Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №5, с. 28–39 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

Б.С. КАЛИТИН, Р. ШАБУР

МЕТОД ЗНАКОПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. В работе дается развитие метода знакопостоянных функций Ляпунова для проблем устойчивости движения применительно к системам неавтономных дифференциальных уравнений. Приведены основные теоремы об устойчивости и даны иллюстрирующие примеры.

Ключевые слова: неавтономная система дифференциальных уравнений, равновесие, устойчивость, функция Ляпунова.

УДК: 517.925

Метод функций Ляпунова ([1], с. 77–94) используется во многих задачах управления и автоматического регулирования динамическими процессами. Для неавтономных дифференциальных уравнений он был дополнен и получил развитие в работах (см., например, [2]–[6]) Н.Г. Четаева, К.П. Персидского, Ж. Курцвейля, Е.А. Барбашина, Н.Н. Красовского, В.И. Зубова, В.М. Матросова, С.Н. Васильева, Ж.П. Ля-Салля, Т. Йошизава, Ц. Артстейна, А.С. Андреева и др. Здесь для решения задач устойчивости, асимптотической устойчивости и устойчивости в целом существенной особенностью является требование к вспомогательной функции $V(x,t)$ быть положительно определенной. В работах [6]–[8] для задачи об асимптотической устойчивости ослаблены требования к производной по времени функции Ляпунова $\dot{V}(x,t)$. Показано, что вместо функций со свойством определенной отрицательности $\dot{V}(x,t)$ можно использовать функции Ляпунова со знакоотрицательной производной с множеством нуля, не содержащим положительных полутраекторий.

В работах [9]–[19] дается развитие второго метода для неавтономных систем на случай, когда функция Ляпунова $V(x,t)$ только знакоположительная. Отличительная особенность этих результатов об устойчивости определяется тем, что функция Ляпунова может обращаться в нуль не только в начале координат фазового пространства, но и на поверхности нулевого уровня, содержащей начало. Естественно, что такая функция имеет лишь знакоотрицательную производную по времени. Здесь формулировка результатов различна и отражает три подхода в решении проблемы устойчивости нулевого решения.

В первом из них [9], [12]–[15] используется техника предельных уравнений (см. [5]), где наряду с понятием предельных функций правых частей системы (предельные уравнения) используется и понятие предельных функций Ляпунова.

Во втором подходе применяется метод разделения переменных (координат состояния системы) на подпространства $x = (y, z)$ с представлением явного вида многообразия ($y = \varphi(t, z)$), где функция Ляпунова равна нулю [10], [11], [18].

Третий подход [17]–[20] основан на методах качественной теории дифференциальных уравнений, а именно, на изучении локальных и глобальных свойств полутраекторий в

Поступила 27.01.2011

окрестности, где функция Ляпунова обращается в нуль. Здесь используются такие понятия как "пороговое свойство" (the threshold property) [21], равномерная интегральная непрерывность и свойства предельных множеств решений [21]–[23] и т. п.

В предлагаемой статье используется подход, относящийся к описанному третьему, дополняются и обобщаются результаты работ [17], [19] об устойчивости нулевого решения.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n. Будем использовать следующие символы: $\|\cdot\|$ — норма в этом пространстве, $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ — функция расстояния, $B(0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|<r\}$, $B(Y,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:d(Y,x)<r\}$, где $r>0$, а Y — замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим систему неавтономных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x,t),\quad f(0,t)=0\ \ \forall t\geq 0, \tag{1.1}$$

определенную в открытой связной окрестности D начала координат $\mathbb{R}^n$. Предположим, что функция $f:D\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$ непрерывна и локально липшицева, т. е. для любого компакта $K\subset D$ существует такое число $L=L(K)>0$, что

$$\|f(x,t)-f(y,t)\|\leq L\|x-y\|\ \ \forall x,y\in K,\ \ \forall t\geq 0.$$

Тогда через каждую точку (x_0,t_0) области определения системы проходит единственное решение $x(x_0,t_0,t)$ с $x(x_0,t_0,t_0)=x_0$. Более того, для системы (1.1), удовлетворяющей локальному условию Липшица, имеет место следующее свойство решений.

Равномерная интегральная непрерывность (РИН). *Для любых чисел* $\beta>0$ ($B(0,\beta)\subset D$), $\varepsilon>0$ *и* $T>0$ *существует такое число* $\delta=\delta(\beta,\varepsilon,T)>0$, *что*

$$\|x(x_0,t_0,t)-x(y_0,t_0,t)\|<\varepsilon$$

для любой четверки $(x_0,y_0,t_0,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$, *удовлетворяющей условию*

$$t_0\geq 0,\quad \|x_0-y_0\|<\delta;\quad \|x(x_0,t_0,t)\|<\beta\ \text{ при }\ t_0\leq t\leq t_0+T.$$

Действительно, пусть $x(x_0,t_0,t)$, $x(y_0,t_0,t)$ — решения системы (1.1). Используя стандартную процедуру перехода к интегральным представлениям этих решений, затем вычитанию одного из другого и перехода к соответствующим неравенствам с использованием леммы Гроноулла–Беллмана ([24], с. 108) и условия Липшица, можем записать оценку

$$\|x(x_0,t_0,t)-x(y_0,t_0,t)\|\leq\|x_0-y_0\|e^{L(t-t_0)}.$$

Отсюда имеем $\|x(x_0,t_0,t)-x(y_0,t_0,t)\|\leq\|x_0-y_0\|e^{LT}$ при всех $t_0\leq t\leq t_0+T$ и всех $t_0\geq 0$. Это и подтверждает свойство РИН.

Замечание 1. Из определения РИН при $y_0=0$, в частности, вытекает, что если решение $x(x_0,t_0,t)$ при достаточно малом начальном состоянии ($\|x_0\|<\delta$) ограничено шаром $B(0,\beta)$, то оно равномерно ограничено по $t_0\geq 0$.

Будем говорить, что множество Y в D *положительно инвариантно*, если $\forall x_0\in Y$ имеем включение $x(x_0,t_0,t)\in Y\ \ \forall t_0\geq 0,\ \ \forall t\geq t_0$.

Будем использовать следующие понятия подобных устойчивости свойств относительно подмножества $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Пусть Y — замкнутое положительно инвариантное множество, содержащее начало координат. Решение $x=0$ системы (1.1) является

— *равномерно Y-устойчивым*, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0\ \ \forall x_0\in B(0,\delta)\cap Y\ \ \forall t_0\geq 0\Rightarrow\|x(x_0,t_0,t)\|<\varepsilon\ \ \forall t\geq t_0;$$

— *равномерно Y-притягивающим*, если

$$\exists\sigma > 0 \ \ \forall\alpha > 0 \ \ \exists T > 0 \ \ \forall x_0 \in B(0,\sigma) \cap Y \ \ \forall t_0 \geq 0 \Rightarrow \|x(x_0,t_0,t)\| < \alpha \ \ \forall t \geq t_0 + T;$$

— *равномерно Y-асимптотически устойчивым*, если оно равномерно Y-устойчиво и равномерно Y-притягивающее;

— *равномерно Y-глобально асимптотически устойчивым*, если оно равномерно Y-асимптотически устойчиво, $D = \mathbb{R}^n$ и каждое решение $x(x_0,t_0,t)$, $x_0 \in Y$, $t_0 \geq 0$, стремится к началу кординат при $t \to +\infty$.

При $Y = \mathbb{R}^n$ из этих определений следуют общепринятые свойства ([2], с. 18–20): равномерная устойчивость, равномерное притяжение, равномерная асимптотическая устойчивость и равномерная глобальная асимптотическая устойчивость соответственно.

Согласуясь с подобными устойчивости понятиями для состояний равновесия (см. [2], [12], [17], [22]) будем использовать следующие свойства замкнутых множеств.

Замкнутое положительно инвариантное множество Y называется

— *равномерно устойчивым*, если

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \forall t_0 \geq 0 \ \ \forall x_0 \in B(Y,\delta) \Rightarrow d(x(x_0,t_0,t),Y) < \varepsilon \ \ \forall t \geq t_0;$$

— *равномерно притягивающим*, если

$$\exists\eta > 0 \ \ \forall\varepsilon > 0 \ \ \exists T = T(\eta,\varepsilon) > 0 \ \ \forall x_0 \in B(Y,\eta) \ \ \forall t_0 \geq 0 \Rightarrow d(x(x_0,t_0,t),Y) < \varepsilon \ \ \forall t \geq t_0 + T;$$

— *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво и равномерно притягивающее;

— *равномерно глобально асимптотически устойчивым*, если оно равномерно асимптотически устойчиво, $D = \mathbb{R}^n$, и каждое решение $x(x_0,t_0,t)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus Y$, $t_0 \geq 0$, стремится к множеству Y при $t \to +\infty$.

2. Свойство Сейберта

Определим аналог свойства решений системы (1.1), введенное П. Сейбертом [21] как “threshold property”.

Определение 2. Пусть Y — замкнутое положительно инвариантное множество, содержащее начало координат. Будем говорить, что пара $(0,Y)$ обладает *свойством Сейберта* ([21], [22]), если для любого $\mu > 0$ существует $\nu = \nu(\mu) > 0$ такое, что если решение $x(x_0,t_0,t)$, $x_0 \in B(0,\nu)$, $t_0 \geq 0$, удовлетворяет неравенству $d(Y,x(x_0,t_0,t)) < \nu$ на некотором интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, $T > 0$, то $\|x(x_0,t_0,t)\| < \mu$ для $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Другими словами, данное определение означает, что если решение $x(x_0,t_0,t)$ “удаляется” от начала координат, то оно сначала начинает “удаляться” от множества Y.

Лемма 1. *Пусть Y — положительно инвариантное множество системы* (1.1)*, содержащее начало координат. Если решение $x = 0$ системы* (1.1) *равномерно Y-притягивающее, тогда пара $(0,Y)$ обладает свойством Сейберта.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. существуют $\mu > 0$ и последовательности (x_{0n}), $x_{0n} \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{0n} = 0$, (t_{0n}), $t_{0n} \in \mathbb{R}^+$ и $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$ такие, что

$$\limsup_{n\to+\infty} d(x(x_{0n},t_{0n},[t_{0n},t_{0n}+t_n]),Y) = 0, \tag{2.1}$$

$$\|x(x_{0n},t_{0n},t)\| < \mu \ \text{ для } \ t_{0n} \leq t < t_{0n} + t_n \ \text{ и } \ \|x(x_{0n},t_{0n},t_{0n}+t_n)\| = \mu \ \ \forall n \geq 1. \tag{2.2}$$

Очевидно, число $\mu > 0$ можно выбрать произвольным достаточно малым.

Выберем число σ согласно определению 1 и число β из свойства РИН так, чтобы

$$\sigma < \beta. \tag{2.3}$$

Кроме того, выберем число $\alpha > 0$ в соответствии с определением равномерного Y-притяжения так, чтобы наряду с уже указанным числом μ выполнялись неравенства

$$2\alpha < \mu < \sigma. \tag{2.4}$$

Пусть величины ε и δ выбраны в соответствии со свойством РИН таким образом, что

$$\varepsilon < \mu/2, \tag{2.5}$$

$$\delta < \sigma - \mu. \tag{2.6}$$

Предположим сначала, что последовательность (t_n) ограничена. В таком случае, не теряя общности рассуждений, можно считать ее сходящейся к некоторому значению $t^* > 0$. С учетом свойства РИН (если положить $x_0 = 0$, $y_0 = x_{0n}$, $T = t^*$) для $\|x_{0n}\| < \sigma$ имеем

$$\|x(x_{0n}, t_{0n}, t_{0n} + t)\| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, t^*], \quad \forall t_{0n} \geq 0.$$

Но тогда это противоречит условию (2.2) для достаточно больших n. □

Предположим теперь, что последовательность (t_n) не ограничена. Пусть число T выбрано в соответствии с определением 1. В этом случае для достаточно больших n величина $\tau_n = t_n - T$ будет положительной.

Рассмотрим две точки: $y_n = x(x_{0n}, t_{0n}, t_{0n} + t_n)$ и $z_n = x(x_{0n}, t_{0n}, t_{0n} + t_n - T)$. Согласно (2.2) для таких точек имеют место соотношение

$$z_n = x(x_{0n}, t_{0n}, t_{0n} + \tau_n) \in x(x_{0n}, t_{0n}, [t_{0n}, t_{0n} + t_n)) \subset B(0, \mu) \tag{2.7}$$

и равенство

$$y_n = x(x_{0n}, t_{0n}, t_{0n} + \tau_n + T) = x(z_n, t_{0n} + \tau_n, t_{0n} + \tau_n + T). \tag{2.8}$$

Используя (2.7) и условие $\|y_n\| = \mu$ (см. (2.2)) можем утверждать, что для достаточно больших n существует точка

$$z'_n \in B(z_n, \delta) \cap Y. \tag{2.9}$$

Тогда, опираясь на (2.6) и (2.7) можем заключить, что $z'_n \in B(0, \sigma) \cap Y$. Поэтому определение равномерного Y-притяжения дает соотношение

$$x(z'_n, t_{0n}, t_{0n} + T) \in B(0, \alpha) \quad \forall t_{0n} \geq 0. \tag{2.10}$$

С учетом (2.7) и неравенства $t_n > T$ можем записать

$$x(z_n, t_{0n} + t_n - T, [t_{0n} + t_n - T, t_{0n} + t_n]) =$$
$$= x(x(x_{0n}, t_{0n}, t_{0n} + t_n - T), t_{0n} + t_n - T, [t_{0n} + t_n - T, t_{0n} + t_n]) = x(x_{0n}, t_{0n}, [t_{0n}, t_{0n} + t_n]).$$

Следовательно, на основании (2.3), (2.4), (2.7) и свойства РИН имеем

$$x(z_n, t_{0n} + t_n - T, [t_{0n} + t_n - T, t_{0n} + t_n]) = x(x_{0n}, t_{0n}, [t_{0n}, t_{0n} + t_n)) \in B(0, \mu) \subset B(0, \beta).$$

Кроме того, так как $\|z - z'\| < \delta$, то по свойству РИН будем иметь неравенство

$$\|x(z_n, t_{0n} + \tau_n, t_{0n} + \tau_n, +T) - x(z'_n, t_{0n} + \tau_n, t_{0n} + \tau_n, +T)\| < \varepsilon.$$

Теперь (2.8), (2.9), (2.10) и свойство РИН дают

$$y_n = x(z_n, t_{0n} + \tau_n, t_{0n} + \tau_n + T) \in B(0, \alpha + \varepsilon).$$

Наконец, из (2.4) и (2.5) вытекает $y_n \in B(0, \mu)$. Однако это противоречит предположению (2.2). □

3. Теорема об устойчивости

Рассмотрим понятие, близкое к используемому в работе [22].

Определение 3. Будем говорить, что замкнутое положительно инвариантное множество Y, содержащее точку $x = 0$, является *равномерно устойчивым вблизи начала координат*, если существует окрестность U точки $x = 0$, в которой выполняется следующее свойство: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых начальных состояний $x_0 \in B(0, \delta),\ t_0 \geq 0$, и любого $T > 0$, удовлетворяющего условию

$$x(x_0, t_0, t) \subset U \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T],$$

выполняется также и условие

$$d(Y, x(x_0, t_0, t)) < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T].$$

Лемма 2. *Если Y равномерно устойчиво вблизи начала координат и пара $(0, Y)$ удовлетворяет свойству Сейберта, то $x = 0$ равномерно устойчиво.*

Доказательство. Предположим противное, $x = 0$ не является равномерно устойчивым. Тогда существуют $\varepsilon > 0$, последовательности (x_{0n}), $x_{0n} \to 0$, $(t_{0n}) \in \mathbb{R}^+$ и (t_n), $t_n \geq t_{0n}$, такие, что

$$\|x(x_{0n}, t_{0n}, t)\| < \varepsilon \ \text{ для } \ t_{0n} \leq t < t_n \ \text{ и } \ \|x(x_{0n}, t_{0n}, t_n)\| = \varepsilon \ \ \forall n \geq 1. \tag{3.1}$$

Возьмем последовательности положительных чисел (μ_n), $\mu_n \to 0$, и (ν_n), $\nu_n \to 0$, для которых пары (μ_n, ν_n) удовлетворяют свойству Сейберта.

Без потери общности можно предположить, что

$$\|x_{0n}\| < \nu_n, \quad \overline{B(0, \varepsilon)} \subset U, \tag{3.2}$$

где U — окрестность, в которой выполняется свойство РИН.

Тогда ясно, что $x(x_{0n}, t_{0n}, [t_{0n} + t_n]) \subset U$. Согласно свойству устойчивости Y вблизи начала координат из (3.1) и (3.2) вытекает

$$x(x_{0n}, t_{0n}, [t_{0n} + t_n]) \subset B(Y, \mu_n),$$

а значит, $d(x(x_{0n}, t_{0n}, t_n), Y) \to 0$ при $n \to +\infty$. Пришли к противоречию, так как это несовместимо с равенством в соотношениях (3.1) и свойством Сейберта. □

Приведем теорему об устойчивости метода знакопостоянных функций Ляпунова. Пусть $\mathbf{K}$ означает множество непрерывных возрастающих функций $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и таких, что $a(0) = 0$.

Теорема 1. *Предположим, что существуют окрестность U точки $x = 0$, функции $V \in \mathbf{C}^1(U^n \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ и $a, b \in \mathbf{K}$ такие, что*

1) $a(d(Y, x)) \leq V(x, t) \leq b(\|x\|) \quad \forall (x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$, *где* $Y = \overline{\{x \in U : V(x, t) = 0 \ \forall t \geq 0\}}$;

2) $\dot{V}(x, t) \leq 0 \quad \forall (x, t) \in U \times \mathbb{R}^+$;

3) $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* Y.

Тогда решение $x = 0$ системы (1.1) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Согласно предположению 1) множество Y непусто замкнуто и с учетом 2) оно положительно инвариантно. Покажем сначала, что множество Y равномерно устойчиво вблизи начала. С этой целью зафиксируем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $\overline{B(0, \varepsilon)} \subset U$. Согласно 1) существует $\lambda > 0$ такое, что $V(x, t) > \lambda \ \ \forall t \geq 0$, если $d(Y, x) > \varepsilon$.

Так как $V(0, t) = 0$, то в силу $V(x, t) \leq b(\|x\|)$ для λ можно указать $\delta > 0$ такое, что $V(x_0, t_0) \leq \lambda \ \ \forall t_0 \geq 0$, если $\|x_0\| < \delta$ $(\delta = b^{-1}(\lambda))$.

Следовательно, если решение $x(x_0, t_0, t)$ остается в окрестности U на интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ для $T > 0$, то согласно предположению 2) будем иметь

$$V(x(x_0, t_0, t), t) \leq \lambda, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Таким образом, с учетом предыдущих построений решение $x(x_0, t_0, t)$ удовлетворяет неравенству

$$d(Y, x(x_0, t_0, t)) < \varepsilon, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + T, \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Следовательно, Y равномерно устойчиво вблизи начала координат. Кроме того, согласно предположению 3) и леммы 1 пара $(0, Y)$ удовлетворяет свойству Сейберта. В таком случае используя лемму 2, получаем равномерную устойчивость для состояния равновесия $x = 0$. □

4. Теорема об асимптотической устойчивости

Определение 4. Будем говорить, что положительно инвариантное множество Y является *равномерно асимптотически устойчивым вблизи начала координат*, если оно равномерно устойчиво вблизи начала координат и, более того, существует $\Delta > 0$ такое, что $x_0 \in B(0, \Delta)$, $t_0 \geq 0$ влечет равенство $\lim\limits_{t \to +\infty} d(Y, x(x_0, t_0, t)) = 0$.

Лемма 3. *Нулевое решение системы равномерно асимптотически устойчиво, если выполняются следующие условия*:

1) $x = 0$ *является равномерно* Y*-асимптотически устойчивым,*
2) Y *равномерно асимптотически устойчиво вблизи начала координат.*

Доказательство. Покажем, что существует число $\sigma > 0$ такое, что для всех $\alpha > 0$ можно указать $T = T(\sigma, \alpha) > 0$, которое удовлетворяет соотношению

$$\|x_0\| < \sigma \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t)\| < \alpha \quad \forall t_0 \geq 0, \quad \forall t \geq t_0 + T.$$

Действительно, из предположения 1) следует, что решение $x = 0$ является Y-равномерно притягивающим. Следовательно, по лемме 1 пара $(0, Y)$ обладает свойством Сейберта. Кроме того, согласно предположению 2) множество Y является равномерно устойчивым вблизи начала координат. В таком случае по лемме 2 решение $x = 0$ системы (1.1) равномерно устойчиво, т. е. $\forall \beta > 0\ \exists \sigma > 0$ такое, что

$$\|x_0\| < \sigma \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t)\| < \beta \quad \forall t_0 \geq 0, \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.1}$$

При этом число $\sigma > 0$ можно выбрать как угодно мылым. Поэтому с учетом предположения 2) для любого числа $\eta > 0$ существует число $T_1 > 0$ такое, что имеют место соотношения

$$\|x_0\| < \sigma \Rightarrow d(x(x_0, t_0, t_0 + T_1), Y) < \eta \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Иначе говоря, выполняется неравенство

$$d(x(x_0, t_0, t_0 + T_1), y) < \eta \quad \forall y : d(y, Y) < \eta, \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Отсюда с учетом (4.1) можем записать

$$\|x_0\| < \sigma \Rightarrow d(x(x_0, t_0, t_0 + T_1), y) < \eta, \quad \text{если} \quad d(y, Y) < \beta + \eta, \quad \forall t_0 \geq 0. \tag{4.2}$$

Поскольку $x = 0$ равномерно устойчиво, то по числу $\alpha > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t)\| < \alpha \quad \forall t_0 \geq 0, \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.3}$$

Более того, так как Y равномерно притягивающее вблизи начала координат, а числа $\beta, \eta > 0$ выбраны произвольно, то можно указать число $T_2 > 0$, удовлетворяющее соотношению

$$\|x_0\| < \beta + \eta, \quad x_0 \in Y \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t_0 + T_2)\| < \delta/2 \quad \forall t_0 \geq 0.$$

Далее, с учетом замечания 1

$$\|x_0\| < \beta + \eta, \quad x_0 \in Y \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t_0 + T_2)\| < \gamma \ \ \forall t_0 \geq 0.$$

Поэтому, используя свойство РИН, для чисел $\beta = \gamma$, $\varepsilon = \delta/2$, $T = T_2$ и $\delta = \eta$, удовлетворяющих (4.2), можем также записать

$$\|x_0\| < \beta + \eta, \quad x_0 \in Y \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t_0 + T_2)\| < \delta \ \ \forall t_0 \geq 0. \tag{4.4}$$

Положим $T = T_1 + T_2$ и используем последовательно неравенства (4.2), (4.4) и (4.3). Тогда получим условие

$$\|x_0\| < \sigma \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon \ \ \forall t_0 \geq 0, \quad \forall t \geq t_0 + T. \qquad \square$$

Теорема 2. *Предположим, что существуют окрестность U точки $x = 0$, функции $V \in \mathbf{C}^1(U^n \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ и $a, b, c \in \mathbf{K}$ такие, что для всех $(x,t) \in U \times \mathbb{R}^+$ выполняются следующие условия*:

1) $a(d(Y,x)) \leq V(x,t) \leq b(\|x\|)$, *где*

$$Y = \overline{\{x \in U : \ V(x,t) = 0 \ \forall t \geq 0\}};$$

2) $\dot{V}(x,t) \leq -c(d(Y,x))$;

3) $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* Y.

Тогда решение $x = 0$ системы (1.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Согласно теореме 1 решение $x = 0$ равномерно устойчиво, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t)\| < \varepsilon \ \ \forall t_0 \geq 0, \quad \forall t \geq t_0.$$

Покажем, что $d(Y, x(x_0, t_0, t)) \to 0$, если $t \to +\infty$.

Предположим противное. Тогда, поскольку Y равномерно устойчиво вблизи начала координат (см. доказательство теоремы 1), существует такое $\beta > 0$, что $d(Y, x(x_0, t_0, t)) \geq \beta$ $\forall t \geq t_0$. В этом случае из предположения 2) вытекает соотношение

$$V(x(x_0, t_0, t), t) \leq V(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t} c(\beta) dt = V(x_0, t_0) - c(\beta)(t - t_0) \to -\infty$$

при $t \to +\infty$. Но это невозможно для ограниченного решения $x(x_0, t_0, t)$, $t \geq t_0$ (оно содержится во множестве $B(0, \varepsilon)$) и непрерывной функции V, удовлетворяющей предположению 1).

Таким образом, Y является равномерно асимптотически устойчивым вблизи начала координат. Следовательно, из леммы 3 вытекает, что $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво. $\square$

Теорема 2′. *Предположим, что существуют окрестность U точки $x = 0$, функции $V \in \mathbf{C}^1(U \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, $W \in \mathbf{C}^0(U \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $V^* \in \mathbf{C}^0(U, \mathbb{R}^+)$ и $a, b, c \in \mathbf{K}$, а также две постоянные A, L такие, что для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times U$ имеют место следующие условия*:

1) $a(d(Y,x)) \leq V(x,t) \leq b(\|x\|)$, где

$$Y = \overline{\{x \in U : V(x,t) = 0 \ \ \forall t \geq 0\}};$$

2) $\dot{V}(x,t) \leq V^*(x) \leq 0$ *и пусть* $E_1 = \{x \in U : V^*(x) = 0\}$;

3) $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* Y;

4) $|W(x,t)| < L$;

5) $\max\{d(x, E_1), |\dot{W}(x,t)|\} \geq c(\|x\|)$;

6) $\|f(x,t)\| < A$ *и* $f \in C^1$.

Тогда решение $x = 0$ системы (1.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Условия 1)–3) гарантируют равномерную устойчивость $x = 0$ (см. теорему 1). Согласно теореме из работы [23] существует положительно определенная функция $V_p(x,t)$ такая, что $V_p(x,t) \le b_1(\|x\|)$, производная которой $\dot{V}_p(x,t) \le 0$. Положим $v(x,t) = V(x,t) + V_p(x,t)$, где $\dot{v}(x,t) = \dot{V}(x,t) + \dot{V}_p(x,t) \le 0$.

Обозначим $E = \{x \in U : \dot{v}(x,t) = 0 \quad \forall t \ge 0\}$. Тогда $E \subset E_1$. Следовательно, для множества E выполняются все предположения теоремы В.М. Матросова [8] о равномерной асимптотической устойчивости. □

5. Теорема о глобальной асимптотической устойчивости

В этой части работы полагаем $D = \mathbb{R}^n$ и считаем, что свойство РИН решений системы (1.1) верно в каждом шаре $B(0,\beta)$, $\beta > 0$. Напомним следующие понятия ([2], с. 18-20).

Точка p называется ω-предельной точкой решения $x(x_0,t_0,t)$, если существует неограниченно возрастающая последовательность значений времени (t_n) такая, что $x(x_0,t_0,t_n) \to p$ при $t_n \to +\infty$. Множество всех ω-предельных точек решения $x(x_0,t_0,t)$ называется ω-предельным множеством, которое будем обозначать символом $L^+(x_0,t_0)$. Очевидно, что по определению предельного множества

$$d(x(x_0,t_0,t), L^+(x_0,t_0)) \to 0 \ \text{ при } \ t \to +\infty. \tag{5.1}$$

Лемма 4. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) $x = 0$ *является равномерно Y-асимптотически устойчивым и Y-глобально притягивающим;*

2) *множество Y равномерно глобально асимптотически устойчиво;*

3) *все решения $x(x_0,t_0,t)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus Y$, $t_0 \ge 0$, ограничены.*

Тогда нулевое решение системы (1.1) *равномерно глобально асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Согласно лемме 3 нулевое решение системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво, т. е. оно равномерно устойчиво и, кроме того,

$$\exists\sigma > 0\ \forall\alpha > 0\ \exists T > 0\ \forall x_0 \in B(0,\sigma) \cap Y\ \forall t_0 \ge 0 \Rightarrow \|x(x_0,t_0,t)\| < \alpha \ \ \forall t \ge t_0 + T.$$

Для завершения доказательства леммы 4 достаточно показать, что с течением времени любое решение $x(x^*,t^*,t)$ попадает в шар $B(0,\sigma)$ при $t \to +\infty$.

Действительно, так как решение $x(x^*,t^*,t)$ ограничено, то его ω-предельное множество $L^+(x^*,t^*)$ непусто, компактно и удовлетворяет соотношению (5.1). Поэтому если $q \in L^+(x^*,t^*)$, то существует достаточно большой момент времени $T^* > 0$, для которого

$$\|x(x^*,t^*,t^*+T^*) - q\| < \delta.$$

С другой стороны, на основании предположения 2) предельное множество $L^+(x^*,t^*)$ содержится в Y, а значит, $q \in Y$. Кроме того, так как начало координат системы (1.1) является равномерно Y-глобально притягивающим, то по заданному состоянию $q \in Y$ и числу $\sigma/2 > 0$ можно указать такое число $\overline{T}$, что

$$\|x(q,t^*+T^*,t^*+T^*+\overline{T})\| < \sigma/2.$$

По свойству РИН имеем

$$\forall\sigma > 0\ \forall T > 0\ \exists\delta > 0 : \|x^* - y^*\| < \delta \Longrightarrow \|x(x^*,t^*,t) - x(y^*,t^*,t)\| < \sigma/2 \ \ \forall t \in [t^*, t^*+T].$$

В таком случае можем записать

$$\|x(x(x^*,t^*,t^*+T^*), t^*+T^*, \overline{T}) - x(q, t^*+T^*, \overline{T})\| < \sigma/2.$$

Теперь, используя неравенство треугольника, будем иметь

$$\|x(x^*,t^*,t^*+T^*+\overline{T})\| \equiv \|x(x(x^*,t^*,t^*+T^*),t^*+T^*,t^*+T^*+\overline{T})\| \leq$$
$$\leq \|x(x(x^*,t^*,t^*+T^*),t^*+T^*,t^*+T^*+\overline{T}) - x(q,t^*+T^*,t^*+T^*+\overline{T})\|+$$
$$+\|x(q,t^*+T^*,t^*+T^*+\overline{T})\| \leq \sigma/2+\sigma/2=\sigma.$$

Таким образом, доказано, что с течением времени любое решение системы (1.1) попадает в шар $B(0,\sigma)$ и, следовательно, притягивается началом координат. □

Теорема 3. *Пусть $D=\mathbb{R}^n$. Предположим, что существуют функции $V\in\mathbf{C}^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ и $a,b,c\in\mathbf{K}$ такие, что для всех $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^+$ выполняются следующие условия:*

1) $a(d(Y,x))\leq V(x,t)\leq b(d(Y,x))$ где

$$Y=\overline{\{x\in\mathbb{R}^n : V(x,t)=0\ \ \forall t\geq 0\}};$$

2) $\dot V(x,t)\leq -c(d(Y,x))$;

3) $x=0$ глобально равномерно асимптотически устойчиво относительно множества Y;

4) каждое решение $x(x_0,t_0,t)$, удовлетворяющее условию $V(x(x_0,t_0,t),t)\leq M<+\infty$, ограничено.

Тогда решение $x=0$ системы (1.1) глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Пусть выполнены все предположения теоремы 3. Тогда согласно лемме 4 утверждение теоремы будет доказано, если покажем, что замкнутое множество Y равномерно глобально асимптотически устойчиво.

Равномерная асимптотическая устойчивость множества Y следует из предположений 1) и 2).

Проверку глобального притяжения множества Y можно осуществить точно так же, как и доказательство свойства притяжения множества Y, используемое при обосновании теоремы 2.

Таким образом, по лемме 4 начало координат системы (1.1) равномерно глобально асимптотически устойчиво. □

6. Примеры

1. Рассмотрим уравнение типа Льенара вида

$$\ddot x+(1+h(x,\dot x,t))\dot x+xh(x,\dot x,t)=0,\quad x\in\mathbb{R},\quad t\geq 0,$$

где $h:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, равномерно ограниченная для всех $t\geq 0$ и $(x,\dot x)\in K$ на компактном множестве $K\subset\mathbb{R}^2$, содержащем открытую окрестность точки $x=0$, $\dot x=0$.

Возьмем знакопостоянную функцию $V(x,\dot x)=(x+\dot x)^2$. Ее производная в силу уравнения имеет вид $\dot V(x,\dot x,t)=-2h(x,\dot x,t)(x+\dot x)^2$.

Потребуем существование чисел $\sigma>0$ и $H>0$ таких, чтобы имели место неравенства

$$0<\sigma\leq h(x,\dot x,t)\leq H\ \ \text{для}\ \ (x,\dot x)\in K,\quad t\geq 0.$$

Тогда предположения 1) и 2) теоремы 2 будут выполнены и в этом случае согласно теореме 2 множество $Y=\{(x,\dot x)\in\mathbb{R}^2 : \dot x=-x\}$. Более того, на множестве Y исходная система сводится к скалярному дифференциальному уравнению $\dot x=-x$, нулевое решение которого равномерно асимптотически устойчиво. Следовательно, предположение 3) теоремы 2 также выполняется, и получаем равномерную асимптотическую устойчивость решения $x=0$, $\dot x=0$ исследуемой системы.

2. (Задача стабилизации). Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2^3, \quad \dot{x}_2 = x_3^3, \quad \dot{x}_3 = u. \tag{6.1}$$

Требуется указать управление $u = u(x_1, x_2, x_3)$, стабилизирующее нулевое решение до свойства равномерной глобальной асимптотической устойчивости.

Если положить $V = 1/4(x_1 + 2x_2 + x_3)^4$, то для функции управления

$$u = -x_2^3 - x_3^3 - (x_1 + 2x_2 + x_3)^3 \tag{6.2}$$

будем иметь производную по времени, равную $\dot{V} = -(x_1 + 2x_2 + x_3)^4$. Движение на подмножестве Y, где $V(x_1, x_2, x_3) = 0$, описывается системой

$$\dot{x}_1 = x_2^3, \quad \dot{x}_2 = -(x_1 + 2x_2)^3. \tag{6.3}$$

Такая система асимптотически устойчива, а в силу однородности правых частей и глобально асимптотически устойчива. Действительно, если положить $W = 1/2(x_1 + x_2)^2$, то производная W вдоль движений системы (6.3) определяется соотношением

$$\dot{W} = -(x_1 + x_2)^2(x_2^2 + x_2(x_1 + 2x_2) + (x_1 + 2x_2)^2) \leq 0.$$

На множестве, где $W = 0$, имеем $x_1 + x_2 = 0$, а значит, здесь система (6.3) сводится к скалярному дифференциальному уравнению $\dot{x}_1 = -x_1^3$, нулевое решение которого глобально асимптотически устойчиво. По теореме 2 заключаем, что система (6.1) является аимптотически устойчивой. Более того, с учетом однородности выбранного закона управления, такая система будет и глобально асимптотически устойчивой. Таким образом, управление (6.2) решает задачу стабилизации.

3. (Задача автоматического регулирования). Рассмотрим систему прямого управления второго порядка

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f(x_1, x_2, t); \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2, t) + \varphi(\sigma), \end{cases} \tag{6.4}$$

где функция f подчинена требованиям системы (1.1), $f(0, 0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0$, $\sigma = x_1 - x_2$, а функция φ удовлетворяет условию

$$\sigma\varphi(\sigma) > 0, \quad \sigma \neq 0 \quad (\varphi(0) = 0). \tag{6.5}$$

Известная задача абсолютной устойчивости ([6], с. 99–100) требует: найти условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (6.4) при любых начальных возмущениях и при любом выборе функции φ, удовлетворяющей условию (6.5).

Для решения поставленной задачи рассмотрим знакопостоянную функцию

$$V(x_1, x_2) = 0.5(x_1 - x_2)^2 \geq 0. \tag{6.6}$$

Ее производная в силу системы равна

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -(x_1 - x_2)\varphi(\sigma) = -\sigma\varphi(\sigma) \leq 0.$$

На множестве, где $\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, имеем $\sigma = 0$. Здесь исходная система редуцируется в скалярное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_1, t). \tag{6.7}$$

Если предположить выполненными соотношения

$$\frac{f(x_1, x_1, t)}{x_1} \leq \alpha < 0 \quad \forall x_1 \neq 0, \quad \forall t \geq 0, \tag{6.8}$$

то нулевое решение уравнения (6.7) будет равномерно асимптотически устойчивым. В этом можно убедиться, рассмотрев функцию Ляпунова $V_1(x_1) = x_1^2$. Поэтому, опираясь на теорему 2, получаем равномерную асимптотическую устойчивость начала координат исследуемой системы (6.4).

Для получения условий глобальной асимптотической устойчивости заметим, во-первых, что из свойств используемой функции (6.6) вытекает ограниченность выражения $|x_1 - x_2|$ вдоль решений исходной системы. Последнее означает, в частности, что если одна из координат решения ограничена при $t \geq 0$, то вторая также ограничена при всех $t \geq 0$. Поэтому, если, например, дополнительно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$f(x_1, x_2, t) \leq 0 \quad \text{при достаточно больших } x_1 \text{ и ограниченных } |x_1 - x_2|, \tag{6.9}$$

то всякое решение исследуемой системы будет ограниченным по координате x_1. Для подтверждения достаточно использовать функцию Ляпунова $V_1(x_1) = x_1^2$.

Таким образом, на основании теоремы 4 условия (6.5), (6.8) и (6.9) обеспечивают решение задачи абсолютной устойчивости системы (6.4).

Литература

[1] Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения* (Гостехиздат, М.–Л., 1950).

[2] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости* (Мир, М., 1980).

[3] Васильев С.Н. *Метод сравнения в анализе систем* 1, 2, Дифференц. уравнения **17** (9), 1562–1573 (1981); **17** (11), 1545–1554 (1981); **18** (2), 197–205 (1982); **18** (6), 938–947 (1982).

[4] Yoshizawa T. *Stability theory by Liapunov's second method* (Publ. Math. Soc. Japan, Tokyo, 1966).

[5] Artstein Z. *Uniform asymptotic stability via the limiting equations*, J. Diff. Equat. **27** (2), 172–189 (1978).

[6] Барбашин Е.А. *Функции Ляпунова* (Наука, М., 1970).

[7] Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения* (ГИФМЛ, М., 1959).

[8] Матросов В.М. *Об устойчивости движения*, ПММ **26** (5), 885–895 (1962).

[9] Калитин Б.С. *Устойчивость неавтономных динамических систем*, Актуальные задачи теории динамических систем управления (ИМ АН БССР, Минск, 1989), с. 37–46.

[10] Калитин Б.С. *К методу знакопостоянных функций Ляпунова для неавтономных дифференциальных систем*, Дифференц. уравнения **31** (4), 583–590 (1995).

[11] Калитин Б.С., Мурач В.А. *Устойчивость неавтономных систем по части переменных. Метод знакопостоянных функций Ляпунова*, Вестн. Белорусск. ун-та. Сер. 1, № 3, 71–72 (1995).

[12] Косов А.А. *О глобальной устойчивости неавтономных систем.* I, Изв. вузов. Матем., № 7, 28–35 (1997).

[13] Косов А.А. *О глобальной устойчивости неавтономных систем.* II, Изв. вузов. Матем., № 8, 33–42 (1997).

[14] Андреев А.С. *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений* (УлГУ, Ульяновск, 2005).

[15] Павликов С.В. *Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации*: монография (Институт управления, Набережные Челны, 2010).

[16] Седова Н.О. *Глобальная асимптотическая устойчивость и стабилизация в нелинейной каскадной системе с запаздыванием*, Изв. вузов. Матем., № 11, 68–79 (2008).

[17] Калитин Б.С. *Устойчивость замкнутых инвариантных множеств полудинамических систем. Метод знакопостоянных функций Ляпунова*, Дифференц. уравнения **38** (11), 1565–1566 (2002).

[18] Калитин Б.С. *Развитие метода знакопостоянных функций Ляпунова*, Выбраныя навуковыя працы Беларускага дзяржаўнага университэта: у 7 т. (БДУ, Мiнск, 2001). Т. VI: Матэматыка, с. 232–257.

[19] Iggidr A., Sallet G. *On the stability of nonautonomous systems*, Automatica **39** (1), 167–171 (2003).

[20] Kalitine B.S., Chabour R. *Method of semidefinite Lyapunov's function systems of nonautonomous differential equations*, Матем. моделир. и дифференц. уравнения. Тез. докл., Минск, 24–28 август 2009 (Минск, 2009), с 175–177.

[21] Seibert P. *On stability relative a set and to the whole space*, Papers presented at the 5th Int. Conf. Nonlin. Oscilations, Kiev, 1969, **2**, 448–457 (Izdat. Inst. Mat. Akad. Nauk USSR, 1970).

[22] Seibert P., Florio J.S. *On the reduction to a subspace of stability properties of systems in metric space*, Ann. Mat. Pura Appl., IV. Ser. 169, 291–320 (1995).

[23] Kurzweil J. *On the reversibility of the first theorem of Lyapunov concerning the stability of movement* (*Czech*), Czechoslovak Math. J. № 5, 382–398 (1955).

[24] Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости* (Наука, М., 1967).

Б.С. Калитин

доцент, кафедра методов оптимального управления,
Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, д. 4, г. Минск, 220030, Республика Беларусь,

`e-mail:` Kalitine@yandex.ru

Р. Шабур

доцент, факультет математики,
Университет Поля-Верлена в г. Месс,
Il du Saulcy, 57045, Metz-Cedex 01, France,

`e-mail:` rachid.chabour@univ-metz.fr

B.S. Kalitin and R. Chabour

Method of semidefinite Lyapunov functions for systems of nonautonomous differential equations

Abstract. We extend the method of semidefinite Lyapunov functions for analyzing the motion stability as applied to systems of nonautonomous differential equations. We prove basic stability theorems and illustrate them with examples.

Keywords: nonautonomous systems of differential equations, equilibrium, stability, Lyapunov function.

B.S. Kalitin

Associate Professor, Chair of Methods of Optimal Control,
Belarusian State University,
4 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030 Republic of Belarus,

`e-mail:` Kalitine@yandex.ru

R. Chabour

Associate Professor, Department of Mathematics,
Metz University P. Verlin,
Il du Saulcy, 57045, Metz-Cedex 01, France

`e-mail:` rachid.chabour@univ-metz.fr