

СЛАБЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

К. В. Василевский

Слабые решения дифференциально-операторных уравнений первого порядка изучались в [1] в случае неограниченных самосопряжённых операторов и в [2] – неограниченных максимально аккретивных операторов с переменными областями определения. В данной работе доказаны существование и единственность слабых решений некоторой граничной задачи для дифференциально-операторного уравнения третьего порядка с переменными областями определения неограниченных операторов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $|\cdot|$ рассмотрим граничную задачу

$$-\frac{du^3(t)}{dt^3} + \lambda A(t)u(t) = f(t), \quad t \in J =]0, T[; \quad u(0) = \frac{du(0)}{dt} = u(T) = 0, \quad (1)$$

где u и f – функции переменной t со значениями в H , $A(t)$ – линейные неограниченные операторы в H с зависящими от t областями определения $D(A(t))$, $t \in \overline{J} = [0, T]$, и $\lambda \geq 1$ – параметр.

Предполагаем, что операторы $A(t)$ удовлетворяют условиям:

I. При каждом $t \in \overline{J}$ операторы $A(t)$ замкнуты в H и

$$[u]_{(t)}^2 \equiv \operatorname{Re}(A(t)u, u) \geq c_4 |u|^2 \quad \forall u \in D(A(t)), \quad (2)$$

$$\langle v \rangle_{(t)}^2 \equiv \operatorname{Re}(A^*(t)v, v) \geq c_4 |v|^2 \quad \forall v \in D(A^*(t)), \quad c_4 > 0, \quad (3)$$

где $A^*(t)$ – сопряжённые операторы операторов $A(t)$ в H и $D(A^*(t))$ – их области определения.

Введём гильбертовы пространства $W^{-\alpha}(t)$ – замыкания H по нормам $[u]_{(-\alpha, t)} = \sqrt{\operatorname{Re}(A^{-\alpha/3}(t)u, u)}$, $0 \leq \alpha \leq 3$, $W^0(t) = H$, $t \in \overline{J}$, где $A^{-\alpha/3}(t)$ – ограниченные обратные операторы дробных степеней $A^{\alpha/3}(t)$ операторов $A(t)$.

II. Обратные операторы $A^{-1}(t) \in L_{\infty}(J, \mathcal{L}(H))$ операторов $A(t)$ сильно непрерывны по $\overline{J}$ в H и при почти всех $t \in J$ имеют в H слабые

производные $d^i A^{-1}(t)/dt^i \in L_\infty(J, \mathcal{L}(H))$, $i = \overline{1, 3}$, такие, что

$$\left| \left(\frac{d^i A^{-1}(t)}{dt^i} g, h \right) \right| \leq c_i [g]_{(-2-i, t)} [h]_{(-3+i, t)} \quad \forall g, h \in H, c_i > 0, i = 0, 1, \quad (4)$$

$$\left| \left(\frac{d^i A^{-1}(t)}{dt^i} g, h \right) \right| \leq c_i [g]_{(-3, t)} |h| \quad \forall g, h \in H, c_i > 0, i = 2, 3. \quad (5)$$

Предполагается также, что для любой функции $w \in C^{(3)}(\overline{J}, H)$ такой, что $w(0) = w(T) = 0$, выполнено интерполяционное неравенство

$$\int_0^T \left[\frac{d^2 w}{dt^2} \right]_{(-2, t)}^2 dt \leq \varepsilon \int_0^T \left[\frac{d^3 w}{dt^3} \right]_{(-3, t)}^2 dt + c(\varepsilon) \int_0^T \left| \frac{dw}{dt} \right|^2 dt \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (6)$$

где постоянная $c(\varepsilon) > 0$ не зависит от w и t .

Определение 1. Функция $u \in \mathcal{H} = L_2(J, H)$ называется **слабым решением** граничной задачи (1) для правой части $f \in \mathcal{H}^{*-} = L_2(J, H_t^{*-})$, если она удовлетворяет равенству

$$\int_0^T \left\{ \lambda \left(u, A^*(t) \varphi \right) + \left(u, \frac{d^3 \varphi}{dt^3} \right) \right\} dt = \int_0^T \langle f, \varphi \rangle_{(t)} dt$$

для всех $\varphi \in \Phi = \{ \varphi \in \mathcal{H} : \varphi(t) \in D(A^*(t)), t \in J ; \text{ слабые производные } d^i \varphi / dt^i, A^*(t) \varphi \in \mathcal{H}, i = \overline{1, 3}; \varphi(0) = \varphi(T) = d\varphi(T)/dt = 0 \}$, где H_t^{*+} – гильбертово пространство, полученное замыканием множества $D(A^*(t))$ по норме $\langle \cdot \rangle_{(t)}$ из (3), H_t^{*-} – антидвойственное гильбертово пространство к H_t^{*+} и $\langle \cdot, \cdot \rangle_{(t)}$ – полуторалинейная форма антидвойственности между H_t^{*+} и H_t^{*-} .

Доказать существование и единственность слабых решений граничной задачи (1).

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Теорема 1. Если выполняется условие I, то для каждой $f \in \mathcal{H}^{*-}$ существует слабое решение $u \in \mathcal{H}$ граничной задачи (1).

Доказательство существования слабых решений использует проекционную теорему Лионса из [1, с. 37]. В проекционной теореме Лионса

для гильбертова пространства $F = \mathcal{H}$ и предгильбертова пространства Φ – множества из определения 1 с эрмитовой нормой $|||\varphi||| = \left(\int_0^T \langle \varphi \rangle_{(t)}^2 dt \right)^{1/2}$,

на $F \times \Phi = \mathcal{H} \times \Phi$ возьмём форму

$$E(u, \varphi) = \int_0^T \left\{ \lambda \left(u, A^*(t)\varphi \right) + \left(u, \frac{d^3 \varphi}{dt^3} \right) \right\} dt,$$

и для каждой функции $f \in \mathcal{H}^*$ на Φ антилинейный функционал

$$L(\varphi) = \int_0^T \langle f, \varphi \rangle_{(t)} dt, \quad \varphi \in \Phi.$$

Пространство Φ очевидно непрерывно вложено в пространство F . Форма $E(u, \varphi)$ при каждом $\varphi \in \Phi$ непрерывна по u на F . В правой части формы $E(\varphi, \varphi)$ интегрируем по частям один раз по t , берём вещественную часть и получаем, что в силу неравенства (3) вещественная часть $\operatorname{Re} E(\varphi, \varphi)$ оценивается снизу величиной

$$\lambda \int_0^T \langle \varphi \rangle_{(t)}^2 dt + \frac{1}{2} |\varphi'(0)|^2 \geq \lambda \int_0^T \langle \varphi \rangle_{(t)}^2 dt = \lambda |||\varphi|||^2, \quad \lambda \geq 1.$$

Тогда тем более $|E(\varphi, \varphi)| \geq \operatorname{Re} E(\varphi, \varphi) \geq \lambda |||\varphi|||^2 \quad \forall \varphi \in \Phi$.

При каждой фиксированной функции $f \in \mathcal{H}^*$ функционал $L(\varphi)$ непрерывен по φ на Φ . Поэтому по указанной выше теореме Лионса существует решение $u \in \mathcal{H}$ уравнения $E(u, \varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in \Phi$ и, следовательно, слабое решение граничной задачи (1). Теорема 1 доказана.

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

Теорема 2. Если выполняются условия I, II, то для каждой $f \in \mathcal{H}^*$ слабое решение $u \in \mathcal{H}$ граничной задачи (1) единственно.

Доказательство. Пусть $u \in \mathcal{H}$ – слабое решение граничной задачи (1) при $f = 0$. Тогда по определению 1 имеет место тождество

$$\int_0^T \left\{ \lambda \left(u, A^*(t)\varphi \right) + \left(u, \frac{d^3 \varphi}{dt^3} \right) \right\} dt = 0 \quad \forall \varphi \in \Phi. \quad (7)$$

В этом тождестве полагаем $\varphi = A^{*-1}(t)v$, v – решение граничной задачи

$$\frac{d}{dt} \left(e^{ct} \frac{d^2 v}{dt^2} \right) = u, \quad 0 < t < T, \quad \forall c > 0; \quad v(0) = v(T) = \frac{dv(T)}{dt} = 0.$$

Отсюда $u = ce^{ct}(d^2 v/dt^2) + e^{ct}(d^3 v/dt^3)$. В последнем слагаемом левой части тождества (7) трижды интегрируем по частям, берём вещественную часть, делим на λ и $\forall c \geq 0, \forall \lambda \geq 1$ получаем равенство

$$\frac{1}{2} \left| \frac{dv(0)}{dt} \right|^2 + \frac{c}{2} \int_0^T e^{ct} \left| \frac{dv}{dt} \right|^2 dt + \lambda^{-1} \operatorname{Re} J_1(v) + \lambda^{-1} c \operatorname{Re} J_2(v) = 0, \quad (8)$$

$$J_i(v) = \int_0^T e^{ct} \left(\frac{d^{4-i} v}{dt^{4-i}}, \sum_{k=0}^3 C_3^k \frac{d^{3-k} A^{*-1}(t)}{dt^{3-k}} \frac{d^k v}{dt^k} \right) dt, \quad i = 1, 2.$$

Слагаемые интегралов $J_1(v)$ и $J_2(v)$ оцениваем сверху с помощью неравенств (4) – (6), δ -неравенства $2ab \leq \delta a^2 + \delta^{-1} b^2 \quad \forall \delta > 0$ и при этом сначала подбираем $c = c_5 > 0$ настолько большим, чтобы

$$\lambda^{-1} \operatorname{Re} J_1(v) \leq \frac{1}{2} \lambda^{-1} \int_0^T e^{c_5 t} \left[\frac{d^3 v}{dt^3} \right]_{(-3,t)}^2 dt + \frac{c_5}{4} \int_0^T e^{c_5 t} \left| \frac{dv}{dt} \right|^2 dt \quad \forall \lambda \geq 1,$$

затем – $\lambda = \lambda_1 \geq 1$ настолько большим, чтобы

$$\lambda_1^{-1} c_5 \operatorname{Re} J_2(v) \leq \frac{1}{2} \lambda_1^{-1} \int_0^T e^{c_5 t} \left[\frac{d^3 v}{dt^3} \right]_{(-3,t)}^2 dt + \frac{c_5}{8} \int_0^T e^{c_5 t} \left| \frac{dv}{dt} \right|^2 dt.$$

В результате оценки левой части равенства (8) снизу при $c = c_5$ и $\lambda = \lambda_1$ будем иметь неравенство $(c_5/8) \int_0^T e^{c_5 t} (dv/dt)^2 dt \leq 0$. Отсюда следует, что $dv/dt = 0$, и $u = 0$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. Lions J.-L. Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites. Berlin: Springer-Verlag, 1961.
2. Ломовцев Ф. Е. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. №2. С. 4–11.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ОБЛАСТЕЙ С КУСОЧНО- ГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

М. В. Воложинец