Математические заметки, 2003, т. 74, №1, с. 132-135.

УДК 517.5

В. Г. Кротов

Когда ортогональный ряд является рядом Фурье

В работе [1] (см. также [2], гл. VI, §4) Орлич нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы ряд по ортонормированной системе (ОНС) был рядом Фурье функции из того или иного класса (см. замечание 1 ниже). Эти условия выражаются в терминах регулярных средних ортогонального ряда. Доказательство Орлича проходит на самом деле в гораздо более общей ситуации, которую мы сейчас опишем.

Пусть X — банахово пространство над полем скаляров $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), $\Phi = \{\phi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ — последовательность элементов из X , $\mathfrak{L}_\Phi$ — линейная оболочка этой системы, X_Φ — замыкание $\mathfrak{L}_\Phi$ по норме X. Будем предполагать, что существуют счетное множество $\Phi^* = \{\phi_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ и функция $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times \Phi^* \mapsto \mathbb{F}$, линейная и непрерывная по первой переменной, и удовлетворяющая условию

$$\langle \phi_k, \phi_i^* \rangle = \delta_{ik} \quad (i, k \in \mathbb{N}). \tag{1}$$

Условие (1) позволяет определить ряды Фурье

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \phi_k^* \rangle \phi_k\,, \quad x \in X\,.$$

Будем говорить, что выполнено условие (A), если для любой ограниченной последовательности $\{p_n\} \subset \mathfrak{L}_\Phi$ существуют $x \in X$ и $n_j \uparrow \infty$, для которых

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \quad \lim_{j\to\infty} \langle p_{n_j}, \phi_i^* \rangle = \langle x, \phi_i^* \rangle\,.$$

Условие (A) (представляющее собой рабочую форму условия "X — сопряженное пространство") является, по существу, доказательством приведенного ниже предложения, дающего критерий для свойства "ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\phi_k$ является рядом Фурье" в терминах матричных средних этого ряда.

Пусть $T = \{t_{nk}\} \subset \mathbb{F}$ — конечнострочная матрица (для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m_n \in \mathbb{N}$, что $t_{nk} = 0$ при $k > m_n$). Ниже будем использовать условие

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists \lim_{n\to\infty} t_{nk} = t_k, \quad \underline{\lim}_{k\to\infty} |t_k| > 0\,. \tag{2}$$

Матрица T порождает средние ряда Фурье

$$T_n x = \sum_{k=1}^{m_n} t_{nk} \langle x, \phi_k^* \rangle \phi_k\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Орлич рассматривал следующие формы свойства "ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\phi_k$ является рядом Фурье"[1]

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\phi_k \text{ — ряд Фурье элемента из } X \Longleftrightarrow \sup_n \left\| \sum_{k=1}^{m_n} t_{nk} a_k \phi_k \right\|_X < \infty, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\phi_k \text{ — ряд Фурье элемента из } X \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{m_n} t_{nk} a_k \phi_k \text{ сходится по норме } X\,. \tag{4}$$

В связи с этим естественно рассмотреть условие

$$\sup_n \|T_n\|_{X\to X} < \infty, \tag{5}$$

которое является необходимым для (3) и (4). Это следует из теоремы Банаха-Штейнгауза.

[1] Мы не останавливаемся на других формах критерия из работы Орлича [1] (см. также [2], гл. VI, §4). Они также могут быть рассмотрены при наших предположениях относительно матрицы T.

Для дальнейшего нам понадобится еще следующее понятие. Последовательность $\gamma = \{\gamma_k\} \subset \mathbb{F}$ называется мультипликатором для X, если для любого $x \in X$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \langle x, \phi_k^* \rangle \phi_k$$

является рядом Фурье некоторого элемента $x_\gamma \in X$. Класс всех мультипликаторов для X обозначаем через $\mathcal{M}(X)$. Если система $\{\phi_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ полна на X (то есть из $\langle x, \phi_k^* \rangle = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ следует $x = 0$), то $x_\gamma \in X$ определяется однозначно и в таком случае мультипликатор γ определяет линейный оператор

$$M_\gamma x = x_\gamma\,. \tag{6}$$

Предложение. *Пусть матрица T удовлетворяет условию (2), причем*

$$1/t = \{1/t_k\} \in \mathcal{M}(X),^{2} \tag{7}$$

Тогда

1) если выполнено условие (A), то (5)$\Longleftrightarrow$(3),

2) если Φ замкнута в X (т.е. $X_\Phi = X$), то (5)$\Longleftrightarrow$(4).

Доказательство. То, что из (3) и из (4) следует (5) уже отмечалось.

Импликация "слева направо" в (3) и (4) мгновенно вытекает из условия (5) (и замкнутости Φ в случае 2)).

Обратно, если последовательность средних $p_n = \sum_{k=1}^{m_n} t_{nk} a_k \phi_k$ ограничена, то используем условие (A): для некоторого $x \in X$ и любого $i \in \mathbb{N}$

$$t_i a_i = \lim_{j\to\infty} t_{n_j i} a_i = \lim_{j\to\infty} \left\langle \sum_{k=1}^{m_{n_j}} t_{n_j k} a_k \phi_k, \phi_i^* \right\rangle = \langle x, \phi_i^* \rangle\,.$$

В силу (7) $\{a_i\}$ — последовательность коэффициентов Фурье некоторого элемента из X. В случае 2) рассуждение такое же с $n_j = j$.

Приведем теперь следствие, относящееся к пространствам $L^p = L^p(S)$ (S — множество с σ-конечной мерой) и ортогональным (в смысле L^2) рядам.

Следствие 1. *Пусть $1 \le p \le \infty$ и $\Phi \subset L^p \cap L^{p'}$ — ОНС. Тогда если матрица T удовлетворяет условию (2) и $1/t \in \mathcal{M}(L^p)$, то*

1) при $1 < p \le \infty$ $(5)_{L^p} \Longleftrightarrow (3)_{L^p}$,

2) при $1 \le p < \infty$, если Φ замкнута в L^p, $(5)_{L^p} \Longleftrightarrow (4)_{L^p}$.

Доказательство. Надо взять $\phi_k^* = \phi_k$ и

$$\langle x, y \rangle = \int_S x(t)\overline{y(t)}\,dt\,.$$

Тогда (1) — условие ортогональности, (A) выполнено, так как L^p является сопряженным пространством, и ограниченное множество в нем слабо предкомпактно (см. [2], с. 40).

Замечание 1. Следствие 1 отличается от теоремы Орлича (см. [2], с. 251-252) тем, что в ней $t_k = 1$ (и тогда условия (2) и (7) излишни), а вместо $(5)_{L^p}$ использовалось условие ограниченности функций Лебега (из которого вытекает $(5)_{L^p}$ для всех $X = L^p$, $1 \le p \le \infty$).

Замечание 2. Условия, при которых справедливы $(3)_{L^p}$ и $(4)_{L^p}$ для общих ортогональных систем, изучались в [3], но проверка условия $1/t \in \mathcal{M}(L^p)$ в [3] (см. [3], лемма 3) ошибочна, так как использует неверное равенство $M_{1/t}(L^p \setminus M_t(L^p)) = L^2 \setminus L^p$ (см. (6)). Поэтому все теоремы этой работы не обоснованы.

Приведем теперь результаты, аналогичные следствию 1, но для других функциональных пространств. Мы используем ниже в следствии 2 обозначения и терминологию, связанные с пространствами Орлича L_φ^* из [4], с пространствами Харди H^p и функций ограниченного среднего колебания BMO из [5], с пространством функций ограниченной вариации V из [2]. C означает, как обычно, пространство непрерывных функций.

[2] Мы считаем $1/0 = 1$.

Следствие 2. *Пусть $\Phi \subset L^2$ — ОНС и матрица T удовлетворяет условию (2). Тогда*

1) если φ — N-функция Юнга, ψ — дополнительная для φ N-функция Юнга, $\Phi \subset L^*_\varphi \cap L^*_\psi$ и $1/t \in \mathcal{M}(L^*_\varphi)$, то (5)$_{L^*_\varphi} \Longleftrightarrow$(3)$_{L^*_\varphi}$.

2) если $\Phi \subset H^\infty$ и $1/t \in \mathcal{M}(H^1)$, то (5)$_{H^1} \Longleftrightarrow$(3)$_{H^1}$,

3) если $\Phi \subset L^\infty$ и $1/t \in \mathcal{M}(BMO)$, то (5)$_{BMO} \Longleftrightarrow$(3)$_{BMO}$,

4) если $\Phi \subset V$ и $1/t \in \mathcal{M}(V)$, то (5)$_V \Longleftrightarrow$(3)$_V$,

5) если $\Phi \subset C$ замкнута в C и $1/t \in \mathcal{M}(C)$, то (5)$_C \Longleftrightarrow$(4)$_C$.

Для доказательства надо лишь проверить условие (A) в случаях 1)-4). Оно вытекает из того, что пространства L^*_φ, H^1, BMO и V являются сопряженными пространствами и слабой компактности единичного шара в сопряженном пространстве (см. [2] с. 40). Для пространств Орлича см. [4] (теорема 14.2 на с. 153), для H^1 см. [5] с. 275, для BMO см. [5] с. 245, для V см. [2] с. 29.

Замечание 3. Из следствий 1 и 2, в частном случае тригонометрической системы, вытекают результаты работ [6]–[9], где рассматривались пространства $L^p(\mathbb{T})$, L^*_φ и BMO.

Например, условия следствия 1 вытекают из условий [8] и теоремы Марцинкевича о мультипликаторах в $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1,\infty)$ ([10], с.346). В [7] ограничения еще более сильные, чем в [8], и для доказательства использовались неравенство Хаусдорфа-Юнга, теорема Карлесона-Ханта и т.д. Результаты работы [9] вытекают из следствий непосредственно. При этом во всех случаях наши ограничения на матрицу T существенно шире.

Список литературы

[1] Orlicz W. Beiträge zur Theorie der Orthogonalenentwicklungen // Studia Math. 1929. V.1. P.1–39.

[2] Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М.: ГИФМЛ, 1958.

[3] Бруй И.Н. Консервативные средние ортогональных рядов и пространства $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1,\infty)$ // Матем. заметки. 2002. Т. 71. Вып. 2, С. 182–193.

[4] Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. Выпуклые функции и пространства Орлича М.: ГИФМЛ, 1958.

[5] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

[6] Bruj I., Schmieder G. Real trigonometric series of classes BMO and $(C,1)$-means // Acta Sci. Math (Szeged). 1998. V. 64. P. 483–488.

[7] Бруй И.Н. Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbb{T})$, $p \in (1,\infty)$, и их консервативные средние // Матем. заметки. 1997. Т. 62. Вып. 5, С. 677–686.

[8] Бруй И.Н. Тригонометрические ряды классов $L^p(\mathbb{T})$ и их матричные средние // Весцi АН Беларусi, сер.физ.-мат.н. 2000. №1, С. 46–49.

[9] Бруй И.Н. Методы суммирования тригонометрических рядов пространства функций // Матем. сборник. 2002. Т. 193. №4, С. 17–36.

[10] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.2. М.: Мир, 1965.