$$\frac{d}{dt}\left(e^{ct}\frac{d^2v}{dt^2}\right)=u,\ 0<t<T,\ \forall c>0;\quad v(0)=v(T)=\frac{dv(T)}{dt}=0.$$

Отсюда $u=ce^{ct}(d^2v/dt^2)+e^{ct}(d^3v/dt^3)$. В последнем слагаемом левой части тождества (7) трижды интегрируем по частям, берём вещественную часть, делим на λ и $\forall c\geq 0,\ \forall\lambda\geq 1$ получаем равенство

$$\frac{1}{2}\left|\frac{dv(0)}{dt}\right|^2+\frac{c}{2}\int_0^T e^{ct}\left|\frac{dv}{dt}\right|^2 dt+\lambda^{-1}\operatorname{Re}J_1(v)+\lambda^{-1}c\operatorname{Re}J_2(v)=0, \tag{8}$$

$$J_i(v)=\int_0^T e^{ct}\left(\frac{d^{4-i}v}{dt^{4-i}},\sum_{k=0}^{3}C_3^k\frac{d^{3-k}A^{*-1}(t)}{dt^{3-k}}\frac{d^kv}{dt^k}\right)dt,\ \ i=1,2.$$

Слагаемые интегралов $J_1(v)$ и $J_2(v)$ оцениваем сверху с помощью неравенств (4) – (6), δ-неравенства $2ab\leq\delta a^2+\delta^{-1}b^2\ \forall\delta>0$ и при этом сначала подбираем $c=c_5>0$ настолько большим, чтобы

$$\lambda^{-1}\operatorname{Re}J_1(v)\leq\frac{1}{2}\lambda^{-1}\int_0^T e^{c_5t}\left[\frac{d^3v}{dt^3}\right]^2_{(-3,\,t)}dt+\frac{c_5}{4}\int_0^T e^{c_5t}\left|\frac{dv}{dt}\right|^2 dt\ \ \forall\lambda\geq 1,$$

затем – $\lambda=\lambda_1\geq 1$ настолько большим, чтобы

$$\lambda_1^{-1}c_5\operatorname{Re}J_2(v)\leq\frac{1}{2}\lambda_1^{-1}\int_0^T e^{c_5t}\left[\frac{d^3v}{dt^3}\right]^2_{(-3,\,t)}dt+\frac{c_5}{8}\int_0^T e^{c_5t}\left|\frac{dv}{dt}\right|^2 dt.$$

В результате оценки левой части равенства (8) снизу при $c=c_5$ и $\lambda=\lambda_1$ будем иметь неравенство $(c_5/8)\int_0^T e^{c_5t}(dv/dt)^2dt\leq 0$. Отсюда следует, что $dv/dt=0$, и $u=0$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Lions J.-L.* Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Berlin: Springer-Verlag, 1961.
2. *Ломовцев Ф. Е.*//Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. №2. С. 4–11.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОБЛАСТЕЙ С КУСОЧНО-ГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

М. В. Воложинец

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу конформного отображения области $D = \hat{\mathbf{C}} \setminus \{z : |z - a_i| \le R\}$, где $\hat{\mathbf{C}}$ - расширенная комплексная плоскость, $R > 0, a_i$ $(i = 1,2,...)$ – действительные числа, на область G - расширенную комплексную плоскость w с разрезами по отрезкам вещественной оси.

Будем предполагать, что центры заданных полукругов расположены на одинаковом расстоянии a $(a > 0)$ друг от друга. В этом случае можно получить аналитическую формулу для конформного отображения, используя принцип симметрии (см. [1]).

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Обозначим $D_0 = \{z : \operatorname{Im} z > 0, |z - a_i| > R\}$, $G_0 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$. Построим отображение половины области D_0, т.е. области $D_1 = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{a}{2}$, $\operatorname{Im} z > 0, |z| > \frac{a}{4}\}$ на полуполосу $G_1 = \{0 < \operatorname{Re} w < \frac{a}{2}, \operatorname{Im} w > 0\}$ путем последовательного конформного отображения D_1 на $\{\xi : \operatorname{Im}\xi > 0\}$, а затем на G_1. Теорема Кристоффеля-Шварца (см. [1]) позволяет построить конформное отображение $z = f(\xi)$ полуплоскости $\{\xi : \operatorname{Im}\xi > 0\}$ на D_1:

$$z = f(\xi) = c\int_{-b}^{\xi} t^{\frac{1}{2}-1}(t-1)^{\frac{1}{2}-1}(t+b)^{\frac{1}{2}-1}\,dt + c_1 = c\int_{-b}^{\xi}\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t+b)}} + c_1, \qquad (1)$$

где $0 < b < +\infty$. Зафиксируем в (1) однозначную ветвь корня функции $\sqrt{z(z-1)(z+b)}$. Для определения параметров c и b получим систему:

$$ё\begin{cases} c\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{|t(t-1)(t+b)|}} = \frac{ai}{4}, \\ c\displaystyle\int_{-b}^0 \frac{dt}{\sqrt{|t(t-1)(t+b)|}} = \frac{\pi ai}{8}, \end{cases} \qquad (2)$$

откуда численно находим, что $b = 8{,}22$ и $c = 0{,}23ai$. Параметр $c_1 = f(a_1) = A_1 = \frac{a}{4}i = 0{,}25ai$. Таким образом, искомое отображение имеет вид:

$$z = f(\xi) = 0{,}23ai\int_{-8,22}^{\xi}\frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t+8{,}22)}} + 0{,}25ai. \qquad (3)$$

Тогда функция $\xi = f^{-1}(z)$, конформно отображает область D_1 на полуплоскость $\operatorname{Im}\xi > 0$. Функция $w = w(z) = h(f^{-1}(z)) = \frac{a}{2\pi}(\arcsin f^{-1}(z) + \frac{\pi}{2})$ конформно отображает область D_1 на полуполосу G_1 (см. [1], с. 306).

Используя принцип симметрии, аналитически продолжим функцию $w = w(z)$ в область D. Функция $F_0(z) = \begin{cases} w(z), z \in D_1 \bigcup \gamma \\ -\overline{w(-\overline{z})}, z \in D_1^* \end{cases}$, где $D_1^* = \{-\frac{a}{2} < \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z > 0, |z| > \frac{a}{4}\}$, $\gamma : (\frac{a}{4} i, 0 + i\infty)$, конформно отображает область $D^{(0)} = \{-\frac{a}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{a}{2}, \operatorname{Im} z > 0, |z| > \frac{a}{4}\}$ на область $G^{(0)} = \{-\frac{a}{2} < \operatorname{Re} w < \frac{a}{2}, \operatorname{Im} w > 0\}$. Функция $F(z) = F_k(z) = F_0(z - ka) + ka$, $z \in D^{(k)} \bigcup \gamma_k$, где $D^{(k)} = \{-\frac{a}{2} + ka < \operatorname{Re} z < \frac{a}{2} + ka, \operatorname{Im} z > 0, |z - ka| > \frac{a}{4}\}$, $\gamma_k : ((\frac{1}{2} + k)a,\ (\frac{1}{2} + k)a + i\infty)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, конформно отображает область D_0 на область G_0. Наконец, функция $H(z) = \begin{cases} F(z), z \in D_0 \bigcup \Gamma \\ \overline{F(\overline{z})}, z \in D_0^* \end{cases}$ конформно отображает область D на область G, где $D_0^* = \{z : \operatorname{Im} z < 0, |z - a_i| > R\}$, а Γ – объединение интервалов, по которым граничат области D_0 и D_0^*.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В данном разделе решим поставленную задачу численно. Как и в разделе 2, будем искать конформное отображение $w = w(z)$ области D_1 на полуполосу G_1. Сначала найдем конформное отображение $\xi = \xi(z)$ области D_1 на полуплоскость $\{\xi : \operatorname{Im}\xi > 0\}$, а затем найдем конформное отображение указанной полуплоскости на полуполосу G_1.

Конформное отображение $\xi = \xi(z)$ области D_1 на полуплоскость $\{\xi : \operatorname{Im}\xi > 0\}$ будем искать, используя так называемый геодезический алгоритм, описанный в [2]. Сначала найдем конформное отображение

$\xi_0 = \xi_0(z)$ области $D_1^{'} = \{0 < x < \frac{1}{2}, y > 0, x^2 + y^2 > \frac{1}{16}\}$, $z = x + yi$, на полуплоскость $\{\xi : \operatorname{Im}\xi > 0\}$. На криволинейной части границы области при $0 \le x \le \frac{1}{4}$ рассмотрим контрольные точки $x_k + y_k i$, где $x_k = \frac{k}{40}, k = \overline{0,10}$. Теперь приблизим область $D_1^{'}$ многоугольником $R = \{0 < x < \frac{1}{2}, y > 0, y > -x + \frac{1}{4}\}$.

Используя инструментарий Кристоффеля – Шварца [3], найдем отображение $s(w) = (2{,}6505 + 0{,}1592i)\int_0^w \frac{d\omega}{\sqrt[4]{(\omega+1)(\omega - 6{,}5685)}\sqrt{\omega - 1}}$, отображающее верхнюю полуплоскость на R, и, как описано в [2], используем s^{-1} (содержащееся в инструментарии), чтобы найти приближенно константы α и β в отображении Жуковского $J(z) = \frac{z^2 - \alpha\beta}{2z - \alpha - \beta}$. Находим $\alpha = -1$ и $\beta = 0{,}6569$.

Итак, $J(z) = \frac{z^2 + 0{,}6569}{2z + 0{,}3431}$, $J^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 + 0{,}3431z - 0{,}6569}$. И теперь мы можем применить геодезический алгоритм со значениями $z_k = J^{-1}(s^{-1}(x_k + y_k i)) - a$. Результаты вычислений приведены в таблице.

Таблица

k	$x_k + y_k i$	z_k	ζ_k	$\varphi_9(z_k)$	$\varphi(z_k)$
0	0+0,25*i*	0	0	169,3748	329,1549
1	0,025+0,2487*i*	0,2421-0,2847*i*	0,2421-0,2847*i*	366,6003	279,0569
2	0,05+0,2449*i*	0,3964-0,3876*i*	0,3207+0,5463*i*	561,4924	361,8050
3	0,075+0,2385*i*	0,5275-0,4451*i*	0,0141-0,9037*i*	111,1698	-422,4627
4	0,1+0,2291*i*	0,6459-0,4781*i*	0,0073-1,0753*i*	72,0578	-48,3106
5	0,125+0,2165*i*	0,7575-0,4936*i*	0,0806+1,2827*i*	62,0021	-30,1299
6	0,15+0,2*i*	0,9348+1,3779*i*	2,7061-1,1237*i*	44,7044	-12,3223
7	0,175+0,1785*i*	1,2305+1,2957*i*	4,5635+3,0019*i*	39,2463	-8,8981
8	0,2+0,15*i*	1,4931+1,1145*i*	9,3052-10,5424*i*	33,6499	-6,1441
9	0,225+0,1089*i*	1,6957+0,8189*i*	4,2409+33,1066*i*	0	0
10	0,25+0*i*	1,6569	251,5936	251,5936	251,5936

Так как $\varphi_9(z_{10}) = 251{,}5936 > 0$, то функция φ_9 отображает область $D_1^{'}$ на область выше вещественной оси и полукруга, который пересекает вещественную ось в точке $\varphi_9(z_{10})$ и в начале координат. Это значит, что функция $g(z) = \dfrac{z^2}{2z - 251{,}5936}$ отображает указанную область на верхнюю полуплоскость. Таким образом, функция $\xi_0 = \varphi(z) = g \circ \varphi_9$ конформно отображает область $D_1^{'}$ на $\{\xi : \operatorname{Im}\xi > 0\}$. Значит, функция $\xi == a\xi_0 = ag \circ \varphi_9$ отображает область D_1 на полуплоскость $\{\xi : \operatorname{Im}\xi > 0\}$. Конформное отображение полуплоскости $\{\xi : \operatorname{Im}\xi > 0\}$ на полуполосу G_1 найдено в разделе 2. Таким образом, функция $w = w(z) = h \circ \xi = ah \circ g \circ \varphi_9$ конформно отображает область D_1 на полуполосу G_1. Как и в разделе 2, строим находим конформное отображение области D на область G с помощью принципа симметрии.

Замечание. Рассматриваемая в работе задача связана с исследованием эффективных свойств двумерных композиционных материалов (см. [4]).

Литература

1. *Сидоров И. В.*, *Федорюк М. В.*, *Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. Москва “Наука”, 1989.
2. *Andersson A*. Using a zipper algorithm to find a conformal map for a channel with smooth boundary, in: AIP Conference Proceedings: Second Conference on Mathematical Modeling of Wave Phenomena, vol. 834, AIP, New York, 2006, pp. 3-12 .
3. *Driscoll T. A*. Schwarz – Christoffel toolbox for Matlab (2002). URL http: //www.math.udel.edu/~driscoll/SC.
4. *Mityushev V.*, *Rogosin S.* On the Riemann – Hilbert Problem with a Piecewise Constant Matrix. ZAA (Journal for Analysis and its Applications), vol. 27 (2008), pp. 53-66.

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ НА ПРЕДУПОРЯДОЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ, СНАБЖЕННОМ ТОПОЛОГИЕЙ

Е. В. Гирейко

ВВЕДЕНИЕ

Основное предположение, сделанное пионерами классической микроэкономики такими, как Эджворт и Парето, заключалось в том, что ранжирование потребительских предпочтений может быть всегда измерено численно, связывая с каждым возможным набором товаров действительное число, которое измеряет его полезность. И только через несколько десятилетий была установлена наивность данного предположения экономистами, первым из которых, по-видимому, был Вальд. Работа Вальда стала первой в длинной цепочке результатов этого типа, которые приве-