A_k^{1/2}(t)$ – квадратные корни операторов $A_k(t)$.

Кроме того, предполагается, что все операторы $A_k(t)$, $k=\overline{1,m}$, удовлетворяют условиям V и VI из работы [1], последнее из которых состоит в том, что при каждом $t\in[0,T[$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered}|A_s(t)A_k(t)u-A_k(t)A_s(t)u|_{\alpha,t}\le \widetilde{c}_{s,k}|u|_{\alpha+2,t}\quad \forall u\in W^{\alpha+4}(t),\\ t\in[0,T[\,,\quad 0\le\alpha\le 2m-4,\quad 1\le s<k\le m,\end{gathered} \tag{5}$$

где постоянные $\widetilde{c}_{s,k}\ge 0$ не зависят от u и t.

Дифференциальные операторы, удовлетворяющие условию I, указаны, например, в [1]. Некоторые дополнительные ограничения на операторы $A_1(t)$ будут даны в формулировках теорем. Отметим, что в условиях I–VI и дальнейших рассуждениях предположение задания операторов $A_k(t)$ при каждом $t\in[0,T[$ сделано ради упрощения изложения и может быть заменено на предположение задания операторов $A_k(t)$ при $t=0$ и почти всех $t\in]0,T[$, так как налагаемые условия на операторы $A_k(t)$ будут исключать их произвольное доопределение на множествах нулевой меры.

Функциональным методом, предложенным в [1], докажем корректную разрешимость в сильном смысле задач Коши (1), (2). Такая разрешимость при $m=1$ исследована в [3, 4] в случае негладких по t и несамосопряженных операторов $A_1(t)$ с помощью соответствующих сглаживающих операторов $B_\varepsilon^{-1}(t)$, но без привлечения леммы 4, так как там требования налагаются на несколько другие пределы (4). Впервые для сильных решений задач Коши (1), (2) выведем формулу, позволяющую находить сильные решения этих задач так же, как их гладкие решения, рекуррентно по m, а также докажем теорему 3 существования, единственности и непрерывности от правых частей уравнений f и начальных данных φ_j, $j=\overline{0,m-1}$, сильных решений новых смешанных задач.

2. Теорема единственности сильных решений. Сначала введем пространства и дадим определение сильных решений искомых задач Коши. Обозначим символами $\mathcal{H}^\alpha$ гильбертовы пространства $L_2(]0,T[\,,W^\alpha(t))$ с эрмитовыми нормами $\|\cdot\|_\alpha$, $0\le\alpha\le 2m$, $\mathcal{H}^0=\mathcal{H}$.

Пространствами сильных решений задач Коши (1), (2) являются банаховы пространства E^m – пополнения множеств $D(L_m)=\{u\in D(\widetilde{L}_m):\ d^su/dt^s\in\mathcal{H}^{2m-2s},\ 0\le s\le m-1\}$, где

$$D(\widetilde{L}_m)=\bigg\{u\in\mathcal{H}:\ \frac{d^su}{dt^s}\in L_2(]0,T[\,,\ V^{2m-2s}),\ 0\le s\le m;\ \frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}},$$

$$\prod_{j=1}^{p}\frac{d^{\alpha_j}\widetilde{A}_{k_j}(t)}{dt^{\alpha_j}}\,\frac{d^{m-1-p-|\alpha(p)|}u}{dt^{m-1-p-|\alpha(p)|}}\in\mathcal{H}^2,$$

$$0\le|\alpha(p)|\le m-1-p,\ 1\le p\ \le m-1,\ 1\le k_1,\dots,k_p\le m,\ k_i\ne k_j\bigg\},$$

$\alpha(p)=(\alpha_1,\dots,\alpha_p)\in\mathbb{Z}_+^p$ и $|\alpha(p)|=\alpha_1+\ldots+\alpha_p$, по нормам

$$|||u|||_m=\bigg\{\sum_{i=0}^{m-1}\bigg(\sup_{0<t<T}\bigg|\frac{d^iu(t)}{dt^i}\bigg|^2_{2m-2-2i,t}+\bigg\|\frac{d^iu}{dt^i}\bigg\|^2_{2m-1-2i}\bigg)\bigg\}^{1/2}.$$

При определении пространств E^m мы естественно предполагаем выполненными вложения $D(L_m) \subset \mathcal{E}^{m-1,2m-2}$, $m = 1, 2, \ldots$, где банаховы пространства $\mathcal{E}^{m-1,2m-2}$ – множества всех функций $u \in B([0, T[\,, H)$ с конечными нормами

$$|||u|||_{m-1,2m-2} = \left\{ \sup_{0<t<T} \sum_{i=0}^{m-1} \left| \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right|^2_{2m-2-2i,t} \right\}^{1/2}.$$

Здесь под производной du/dt понимается функция $du/dt \in W^{2m-4}(t)$, для которой

$$|A_1^{m-2}(t)[\Delta u(t)/\Delta t - du(t)/dt]| \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0$$

при почти всех $t \in]0, T[$. Производные высших порядков определяются аналогичным образом рекуррентно (см. [1]). В случае переменных областей определения $D(A_k(t))$ эти вложения не всегда выполняются [1].

Пространствами правых частей уравнений (1) и начальных условий (2) являются гильбертовы пространства $F^m = \mathcal{H}^{-1} \times W^{2m-2}(0) \times \ldots \times W^2(0) \times H$ – множества всех элементов $\mathcal{F} = \{f, \varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\} \in F^m$ с конечными эрмитовыми нормами $\langle \|\mathcal{F}\| \rangle_m = \{\|A_1^{-1/2}(t)f\|_0^2 + \sum_{j=0}^{m-1} |\varphi_j|^2_{2m-2-2j,0}\}^{1/2}$, где гильбертово пространство $\mathcal{H}^{-1} = L_2(\,]0, T[\,, W^{-1}(t))$ – замыкание пространства $\mathcal{H}$ по эрмитовой норме $\|f\|_{-1} = \|A_1^{-1/2}(t)f\|_0$ и $A_1^{-1/2}(t)$ – обратные операторы к $A_1^{1/2}(t)$, $t \in [0, T[$.

Задачам Коши (1), (2) соответствуют линейные неограниченные операторы

$$L_m \equiv \{\mathcal{L}_m(t), l_0, \ldots, l_{m-1}\} : \ E^m \supset D(L_m) \to F^m$$

с плотными областями определения $D(L_m)$, $m = 1, 2, \ldots$ Воспользуемся следующим достаточным условием замыкаемости.

Лемма 1. *Пусть выполняются условия I, III–V. Если справедливы вложения* $D(L_m) \subset \mathcal{E}^{m-1,2m-2}$, *то операторы* L_m, $m = 1, 2, \ldots$, *замыкаемы.*

Доказательство. Сначала покажем плотность множества $\mathcal{D} = \{v \in \mathcal{H} : \ v \in D(A_1(t))$ при почти всех $t \in [0, T[\,;\ dv/dt \in \mathcal{H},\ v(0) = v(T) = 0\}$ в $\mathcal{H}^1$. Пусть существует некоторая функция $0 \neq w \in \mathcal{H}^1$, при которой верно равенство $\int_0^T (A_1^{1/2}(t)w, A_1^{1/2}(t)v)\, dt = 0 \ \ \forall v \in \mathcal{D}$. Благодаря условию III сглаживающие операторы $B_\varepsilon^{-1}(t)$, $\varepsilon > 0$, при почти всех t имеют в H ограниченную сильную производную $dB_\varepsilon^{-1}(t)/dt = \varepsilon B(t) B_\varepsilon^{-1}(t)(dB^{-1}(t)/dt) B(t) B_\varepsilon^{-1}(t) \in L_\infty(\,]0, T[\,, \mathcal{L}(H))$. Поэтому в предыдущем равенстве можно положить $v = B_\varepsilon^{-1}(t)h$, $\varepsilon > 0$, для всех $h \in \mathcal{H}$ таких, что $dh/dt \in \mathcal{H}$, $h(0) = h(T) = 0$, и прийти к равенствам $\int_0^T (A_1^{1/2}(t)w, A_1^{1/2}(t)B_\varepsilon^{-1}(t)h)m\, dt = 0$, $\varepsilon > 0$, которые в силу ограниченности операторов $A_1^{1/2}(t)B_\varepsilon^{-1}(t)$ в $\mathcal{H}$ распространяются предельным переходом на все $h \in \mathcal{H}$. Отсюда, в частности, при $h = w$ получаем равенства $\int_0^T (A_1^{1/2}(t)w, A_1^{1/2}(t)B_\varepsilon^{-1}(t)w)dt = 0$, $\varepsilon > 0$, предел которых при $\varepsilon \to 0$, согласно свойству (4), равен $\|A_1^{1/2}(t)w\|_0^2 = 0$. Отсюда следует, что $w = 0$.

Теперь пусть, согласно критерию замыкаемости линейных операторов L_m, для последовательности $u_n \in D(L_m)$, $u_n \to 0$ в E^m, и $L_m u_n = \{\mathcal{L}_m(t)u_n, l_0 u_n, \ldots, l_{m-1}u_n\} \to \mathcal{F} = \{f, \varphi_0, \ldots, \varphi_{m-1}\}$ в F^m при $n \to \infty$. Ввиду ограниченности операторов $l_j : \ E^m \to W^{2m-2-2j}(0)$, $0 \le j \le m-1$, отсюда получаем, что $\varphi_j = 0$, $0 \le j \le m-1$. Значение $f(v)$ линейного непрерывного функционала $f \in \mathcal{H}^{-1}$ $\forall v \in \mathcal{D}$ после интегрирования по частям один раз по t равно

$$\int_0^T (A_1^{-1/2}(t)f, A_1^{1/2}(t)v)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T (\mathcal{L}_m(t)u_n, v)\, dt = -\lim_{n\to\infty} \int_0^T \left(\mathcal{M}_{m-1}(t) \cdots \mathcal{M}_1(t)u_n, \frac{dv}{dt} \right) dt +$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \int_0^T (A_m^{1/2}(t)\mathcal{M}_{m-1}(t) \cdots \mathcal{M}_1(t)u_n, A_m^{1/2}(t)v)\, dt = 0,$$

где $\mathcal{M}_k(t) = d/dt + \widetilde{A}_k(t)$, $1 \le k \le m$. Это означает, что $f = 0$, поскольку множество $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{H}^1$. Лемма 1 доказана.

Построим замыкания $\overline{L}_m: E^m \supset D(\overline{L}_m) \to F^m$ линейных операторов L_m, $m = 1, 2, \ldots$ К областям определения $D(\overline{L}_m)$ операторов $\overline{L}_m$ отнесем все те функции $u \in E^m$, для каждой из которых существуют такие последовательность $u_n \in D(L_m)$ и элемент $\mathcal{F} \in F^m$, что $|||u_n - u|||_m \to 0$ и $\langle\|L_m u_n - \mathcal{F}\|\rangle_m \to 0$ при $n \to \infty$. При этом полагаем $\overline{L}_m u = \lim\limits_{n\to\infty} L_m u_n = \mathcal{F}$, $m = 1, 2, \ldots$

Определение. Решения операторных уравнений $\overline{L}_m u = \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \in F^m$, $m = 1, 2, \ldots$, называются *сильными решениями* задач Коши (1), (2).

Выведем априорные оценки гладких решений $u \in D(L_m)$ задач Коши (1), (2).

Теорема 1. *Если выполняются условия I, IV–VI, существуют обратные операторы $A^{-1}(t) \in \mathcal{B}([0,T[\,, \mathcal{L}(H))$ при $m \ge 1$ операторов $A(t)$, у которых сильная производная $dA^{-1}(t)/dt \in L_\infty(]0,T[\,, \mathcal{L}(H, W^{2m-2}(t)))$ при $m > 2$, то существуют не зависящие от u постоянные $c_0(m) > 0$ такие, что*

$$|||u|||_m^2 \le c_0(m)\langle\|L_m u\|\rangle_m^2 \quad \forall u \in D(L_m), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Доказательство. Ввиду условий I и V введем операторы $\mathcal{M}_k(t) = d/dt + \widetilde{A}_k(t)$, $\mathcal{L}_k^{(n,s)}(t) = \mathcal{M}_n(t)\cdots\mathcal{M}_{k+1}(t)\mathcal{M}_{k-1}(t)\cdots\mathcal{M}_s(t)$, $1 \le s \le k \le n \le m$, $\mathcal{L}_k^{(k,k)}(t) = I$ и запишем $\mathcal{L}_m(t) = \mathcal{M}_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t) + \mathcal{P}_{k,m}(t)$, где, согласно неравенствам (5),

$$|\mathcal{P}_{k,m}(t)u|^2 \le \widetilde{c}_k \sum_{i=0}^{m-2} \left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{2m-2-2i,t}^2, \quad t \in [0,T[\,, \quad \forall u \in D(L_m), \tag{7}$$

постоянные $\widetilde{c}_k \ge 0$ не зависят от u и t.

Интегрируя один раз по частям, получаем тождества

$$|\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u|^2|_{t=\tau} + 2\int_0^\tau |A_k^{1/2}(t)\mathcal{L}^{(m,1)}(t)u|^2\,dt = 2\,\mathrm{Re}\int_0^\tau (\mathcal{L}_m(t)u, \mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u)\,dt -$$

$$-\,2\,\mathrm{Re}\int_0^\tau (\mathcal{P}_{k,m}(t)u, \mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u)\,dt + |\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u|^2|_{t=0} \quad \forall u \in D(L_m), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

В силу условия IV левые части тождеств (8) не меньше величины

$$|\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u|^2|_{t=\tau} + 2c_1\int_0^\tau |\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u|_{1,t}^2\,dt, \tag{9}$$

где постоянная $c_1 > 0$ не зависит от u, t и k. Благодаря неравенствам (3) справедлива

Лемма 2. *Если выполняются предположения теоремы 1, то существуют не зависящие от u и t постоянные $c_2, c_4 > 0$ и $c_3, c_5 \ge 0$ такие, что $\forall u \in D(L_m)$ и $\forall t \in [0,T[$*

$$\sum_{k=1}^m |\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u|^2 \ge c_2 \sum_{i=0}^{m-1}\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{2m-2-2i,t}^2 - c_3\sum_{i=0}^{m-3}\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{2m-4-2i,t}^2, \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^m |\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)u|_{1,t}^2 \ge c_4 \sum_{i=0}^{m-1}\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{2m-1-2i,t}^2 - c_5\sum_{i=0}^{m-3}\left|\frac{d^i u}{dt^i}\right|_{2m-3-2i,t}^2. \tag{11}$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 3 в [1].

Просуммируем неравенства (8) по всем $k=\overline{1,m}$ с учетом оценок (9), применим в левых частях полученных неравенств оценки (10) и (11), а в интегралах правых частей неравенства Шварца, Коши–Буняковского, δ-неравенство $2ab\le\delta a^2+\delta^{-1}b^2$ $\forall\delta>0,$ оценки (7) и найдем не зависящие от u и t постоянные $c_6,c_7,c_8>0$ такие, что

$$S\equiv c_2\sum_{i=0}^{m-1}\biggl(\biggl|\frac{d^iu}{dt^i}\biggr|^2_{2m-2-2i,t}\biggr|_{t=\tau}+\int\limits_0^\tau\biggl|\frac{d^iu}{dt^i}\biggr|^2_{2m-1-2i,t}dt\biggr)\le c_6\int\limits_0^\tau\sum_{i=0}^{m-1}\biggl|\frac{d^iu}{dt^i}\biggr|^2_{2m-2-2i,t}dt+$$

$$+c_7\int\limits_0^\tau|A_1^{-1/2}(t)\mathcal{L}_m(t)u|^2\,dt+c_8\sum_{j=0}^{m-1}|l_ju|^2_{2m-2-2j,0}+c_3\sum_{i=0}^{m-3}\biggl|\frac{d^iu}{dt^i}\biggr|^2_{2m-4-2i,t}\biggr|_{t=\tau}.$$

Воспользуемся установленными в [1] интерполяционными неравенствами

$$\biggl|\frac{d^iu}{dt^i}\biggr|^2_{2m-4-2i,t}\biggr|_{t=\tau}\le c_9\int\limits_0^\tau\biggl|\frac{d^{i+1}u}{dt^{i+1}}\biggr|^2_{2m-4-2i,t}dt+$$

$$+c_9(1+2\mathcal{M}_{(m-2-i)/m})\int\limits_0^\tau\biggl|\frac{d^iu}{dt^i}\biggr|^2_{2m-2-2i,t}dt+\biggl|\frac{d^iu}{dt^i}\biggr|^2_{2m-4-2i,t}\biggr|_{t=0},\quad 0\le i\le m-2,\qquad(12)$$

где постоянные $c_9=\sup\limits_{0<t<T}\|A_1^{-1}(t)\|_{\mathcal{L}(H)}$ и $\mathcal{M}_{(m-2-i)/m}$ указаны в [1] при $\beta=1/m,$ и найдем не зависящую от u и t постоянную $c_{10}>0$ такую, что

$$S\le c_{10}\int\limits_0^\tau\sum_{i=0}^{m-1}\biggl|\frac{d^iu}{dt^i}\biggr|^2_{2m-2-2i,t}dt+$$

$$+c_7\int\limits_0^\tau|A_1^{-1/2}(t)\mathcal{L}_m(t)u|^2\,dt+(c_8+c_3c_9^2)\sum_{j=0}^{m-1}|l_ju|^2_{2m-2-2j,0}\quad\forall u\in D(L_m).\qquad(13)$$

Применим к неравенствам (13) известную лемму Гронуолла.

Лемма 3. *Если v и g – неотрицательные функции на $[0,T]$, причем v интегрируема, а g не убывает, то из неравенства $v(\tau)\le c\int_0^\tau v(t)\,dt+g(\tau)$ следует неравенство $v(\tau)\le e^{c\tau}g(\tau),$ $\tau\in]0,T]$.*

В результате придем к неравенствам

$$S\le e^{c_{11}\tau}\biggl(c_7\int\limits_0^\tau|A_1^{-1/2}(t)\mathcal{L}_m(t)u|^2\,dt+(c_8+c_3c_9^2)\sum_{j=0}^{m-1}|l_ju|^2_{2m-2-2j,0}\biggr),\qquad(14)$$

где $c_{11}=c_{10}/c_2$. Взяв в неравенствах (14) верхнюю грань по $\tau,$ получим неравенства (6) с постоянными $c_0(m)=\exp(c_{11}T)\max\{c_7,c_8+c_3c_9^2\}/c_2$ $\forall u\in D(L_m)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Вывод априорных оценок (6) для гладких решений $u\in D(L_m)$ задач Коши (1), (2) одновременно является доказательством вложений $D(L_m)\subset\mathcal{E}^{m-1,2m-2},$ $m=1,2,\ldots$

Доказательство этого факта аналогично обоснованию замечания 1 работы [1].

Из теоремы 1 вытекают априорные оценки сильных решений $u\in D(\overline{L}_m)$ задач Коши (1), (2).

Следствие 1. *Если выполняются предположения теоремы 1 и операторы L_m допускают замыкания, то*

$$|||u|||_m^2\le c_0(m)\langle\|\overline{L}_mu\|\rangle_m^2\quad\forall u\in D(\overline{L}_m),\quad m=1,2,\ldots\qquad(15)$$

Доказательство. Поскольку по замечанию 1 оценки (6) гарантируют вложение $D(L_m) \subset \subset \mathcal{E}^{m-1,2m-2}$, $m = 1, 2, \ldots$, то неравенство (15) для $u \in D(\overline{L}_m)$ получается предельным переходом в (6) для $u_n \in D(L_m)$ таких, что $u_n \to u$ в E^m и $L_m u_n \to \overline{L}_m u$ в F^m при $n \to \infty$. Следствие 1 доказано.

3. Теорема существования сильных решений. Из следствия 1 вытекает, что если сильные решения задач Коши (1), (2) существуют, то они единственны и непрерывно зависят от f и φ_j на множествах значений $R(\overline{L}_m)$ операторов $\overline{L}_m$. О разрешимости в сильном смысле задач Коши (1), (2) $\forall \mathcal{F} \in F^m$ говорит

Теорема 2. *Если выполняются предположения теоремы 1 и условие III, то для каждых $f \in \mathcal{H}^{-1}$ и $\varphi_j \in W^{2m-2-2j}(0)$, $0 \le j \le m-1$, существует сильное решение $u \in E^m$ задач Коши (1), (2), удовлетворяющее неравенствам*

$$|||u|||_m^2 \le c_0(m)\left(\|A_1^{-1/2}(t)f\|_0^2 + \sum_{j=0}^{m-1} |\varphi_j|^2_{2m-2-2j,0}\right), \quad m = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Доказательство. Линейные операторы L_m замыкаемы по лемме 1, так как ввиду замечания 1 оценки (6) обеспечивают вложения $D(L_m) \subset \mathcal{E}^{m-1,2m-2}$, $m = 1, 2, \ldots$ Доказательство равенств $R(\overline{L}_m) = F^m$ осуществим индукцией по m. При $m = 1$ уравнение $\overline{L}_1 u = \mathcal{F}$ в силу условия III разрешимо при $\forall \mathcal{F} \in F^1$ [3, 4]. Однако наши пределы (4) не совпадают с соответствующими пределами в [3, 4], поэтому нам придется указать на новые моменты доказательства плотности в $\mathcal{H}^{-1}$ множества значений $R(L_1)$ оператора L_1 на области $D_0(L_1) = \{u \in D(L_1) :\ u(0) = 0\}$.

Итак, пусть для некоторой функции $0 \ne v \in \mathcal{H}^1$ верны тождества

$$\int\limits_0^T (\mathcal{M}_k(t)u, v)\, dt = 0 \quad \forall u \in D_0(L_1), \quad 1 \le k \le m. \tag{17}$$

Полагая в тождествах (17) $u = B_\varepsilon^{-1}(t)h$ для всех $h \in \mathcal{H}$, таких, что $dh/dt \in \mathcal{H}$ и $h(0) = 0$, получаем равенства

$$\int\limits_0^T \left(\frac{dh}{dt}, B_\varepsilon^{-1}(t)v\right) dt = -\int\limits_0^T \left(\frac{dB_\varepsilon^{-1}(t)}{dt} h, v\right) dt - \int\limits_0^T (A_k(t)B_\varepsilon^{-1}(t)h, v)\, dt, \tag{18}$$

из которых вытекает, что функция $B_\varepsilon^{-1}(t)v$ имеет первую производную по t в $\mathcal{H}$ и обращается в нуль при $t = T$. Тогда (18) интегрируем один раз по частям, распространяем полученные равенства предельным переходом на все функции $h \in \mathcal{H}$, полагаем $h = v$, берем удвоенную вещественную часть и приходим к тождествам

$$-2\,\mathrm{Re} \int\limits_0^T \left(v, \frac{d}{dt} B_\varepsilon^{-1}(t)v\right) dt + 2\int\limits_0^T (A_k(t)B_\varepsilon^{-1}(t)v, v)\, dt = -2\int\limits_0^T \left(\frac{dB_\varepsilon^{-1}(t)}{dt} v, v\right) dt. \tag{19}$$

Здесь интегрирование по частям в первом интеграле затруднено тем, что производная dv/dt может не существовать в $\mathcal{H}$. Поэтому для интегрирования по частям в первом интеграле (19) используем следующую лемму из [5].

Лемма 4. *Пусть E_1, F_1 и G_1 – банаховы пространства, $T_1 :\ E_1 \to F_1$ – линейный ограниченный оператор и $S_1 :\ F_1 \to G_1$ – линейный замкнутый оператор с плотной областью определения. Если область определения произведения S_1T_1 операторов T_1 и S_1 плотна в E_1, то его сопряженный оператор $(S_1T_1)^*$ равен слабому замыканию произведения $T_1^*S_1^*$ их сопряженных операторов.*

Применим лемму 4 в банаховых пространствах $E_1 = F_1 = \mathcal{H}$ и $G_1 = \mathcal{H} \times H$ к операторам $T_1 u = B_\varepsilon^{-1}(t)u$ и $S_1 g = \{dg/dt, g(0)\}$ с областью определения $D(S_1) = \{g \in \mathcal{H} : \ dg/dt \in \mathcal{H}, g(T) = 0\}$ в первых двух членах выражения

$$-\int_0^T \left(v, \frac{d}{dt} B_\varepsilon^{-1}(t)v\right) dt - (v, B_\varepsilon^{-1}(t)v)|_{t=0} + (v, B_\varepsilon^{-1}(t)v)|_{t=0} \tag{20}$$

и убедимся в том, что это выражение можно записать в виде

$$\int_0^T \left(\frac{d}{dt} B_\varepsilon^{-1}(t)v, v\right) dt - \int_0^T \left(\frac{dB_\varepsilon^{-1}(t)}{dt} v, v\right) dt + (v, B_\varepsilon^{-1}(t)v)|_{t=0}, \tag{21}$$

поскольку сопряженными операторами являются операторы $T_1^* = T_1$, $S_1^*(\{p, p(0)\}) = -dp/dt$, $D(S_1^*) = \{\{p, p(0)\} \in G_1 : \ dp/dt \in \mathcal{H}\}$ и $\overline{T_1^* S_1^*} v = -d(B_\varepsilon^{-1}(t)v)/dt + (dB_\varepsilon^{-1}(t)/dt)v$. Отметим, что включение $v \in D((S_1T_1)^*)$, где $D((S_1T_1)^*)$ – область определения сопряженного оператора $(S_1T_1)^*$, выводится стандартным способом из (18).

Таким образом, интегрированием по частям в (19), согласно выражениям (20) и (21), получаем тождества

$$2\int_0^T (A_k(t)B_\varepsilon^{-1}(t)v, v)\, dt + (v, B_\varepsilon^{-1}(t)v)|_{t=0} = -\int_0^T \left(\frac{dB_\varepsilon^{-1}(t)}{dt} v, v\right) dt, \quad 1 \le k \le m,$$

переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ в которых в силу свойств (4) и известного свойства [1]: $\forall t \in [0, T[$ при $\varepsilon \to 0$ соотношение $|B_\varepsilon^{-1}(t)g - g| \to 0 \ \ \forall g \in H$ приводит к неравенствам $2\|A_k^{1/2}(t)v\|_0^2 \le 0$, $1 \le k \le m$. Последние означают, что из тождеств (17) следует равенство $v = 0$. Тогда справедливость предположения индукции при $m = 1$ вытекает из равенств $F^1 = \overline{R(L_1)} = R(\overline{L}_1)$.

Сделаем индуктивное предположение о разрешимости уравнений $\overline{L}_{j-1}u = \mathcal{F}$ при $\forall \mathcal{F} \in F^{j-1}$ и любом составе и порядке различных множителей $\mathcal{M}_k(t)$ в $\mathcal{L}_{j-1}(t)$, $j \le m$, и докажем разрешимость уравнений $\overline{L}_m u = \mathcal{F}$ в E^m при $\forall \mathcal{F} \in F^m$, $m = 2, \ldots$

Рассмотрим линейные операторы

$$L_k^{(m,1)} \equiv \{\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t), l_0, \ldots, l_{m-2}\} : \ E^{m-1} \supset D(L_{m-1}) \to F^{m-1}$$

в пространствах $L_k^{(m,1)} : \ E^m \supset D(L_m) \to E^{0,m} = \mathcal{H} \times W^{2m-2}(0) \times \ldots \times W^4(0) \times W^2(0)$, $1 \le k \le m$, где $E^{0,m}$ – банаховы пространства с нормами $|||u|||_{0,m} = (\|u\|_0^2 + \sum_{j=0}^{m-2} |l_j u|^2_{2m-2-2j,0})^{1/2}$. Их замыканиями являются сужения замыканий $\overline{L_k^{(m,1)}}$ на E^m. Рассмотрим еще линейные операторы $M_k \equiv \{\mathcal{M}_k(t), I, \ldots, I, l_0\} : \ E^{0,m} \supset D(L_1) \times W^{2m-2}(0) \times \ldots \times W^4(0) \times W^2(0) \to F^m$, замыкания которых $\overline{M}_k$ по доказанному выше имеют ограниченные обратные $\overline{M}_k^{-1} : \ F^m \to E^{0,m}$. В силу оценок (7) решения уравнений $\overline{L}_m u = \mathcal{F}$ при $\mathcal{F} \in F^m$ одновременно являются решениями уравнений $\overline{M_k L_k^{(m,1)}} u = \mathcal{F}_k$ при $\mathcal{F}_k = \mathcal{F} + \{[\mathcal{M}_k(t)\mathcal{L}_k^{(m,1)}(t) - \mathcal{L}_k(t)]u, 0, \ldots, 0\} \in F^m$, $1 \le k \le m$. Воспользуемся следующей леммой.

Применяя лемму 5 из работы [1] к операторам $S = L_k^{(m,1)}$ и $P = M_k$ в пространствах $X = E^m$, $Y = E^{0,m}$ и $Z = F^m$, получаем вложения $\overline{M_k L_k^{(m,1)}} \subset \overline{M_k}\,\overline{L_k^{(m,1)}}$, $1 \le k \le m$. Отсюда заключаем, что уравнения $\overline{M_k L_k^{(m,1)}} u = \mathcal{F}_k \ \ \forall u \in D(\overline{L}_m)$ можно записать в виде $\overline{M}_k \overline{L_k^{(m,1)}} u = \mathcal{F}_k$, $1 \le k \le m$. По доказанному последние уравнения при $\forall \mathcal{F}_k \in F^m$ имеют решения $\overline{L_k^{(m,1)}} u = \overline{M}_k^{-1} \mathcal{F}_k \in E^{0,m}$, а по индуктивному предположению последние уравнения имеют решения $u = \overline{L_k^{(m,1)}}^{-1}\overline{M}_k^{-1}\mathcal{F}_k \in E^{m-1}$, где $\overline{L_k^{(m,1)}}^{-1}$ – обратные операторов $\overline{L_k^{(m,1)}}$, $1 \leq k \leq m$. Докажем, что $u \in E^m$.

Убедимся в том, что гладкость этого решения $u \in E^{m-1}$ повышается на единицу за счет повышения на единицу гладкости правых частей $\overline{M}_k^{-1}\mathcal{F}_k \in E^{0,m}$ вместо $\overline{M}_k^{-1}\mathcal{F}_k \in F^{m-1}$, $1 \leq k \leq m$. Из леммы 2 с помощью неравенств (12), леммы 3 и предельного перехода выводятся неравенства

$$c_{12}|||u|||_m^2 \leq \sum_{k=1}^m |||\overline{L_k^{(m,1)}}u|||_{0,m}^2 \quad \forall u \in E^m, \quad c_{12} > 0,$$

которые означают, что операторы $\overline{L_k^{(m,1)}}$ гомеоморфно отображают E^m на $\overline{L_k^{(m,1)}}(E^m) \subset E^{0,m}$. Поэтому для завершения доказательства включения $u \in E^m$ остается доказать равенство $\overline{L_k^{(m,1)}}(E^m) = E^{0,m}$, для чего в свою очередь достаточно убедиться в том, что для любого Φ_k из некоторого плотного множества в $E^{0,m}$ уравнения $\overline{L_k^{(m,1)}}v = \Phi_k$, $1 \leq k \leq m$, имеют решения $v \in E^m$.

В силу оценок (7) при $m-1$ вместо m решения $v \in E^{m-1}$ уравнений $\overline{L_k^{(m,1)}}v = \Phi_k \in F^{m-1}$ одновременно являются решениями уравнений $\overline{L_{m-2}^{(k)}M_{k-1}}v = \widetilde{\Phi}_{k-1}$, где $L_{m-2}^{(k)} = L_k^{(m,k)}L_{k-1}^{(k-1,1)}$ и $\widetilde{\Phi}_{k-1} = \Phi_k + \{[\mathcal{L}_k^{(m,k)}(t)\mathcal{L}_{k-1}^{(k-1,1)}(t)\mathcal{M}_{k-1}(t) - \mathcal{L}_k^{(m,1)}(t)]v, 0, \ldots, 0\} \in F^{m-1}$ при $2 \leq k \leq m$, и уравнения $\overline{L_{m-2}^{(1)}M_m}v = \widetilde{\Phi}_m$, где

$$L_{m-2}^{(1)} = L_m^{(m,2)}, \quad \widetilde{\Phi}_m = \Phi_1 + \{[\mathcal{L}_m^{(m,2)}(t)\mathcal{M}_m(t) - \mathcal{L}_1^{(m,1)}(t)]v, 0, \ldots, 0\} \in F^{m-1}$$

при $k = 1$. Требуемое повышение гладкости решений $v \in E^{m-1}$ операторов $\overline{L_k^{(m,1)}}$ будет получено ниже за счет повышения гладкости решений операторов $\overline{M}_k$, $1 \leq k \leq m$.

Пусть гильбертово пространство $\widetilde{\mathcal{H}}^{1,1}$ – замыкание множества $D(L_1)$ по эрмитовой норме $\|u\|_{1,1} = (\|du/dt\|_0^2 + \|u\|_1^2)^{1/2}$. В дальнейшем для упрощения записи введем обозначения $\mathcal{M}_0(t) = \mathcal{M}_m(t)$, $M_0 = M_m$ и $\widetilde{\Phi}_0 = \widetilde{\Phi}_m$. Если $v \in E^{m-1}$ – решение уравнений $\overline{L_{m-2}^{(k)}M_{k-1}}v = \widetilde{\Phi}_{k-1}$ при $\widetilde{\Phi}_{k-1} \in F^{1,m} = \widetilde{\mathcal{H}}^{1,1} \times W^{2m-2}(0) \times \ldots \times W^4(0) \times W^2(0)$, то $M_k\overline{L_{m-2}^{(k)}M_{k-1}}v = M_k\widetilde{\Phi}_{k-1} \in F^m$, где линейные операторы $M_k \equiv \{\mathcal{M}_k(t), I, \ldots, I, l_0\} : F^{1,m} \supset D(L_1) \times W^{2m-2}(0) \times \cdots \times W^4(0) \times \times W^2(0) \to F^m$, $1 \leq k \leq m$, ограничены.

Применяя лемму 6 из работы [1] к операторам $P = L_{m-2}^{(k)}M_{k-1}$ и $S = M_k$ в банаховых пространствах $X = E^m$, $Y = F^{1,m}$ и $Z = F^m$, получаем вложения

$$M_k\overline{L_{m-2}^{(k)}M_{k-1}} \subset \overline{M_k(L_{m-2}^{(k)}M_{k-1})}, \quad 1 \leq k \leq m. \tag{22}$$

Применяя лемму 5 к операторам $S = M_{k-1} \equiv \{M_{k-1}(t), l_0\} : E^m \supset D(L_m) \to E^{m-1} \times W^{2m-2}(0)$ и $P = M_kL_{m-2}^{(k)} \equiv \{\mathcal{M}_k(t)\mathcal{L}_{m-2}^{(k)}(t), I, l_0, \ldots, l_{m-2}\} : E^{m-1} \times W^{2m-2}(0) \supset D(L_{m-1}) \times W^{2m-2}(0) \to \to F^m$, где $\mathcal{L}_{m-2}^{(k)}(t)$ – первые координаты-операторы векторов-операторов $L_{m-2}^{(k)}$, устанавливаем справедливость вложений

$$\overline{(M_kL_{m-2}^{(k)})M_{k-1}} \subset \overline{M_kL_{m-2}^{(k)}}\,\overline{M_{k-1}}, \quad 1 \leq k \leq m. \tag{23}$$

Из (22) и (23) выводим уравнения $\overline{M_kL_{m-2}^{(k)}}\,\overline{M_{k-1}}v = M_k\widetilde{\Phi}_{k-1}$, $1 \leq k \leq m$, которые при $n = k-1$ по предположению индукции имеют решения $\overline{\mathcal{M}_n(t)}v \in E^{m-1}$, $1 \leq n \leq m$.

Аналогично неравенствам (10), (11) $\forall v \in D(L_m)$ и $\forall t \in [0, T[$ доказываются неравенства

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{m-2} \left|\frac{d^i\mathcal{M}_k(t)v}{dt^i}\right|^2_{2m-4+l-2i,t} \geq c_{13+2l}\sum_{i=0}^{m-1}\left|\frac{d^iv}{dt^i}\right|^2_{2m-2+l-2i,t} - c_{14+2l}\sum_{i=0}^{m-3}\left|\frac{d^iv}{dt^i}\right|^2_{2m-4+l-2i,t}, \quad l = 0, 1,$$

где постоянные $c_{13}, c_{15} > 0$ и $c_{14}, c_{16} \geq 0$ не зависят от v и t. С помощью интерполяционных неравенств (12) и леммы 3 отсюда $\forall v \in D(L_m)$ выводятся неравенства

$$c_{17}|||v|||_m^2 \leq \sum_{k=1}^{m} |||\mathcal{M}_k(t)v|||_{m-1}^2 + \sum_{j=0}^{m-2} |l_j v|_{2m-4-2i,0}^2, \quad c_{17} > 0.$$

Эти неравенства распространяются предельным переходом на все решения искомых уравнений с правыми частями $\mathcal{M}_k(t)\widetilde{\Phi}_{k-1}$, для которых по доказанному выше $\overline{\mathcal{M}_k(t)}v \in E^{m-1}$, $1 \leq k \leq m$. Отсюда заключаем, что действительно $v \in E^m$, так как уже $v \in E^{m-1}$. Таким образом, ранее найденное решение $u \in E^{m-1}$ исходных уравнений $\overline{L}_m u = \mathcal{F}$ $\forall \mathcal{F} \in F^m$ принадлежит пространствам E^m, $m = 2, 3, \ldots$

Более того, попутно индукцией по m доказано, что

$$u = \overline{L}_m^{-1}\mathcal{F} = \overline{M}_1^{-1} \cdots \overline{M}_m^{-1}\mathcal{F} \in E^m \quad \forall \mathcal{F} \in F^m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

Неравенства (16) следуют из неравенств (15). Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Тем же способом утверждение теоремы 1 (возможно, с большими $c_0(m)$) и методом продолжения по параметру утверждение теоремы 2 распространяются на уравнения с младшими частями

$$\mathcal{L}_m(t)u + \sum_{k=0}^{m-1} B_k(t)\frac{d^k u}{dt^k} = f, \quad t \in]0, T[, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

если $B_k(t) \in L_\infty(]0, T[, \mathcal{L}(W^{2m-1-2k}(t), H))$, $0 \leq k \leq m-1$. Младшие члены уравнений (25) следует рассматривать не только как дополнительные слагаемые, которые подчинены главным частям этих уравнений, но и как остаток факторизации произвольных дифференциально-операторных уравнений.

Замечание 3. Из доказательств теорем 1 и 2 следует, что если все $\widetilde{A}_k(t) = \widetilde{A}_k$ не зависят от t и коммутируют друг с другом, то отпадает необходимость в интерполяционных неравенствах (12) и, следовательно, условие $dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0, T[, (W^{2m-2}(t), H))$ при $m > 2$ в этих теоремах и следствии 1 может не выполняться, если даже области определения $D(A_k(t))$ их сужений $A_k(t)$ зависят от t. Указанное условие, как правило выполняется даже тогда, когда все $\widetilde{A}_k(t)$ гладко зависят от t, не коммутируют друг с другом, но зато области определения $D(A_k(t)) = D(\widetilde{A}_k)$ не зависят от t. Более обстоятельный анализ условия, аналогичного данному, имеется в п. 6 работы [1].

Замечание 4. Можно доказать, что в случае не зависящих от t областей определения $D(A_k(t)) = D(\widetilde{A}_k)$ справедлива теорема существования и единственности гладких решений $u \in D(L_m)$ задач Коши (1), (2), для которых выполняются неравенства

$$\sup_{0<t<T} \sum_{i=0}^{m-1} \left|\frac{d^i u(t)}{dt^i}\right|_{2m-1-2i,t}^2 + \sum_{i=0}^{m} \left\|\frac{d^i u}{dt^i}\right\|_{2m-2i}^2 \leq c_{18}(m)\left(\|f\|_0^2 + \sum_{j=0}^{m-1} |\varphi_j|_{2m-1-2j,0}^2\right),$$

где постоянные $c_{18}(m) > 0$, $m = 1, 2, \ldots$, без требования эквивалентности

$$|A_k(t)u| \sim |A_s(t)u - A_k(t)u| \quad \forall u \in D(A_k(t)), \quad t \in [0, T[, \quad 1 \leq s \neq k \leq m.$$

Возникает вопрос, справедливы ли теоремы существования, единственности и непрерывной зависимости (от правой части и начальных данных) сильных решений $u \in D(\overline{L}_m)$ задач Коши (1), (2) без требования этой эквивалентности в случае зависящих от t областей определения $D(A_k(t))$.

4. Примеры смешанных задач. Докажем корректность в сильном смысле новых смешанных задач для параболических уравнений в частных производных с гладко зависящими от t коэффициентами в граничных условиях.

В ограниченной области $G =]0,T[\times]0,l[$ переменных t и x рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\prod_{k=0}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_k^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x) + \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{2m-1-2k} b_{k,i}\frac{\partial^{i+k}u(t,x)}{\partial x^i\partial t^k} = f(t,x), \quad (t,x)\in G, \tag{26}$$

где постоянные $a_k > 0$, $1\le k\le m$, $a_1 = 1$, различны и функции $b_{k,i} = b_{k,i}(t,x)\in L_\infty(G)$, $0\le i\le 2m-1-2k$, $1\le k\le m-1$, с граничными условиями

$$\partial^{2i+1}u(t,0)/\partial x^{2i+1} - \beta(t)\partial^{2i}u(t,0)/\partial x^{2i} = 0,$$

$$\partial^{2i+1}u(t,l)/\partial x^{2i+1} + \tilde\beta(t)\partial^{2i}u(t,l)/\partial x^{2i} = 0, \quad t\in[0,T[\,, \quad 0\le i\le m-1, \tag{27}$$

где неотрицательные функции $\beta(t)$, $\tilde\beta(t)$ одновременно не обращаются в нуль, т.е.

$$\beta(t)+\tilde\beta(t)\ne 0 \quad \forall t\in[0,T[\,,$$

и один раз непрерывно дифференцируемы по t, т.е. $\beta(t),\tilde\beta(t)\in C^{(1)}[0,T[\,$, и с начальными условиями

$$\partial^j u(0,x)/\partial t^j = \varphi_j(x), \quad x\in]0,l[\,, \quad 0\le j\le m-1, \quad m=1,2,\ldots \tag{28}$$

Принимая во внимание замечания 1 и 3, для этого достаточно проверить выполнимость предположений теорем 1 и 2 для смешанных задач (26)–(28).

I′. В гильбертовом пространстве $H = L_2(0,l)$ при каждом $t\in[0,T[$ все дифференциальные операторы $A_k(t)$, полученные сужением дифференциальных выражений $\tilde A_k u(t,x) = -a_k^2\partial^2 u(t,x)/\partial x^2$, $t\in[0,T[\,$, на области определения $D(A_k(t)) = \{u\in L_2(0,l):\ u(x)\in(27)$ при $m=1$; $\tilde A_k(t)u(x)\in L_2(0,l)\}$, $t\in[0,T[\,$, являются самосопряженными в $L_2(0,l)$, так как они очевидно симметричны в $L_2(0,l)$ и на $L_2(0,l)$ имеют ограниченные обратные

$$A_k^{-1}(t)g = -\int_0^x (x-s)g(s)\,ds + \mathcal{A}_k(t)\int_0^l g(s)\,ds + \mathcal{B}_k(t)x\int_0^l g(s)\,ds +$$

$$+\,\mathcal{C}_k(t)\int_0^l (l-s)g(s)\,ds + \mathcal{D}_k(t)x\int_0^l (l-s)g(s)\,ds,$$

где $\mathcal{A}_k(t) = a_k^{-2}/(\beta+\tilde\beta+l\beta\tilde\beta)$, $\mathcal{B}_k(t) = \beta\mathcal{A}_k(t)$, $\mathcal{C}_k(t) = \tilde\beta\mathcal{A}_k(t)$, $\mathcal{D}_k(t) = \beta\tilde\beta\mathcal{A}_k(t)$. При каждом $t\in[0,T[$ все операторы $A_k(t)$, очевидно, являются положительно-определенными в $L_2(0,l)$.

IV′. Справедливость условия IV для операторов $A_k(t)$ очевидна.

VI′. Неравенства (4) выполняются в силу коммутируемости друг с другом всех операторов $A_k(t)$.

III′. При каждом $t\in[0,T[$ за операторы $B(t)$ возьмем операторы $A_1(t)$. Ограниченность их обратных операторов $B^{-1}(t) = A_1^{-1}(t)$ в $L_2(0,l)$ следует из неравенств $\|A_1^{-1}(t)g\|_{0,\Omega}^2 \le c_{19}\|g\|_{0,\Omega}^2$ $\forall g\in L_2(0,l)$, $t\in[0,T[\,$, где $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ – норма в $L_2(\Omega)$, множество $\Omega =]0,l[$ и постоянная $c_{19} = l^2\sup\limits_{0<t<T}[l^2+3(1+l\beta)^2\mathcal{A}_1^2(t)+l^2(1+l\beta)^2\mathcal{C}_1^2(t)]$. Ограниченность всех операторов $A_k(t)B^{-1}(t) = A_k(t)A_1^{-1}(t) = a_k I$ в $L_2(0,l)$ очевидна. Операторы $B^{-1}(t) = A_1^{-1}(t)$, $t\in[0,T[\,$, имеют в $L_2(0,l)$ ограниченную сильную производную по t

$$\frac{dA_1^{-1}(t)}{dt}g = \dot{\mathcal{A}}_1(t)\int_0^l g(s)\,ds + \dot{\mathcal{B}}_1(t)x\int_0^l g(s)\,ds + \dot{\mathcal{C}}_1(t)\int_0^l (l-s)g(s)\,ds + \dot{\mathcal{D}}_1(t)x\int_0^l (l-s)g(s)\,ds,$$

где точками над функциями обозначены первые производные по t данных функций, так как

$$\|(dA_1^{-1}(t)/dt)g\|^2_{0,\Omega} \le c_{20}\|g\|^2_{0,\Omega} \quad \forall g \in L_2(0,l), \quad t \in [0,T[\,,$$

$$c_{20} = 4l^2 \sup_{0<t<T}\left[\dot{\mathcal{A}}_1^2(t) + \frac{l^2}{3}\dot{\mathcal{B}}_1^2(t) + \frac{l^2}{3}\dot{\mathcal{C}}_1^2(t) + \frac{l^4}{9}\dot{\mathcal{D}}_1^2(t)\right].$$

Равномерно по t для них существует первый предел из (4): для любых $u \in W^1(t) = D(A_1^{1/2}(t))$ при $\varepsilon \to 0$

$$\left(\frac{dA_{1,\varepsilon}^{-1}(t)}{dt}u, u\right) = \left(\varepsilon A_1(t)A_{1,\varepsilon}^{-1}(t)\frac{dA_1^{-1}(t)}{dt}A_1(t)A_{1,\varepsilon}^{-1}(t)u, u\right) =$$

$$= \left(\frac{dA_1^{-1}(t)}{dt}[\varepsilon^{1/2}A_1^{1/2}(t)A_{1,\varepsilon}^{-1}(t)]A_1^{1/2}(t)u, [\varepsilon^{1/2}A_1^{1/2}(t)A_{1,\varepsilon}^{-1}(t)]A_1^{1/2}(t)u\right) \to 0,$$

где $A_{1,\varepsilon}^{-1}(t) = (I + \varepsilon A_1(t))^{-1}$, $\varepsilon > 0$, поскольку равномерно по t при $\varepsilon \to 0$ операторы $\varepsilon^{1/2}A_1^{1/2}(t)A_{1,\varepsilon}^{-1}(t) \to 0$ в норме пространства $\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(L_2(0,l))$. Здесь и далее гильбертовыми пространствами $W^1(t)$ являются замыкания множества всех функций $u \in W_2^2(0,l)$ по эрмитовым нормам

$$\|A_1^{1/2}(t)u\|^2_{0,\Omega} = \frac{1}{1+\tilde{\beta}(t)}\left(\left|\frac{\partial u(l)}{\partial x}\right|^2 + \tilde{\beta}(t)|u(l)|^2\right) +$$

$$+ \frac{1}{1+\beta(t)}\left(\left|\frac{\partial u(0)}{\partial x}\right|^2 + \beta(t)|u(0)|^2\right) + \left\|\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right\|^2_{0,\Omega}, \quad t \in [0,T[\,.$$

Справедливость второго предела в (4) вытекает из перестановочности всех операторов $A_k(t)$ с $A_1(t)$ и равномерной по t сходимости при $\varepsilon \to 0$ нормы $|A_{1,\varepsilon}^{-1}(t)g - g| \to 0$ $\forall g \in L_2(0,l)$.

V$'$. В роли банаховых пространств V^{2i} выступают пространства Соболева $W_2^{2i}(0,l)$ со своими обычными нормами $\|\cdot\|_{2i,\Omega}$, $0 \le i \le m$, $V^2 = D(\tilde{A}_1)$, $V^0 = L_2(0,l)$. Поскольку операторы $\tilde{A}_k(t)$ не зависят от t, то $d^i\tilde{A}_k(t)/dt^i = 0$ для всех $i \le m-1$, $k \le m$.

В смешанных задачах (26)–(28) роль гильбертовых пространств $W^{2k}(t)$ играют замкнутые подпространства $W^{2k}_{2,\Delta(t)}(0,l)$ пространств Соболева $W_2^{2k}(0,l)$, а именно: множества

$$\{u \in W_2^{2k}(0,l):\ u \in (27),\ t \in [0,T[\,,\ 0 \le i \le k-1\},$$

наделенные индуцированными эрмитовыми нормами $\|\cdot\|_{2k,t,\Omega}$ из $W_2^{2k}(0,l)$, $0 \le k \le m$. Гильбертовыми пространствами $W^{2k+1}(t)$, $t \in [0,T[\,$, являются гильбертовы пространства $W^{2k+1}_{2,\Delta(t)}(0,l)$ – замыкания множеств $\{u \in W_2^{2k+2}(0,l):\ u \in (27),\ t \in [0,T[\,,\ i \le k\}$ по эрмитовым нормам $\|u(t,x)\|_{2k+1,t,\Omega} = \|A_1^{1/2}(t)\partial^{2k}u(t,x)/\partial x^{2k}\|_{0,\Omega}$, $0 \le k \le m-1$.

В качестве банаховых пространств $\mathcal{E}^m(G)$ сильных решений смешанных задач (26)–(28) возьмем замыкания пересечений замкнутых подпространств пространств Соболева–Слободецкого $\mathcal{D}(L_m) = \{u \in \tilde{\mathcal{D}}(L_m):\ u \in (27),\ t \in [0,T[\,\}$, где

$$\tilde{\mathcal{D}}(L_m) = \left\{u \in \bigcap_{i=0}^{m} W_2^{i,2m-2i}(G):\ v_s \equiv \frac{\partial^{2m-2-s}u}{\partial t^s\partial x^{2m-2-2s}},\ \frac{\partial v_s(t,0)}{\partial x} - \beta(t)v_s(t,0) =\right.$$

$$\left. = \frac{\partial v_s(t,l)}{\partial x} + \tilde{\beta}(t)v_s(t,l) = 0, \quad t \in [0,T[\,, \quad 0 \le s \le m-1\right\},$$

по нормам

$$|||u(t,x)|||_m = \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} \left(\sup_{0<t<T} \left\| \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right\|^2_{2m-2-2i,t,\Omega} + \int\limits_0^T \left\| \frac{d^i u(t)}{dt^i} \right\|^2_{2m-1-2i,t,\Omega} dt \right) \right\}^{1/2}.$$

В смешанных задачах (26)–(28) в качестве пространств правых частей $f(t,x)$ и начальных данных $\varphi_j(x)$ возьмем гильбертовы пространства

$$\mathcal{F}^m(G) = L_2(\,]0,T[\,, W^{-1}_{2,\Delta(t)}(0,l)) \times W^{2m-2}_{2,\Delta(0)}(0,l) \times \ldots \times W^2_{2,\Delta(0)}(0,l) \times L_2(0,l)$$

функций $\mathcal{F}(t,x) = \{f(t,x), \varphi_0(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)\}$ с эрмитовыми нормами

$$\langle\|\mathcal{F}(t,x)\|\rangle_m = \left\{ \int\limits_0^T \|\hat{\mathcal{A}}_1^{-1/2}(t) f(t,x)\|^2_{0,\Omega}\, dt + \sum_{j=0}^{m-1} \|\varphi_j\|^2_{2m-2-2j,0,\Omega} \right\}^{1/2},$$

где антидвойственные пространства $W^{-1}_{2,\Delta(t)}(0,l)$ к гильбертовым пространствам $W^1_{2,\Delta(t)}(0,l)$ представляют собой замыкания множества всех функций $f \in L_2(0,l)$ по эрмитовым нормам $\|f\|_{-1,t,\Omega} = \|\hat{\mathcal{A}}_1^{-1/2}(t) f(x)\|_{0,\Omega}$, $t \in [0,T[\,$, и операторы $\hat{\mathcal{A}}_1^{-1/2}(t)$ – квадратные корни операторов, дающих решение уравнения $-\partial^2 u(x)/\partial x^2 = g(x)$ с граничными условиями (27) при $m=1$.

Отметим, что младшие члены уравнений (26) представляют собой ограниченные операторы из $\mathcal{E}^m(G)$ в $\mathcal{F}^m(G)$, $m = 1,2,\ldots$

Таким образом, поскольку, согласно замечаниям 1 и 3, в случае постоянных коэффициентов a_k отпадает необходимость в условии $dA^{-1}(t)/dt \in \mathcal{B}([0,T[\,, \mathcal{L}(H, W^{2m-2}(t)))$ при $m > 2$, то из теоремы 1, ее следствия 1 и теоремы 2 вытекает теорема существования, единственности и непрерывной зависимости сильных решений задач (26)–(28).

Теорема 3. *При указанных выше ограничениях на коэффициенты* β, $\tilde{\beta}$ *и* $b_{k,i}$ *для каждых* $f(t,x) \in L_2(\,]0,T[\,, W^{-1}_{2,\Delta(t)}(0,l))$ *и* $\varphi_j(x) \in W^{2m-2-2j}_{2,\Delta(0)}(0,l)$, $0 \le j \le m-1$, *смешанные задачи (26)–(28) имеют единственное сильное решение* $u(t,x) \in C^{(m-1)}([0,T[\,, L_2(0,l)) \cap \mathcal{E}^m(G)$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$|||u(t,x)|||^2_m \le c_0(m) \langle\|\mathcal{F}(t,x)\|\rangle^2_m, \quad \mathcal{F}(t,x) = \{f(t,x), \varphi_0(x), \ldots, \varphi_{m-1}(x)\}, \quad m = 1,2,\ldots$$

Замечание 5. В смешанных задачах (26)–(28) требование $\beta(t) + \tilde{\beta}(t) \neq 0$ $\forall t \in [0,T[$ не является существенным и наложено лишь для упрощения проверки предположений теорем 1 и 2 и следствия 1. Если в доказательстве теоремы 3 вместо $A_1^{-1}(t)$ взять $(A_1(t) + \delta_1 I)^{-1}$, $\delta_1 > 0$, то в этом случае функции β и $\tilde{\beta}$ смогут одновременно обращаться в нуль и при этом утверждение теоремы 3 останется в силе.

Автор благодарит Н.И. Юрчука, которому он обязан четвертым замечанием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43. № 6. С. 795–812.
2. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., 1967.
3. *Ломовцев Ф.Е.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 7. С. 1132–1141.
4. *Ломовцев Ф.Е., Юрчук Н.И.* // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 10. С. 1754–1766.
5. *Ломовцев Ф.Е.* // Докл. АН БССР. 1983. Т. 27. № 3. С. 200–203.

Белорусский государственный университет,
г. Минск

Поступила в редакцию
28.03.2001 г.