Математические заметки

Том 85 выпуск 3 март 2009

УДК 517.938:925

Неустойчивость замкнутых инвариантных множеств полудинамических систем. Метод знакопостоянных функций Ляпунова

Б. С. Калитин

В работе доказывается принцип сведения для свойства неустойчивости замкнутого положительно инвариантного множества M полудинамических систем. Нетрадиционность результата подчеркивается требованием о существовании замкнутого положительно инвариантного множества, относительно которого M обладает свойством притяжения. Приведена соответствующая теоерема метода знакопостоянных функций Ляпунова о неустойчивости. Полученное утверждение обобщает известные теоремы Н. Г. Четаева и Н. Н. Красовского для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, теоеремы о неустойчивости по части переменных, а также теоеры С. Н. Шиманова и Дж. Хейла для систем с запаздывающим аргументом. Приведены иллюстрирующие примеры.

Библиография: 25 названий.

Введение

Начала качественной теории устойчивости движения абстрактных динамических систем, относящейся к вопросам орбитальной устойчивости инвариантных множеств заложены в монографии Зубова [1]. Здесь получил развитие метод функций Ляпунова [2], проведены исследования структуры окрестности замкнутых инвариантных множеств с точки зрения их свойств устойчивости. В дальнейшем исследования таких систем, в частности, по развитию второго метода были продолжены, их результаты можно найти в книгах Bhatia, Szegö [3], Самойленко [4], а также в работах [5]–[10]. В монографии [4] впервые было обращено внимание на связь принципа сведения [2] с вопросами существования знакопостоянных функций Ляпунова.

Как известно, цель принципа сведения – дать условия, позволяющие задачу об устойчивости относительно всего фазового пространства заменить задачей об устойчивости относительно его замкнутого подпространства. Метод знакопостоянных функций Ляпунова оказался удобным средством реализации принципа сведения для проблем устойчивости динамических процессов. Так в работах [2], [3] решается задача об устойчивости точек покоя систем обыкновенных автономных дифференциальных уравнений. В дальнейшем построению метода знакопостоянных функций Ляпунова были посвящены многочисленные исследования различных типов динамических процессов (см., например, обзорную статью [6] и [5], [7]–[9]). Это подтверждается также и обширными исследованиями задачи устойчивости с использованием знакопостоянных функционалов и функций Ляпунова для неавтономных функционально-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в работах Андрева и его учеников [10].

Отметим, что в большинстве работ по развитию метода знакопостоянных функций Ляпунова для динамических систем упор делается на использование отрицательных полутраекторий, наличие которых для динамических систем является естественным. В полудинамических системах, напротив, отрицательные полутраектории, как правило, отсутствуют. И поэтому обоснование основных теорем второго метода в классе знакопостоянных вспомогательных функций требует привлечение иных математических понятий качественной теории полудинамических систем. Практика приводимых доказательств показывает, что наиболее эффективными оказываются понятия, связанные, в первую очередь, не со свойствами метрического (фазового) пространства, а с особенностями динамики движений (см., например, [10]). В частности, использовалось свойство асимптотической компактности систем [11], а также “пороговое свойство” и равномерная интегральная непрерывность [12]–[14]. Доказан принцип сведения для устойчивости, асимптотической устойчивости и глобальной устойчивости в динамических и полудинамических системах [11]–[16]. Это позволило обосновать основные теоремы прямого метода, являющиеся непосредственным обобщением известных результатов [3] для задач устойчивости замкнутых инвариантных множеств.

Не смотря на достаточно полную разработку этого направления, до сих пор внимание исследователей было в основном обращено к трем основным вопросам метода знакопостоянных функций Ляпунова: устойчивость, асимптотическая устойчивость и глобальная асимптотическая устойчивость. Что же касается свойства неустойчивости, по-видимому, неумышленно сложилось мнение, что для соответствующего принципа сведения единственным приемлемым утверждением является тривиальное: неустойчивость относительно подмножества автоматически означает неустойчивость относительно всего фазового пространства.

В настоящей статье сформулирован принцип сведения для неустойчивости в нетривиальной постановке и на основе этого представлена теорема о неустойчивости метода знакопостоянных функций Ляпунова для замкнутых положительно инвариантных множеств в полудинамических системах. Особенность основного результата состоит в том, что выделяется класс исследуемых на неустойчивость замкнутых положительно инвариантных множеств, обладающих свойством притяжения относительно некоторого замкнутого слабо инвариантного множества. Применительно ко второму методу Ляпунова отличие сформулированного утверждения о неустойчивости от работ [17]–[21] состоит в том, что множество, где производная функции Ляпунова обращается в нуль, может содержать положительно инвариантные подмножества. Таким образом, расширен класс систем, для которых применимы знакопостоянные вспомогательные функции. Полученные результаты, в частности, усиливают и дополняют теоремы [10], [17], [18], [20], [21] о неустойчивости, а также соответствующие утверждения о неустойчивости по части переменных [10], [19], и расширяют возможности практического использования. Последнее подтверждается иллюстрирующими примерами.

1. Основные определения

Пусть (X, d) – метрическое пространство с функцией расстояния $d\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$. Тройка $(X, \mathbb{R}^+, \pi)$ называется *полудинамической системой* [22], [23], если отображение $\pi\colon X \times \mathbb{R}^+ \to X$ удовлетворяет следующим трем аксиомам:

1) $\pi(x, 0) = x \ \ \forall x \in X$;
2) $\pi(\pi(x, t), \tau) = \pi(x, t + \tau) \ \ \forall x \in X$ и $\forall t, \tau \in \mathbb{R}^+$;
3) π непрерывно.

Отображение $\pi\colon X \times \mathbb{R}^+ \to X$ называется *фазовым отображением*, а X – *фазовым пространством*. Положим для краткости $\pi(x, t) = xt \ \ \forall x \in X$ и $\forall t \in \mathbb{R}^+$. В соответствии с этим для каждого $x \in X$ и $t \in \mathbb{R}^+$ отображение $x\colon t \to xt$ называется *движением*, а множество $\gamma^+(x) = \{y \in X : y = xt,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ *положительной полутраекторией* этого движения (или точки x). Вводя обозначения $NI = \{x \in X : x \in N,\ t \in I\}$ для любого подмножества N из X и для любого интервала I из $\mathbb{R}^+$, можем записать $\gamma^+(x) = x\mathbb{R}^+$.

Через $\overline{N}$ и $\mathrm{Fr}N$ будем обозначать соответственно замыкание и границу множества N из X.

Множество N называют [22]

– *положительно инвариантным*, если $N\mathbb{R}^+ = N$;
– *слабо инвариантным*, если для любой точки $x \in N$ и для любого момента времени $\tau > 0$ существует точка $y \in N$ такая, что $y\tau = x$ и $\gamma^+(y) \subset N$.

Символом $L^+(x)$ будем обозначать множество всех ω – предельных точек для точки $x \in X$, $\varnothing$ – пустым множеством. Напомним [22], что для любой точки $x \in X$ множество $L^+(x)$ замкнуто и положительно инвариантно, а если $\gamma^+(x)$ относительно компактно, $L^+(x)$ непусто, компактно, связно и слабо инвариантно.

Положим $B(N, \alpha) = \{x \in X : d(N, x) < \alpha\}$, где число $\alpha > 0$, и будем использовать следующие определения.

Определение 1 [3]. Пусть M и Y два замкнутых непустых подмножества X таких, что Y содержит M. Говорят, что M является

– *неустойчивым*, если
$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists m \in M)(\exists p \in B(m, \delta))(\exists t^* = t^*(p) > 0)\colon \quad d(pt^*, M) \geqslant \varepsilon;$$
– *устойчивым относительно* Y, если для любой окрестности U множества M и для любой точки $m \in M$ можно указать окрестность U_m точки m такую, что $(U_m \cap Y)\mathbb{R}^+ \subset U$;
– *равномерно устойчивым относительно* Y, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $(B(M, \delta) \cap Y)\mathbb{R}^+ \subset B(M, \varepsilon)$;
– *равномерно слабо полупритягивающим относительно* Y, если
$$(\forall \alpha > 0)(\exists \sigma = \sigma(\alpha) > 0)(\forall \delta > 0)(\exists T = T(\sigma) > 0)\colon \\ (B(M, \sigma) \cap Y)T \subset B(M, \delta) \cap Y;$$
– *равномерно притягивающим относительно* Y, если
$$(\exists \sigma > 0)(\forall \delta > 0)(\exists T = T(\sigma, \delta) > 0)\colon \quad (B(M, \sigma) \cap Y)[T, +\infty[\subset B(M, \delta);$$
– *равномерно асимптотически устойчивым относительно* Y, если оно является равномерно устойчивым относительно Y и равномерно притягивающим относительно Y.

2. Принцип сведения

Введем предварительно следующее понятие.

Определение 2. Пусть X – метрическое пространство, а M и Y_0 – два замкнутых подмножества X таких, что M собственное подмножество Y_0. Будем говорить, что

– Y_0 *не является полупритягивающим вблизи* M, если

$$(\forall\sigma>0)(\exists m\in \mathrm{Fr}_{Y_0}M)(\exists p\in B(m,\sigma)\setminus Y_0)(\exists\eta=\eta(p)>0)(\forall t\geqslant 0):\quad d(Y_0,pt)\geqslant\eta;$$

– M *удовлетворяет условию* (K), если существует окрестность U множества M такая, что для любого числа $\mu>0$ и любой точки $p\in X$, удовлетворяющей условию $pt\in B(M,\mu)\subset U$ $\forall t\geqslant 0$ полутраектория $\gamma^+(p)$ относительно компактна.

Здесь $\mathrm{Fr}_{Y_0}M$ означает границу множества M в Y_0.

Замечание 1. Условие (K) для множества M заведомо выполняется, например, в следующих случаях:

a) существует окрестность M такая, что всякое движение, начинающееся в этой окрестности, устойчиво по Лагранжу в положительном направлении [11];

b) M есть замкнутое множество типа (B) [16];

c) M компактно, пространство X локально компактно.

Теорема 1. *Пусть X – метрическое пространство, а M и Y_0 – два замкнутых подмножества X, причем M собственное подмножество Y_0. Предположим, что существует окрестность U множества Y_0 такая, что выполнены следующие условия*:

1) *Y_0 не является полупритягивающим вблизи M*;

2) *M удовлетворяет условию (K)*;

3) *M равномерно слабо полупритягивающее относительно наибольшего слабо инвариантного подмножества Y из множества $E=\{x\in U\setminus Y_0: L^+(x)\neq\varnothing\}$.*

Тогда M неустойчиво.

Доказательство. Пусть выполнены все требования теоремы и пусть, напротив, множество M устойчиво. Тогда выполняются условия

$$(\forall m\in M)(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta=\delta(m,\varepsilon)>0)(\forall p\in B(m,\delta))(\forall t\geqslant 0):\quad d(pt,M)<\varepsilon, \tag{1}$$ {eq1}

где считаем, что $\overline{B(M,\varepsilon)}\subset U$.

Согласно требованию 1) для заданного числа $\delta>0$ имеем следующие соотношения:

$$(\exists\sigma>0)(\exists m\in \mathrm{Fr}_{Y_0}M)(\exists p\in B(m,\sigma)\setminus Y_0)(\exists\eta=\eta(\sigma,m,p)>0)(\forall t\geqslant 0):\quad d(Y_0,pt)\geqslant\eta. \tag{2}$$ {eq2}

Очевидно, не нарушая общности, можно считать $\sigma<\delta$. Пусть точка p удовлетворяет условиям (1), (2) и требованию 2) теоремы 1, где в соответствии с определением 2 выбираем число $\mu<\delta$. Тогда множество $L^+(p)\setminus Y_0$ непусто, компактно и слабо инвариантно. Поэтому для любой предельной точки $q\in L^+(p)\setminus Y_0$ и для любого числа $\alpha > 0$ можно указать последовательность моментов времени (t_n), $t_n \to +\infty$ такую, что будет выполняться неравенство

$$d(pt_n, q) < \alpha \qquad \forall n \geqslant 1. \tag{3}$$

{eq3}

Отметим, что по построению $L^+(p) \subset \overline{B(M, \varepsilon)}$. Поэтому с учетом требования 3) теоремы 1 для фиксированного числа $\eta > 0$ и для любой точки $q \in L^+(p) \setminus Y_0$ можно указать число $T > 0$ такое, что имеет место неравенство

$$d(M, qT) < \frac{\eta}{2}\,. \tag{4}$$

{eq4}

Далее, на основании свойства интегральной непрерывности [23] для заданных чисел $T > 0$, $\eta > 0$ и точки pt_n, подчиненной условию (1), можно указать число $\gamma = \gamma(T, \eta) > 0$ такое, что если $d(pt_n, p) < \gamma$, выполняется следующее неравенство:

$$d((pt_n)T, pT) < \frac{\eta}{2}\,. \tag{5}$$

{eq5}

Неравенство (5) будет выполняться, в частности, и для выбранной выше точки $p = q$, удовлетворяющей неравенству (3), если, не нарушая общности, считать $\alpha < \gamma$.

Теперь, воспользовавшись неравенством треугольника в точке $t = T$ и тем, что $d(Y_0, x) \leqslant d(M, x)$, из (4) и (5) (при $p = q$) получаем оценку

$$d(Y_0, (pt_n)T) \leqslant d(Y_0, qT) + d(qT, (pt_n)T) \leqslant d(M, qT) + \frac{\eta}{2} < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta.$$

Однако последнее соотношение противоречит неравенству (2). Таким образом, множество M неустойчиво, что и требовалось доказать.

Приведем достаточное условие выполнения требования 1) теоремы 1 в терминах функций Ляпунова.

Теорема 2. *Пусть X – метрическое пространство, а M и Y_0 – два замкнутых подмножества X таких, что M собственное подмножество Y_0. Предположим, что существует число $\Delta > 0$ и непрерывная функция $V\colon B(Y_0, \Delta) \to \mathbb{R}$ такие, что выполнены следующие условия*:

1) *$V(x) = 0$ при $x \in Y_0$ и для любого числа $\alpha > 0$ существуют точка $m \in \mathrm{Fr}_{Y_0} M$ и точка $x_0 \in B(m, \alpha) \setminus Y_0$, для которых $V(x_0) > 0$*;
2) *для любого числа $\lambda > 0$ существует число $\eta = \eta(\lambda) > 0$ такое, что $|V(x)| < \lambda$, если $x \in B(Y_0, \eta)$*;
3) *$V(xt) \geqslant V(x)$ $\forall x \in B(Y_0, \Delta)$ и $x[0, t] \subset B(Y_0, \Delta)$, $t \geqslant 0$.*

Тогда Y_0 не является полупритягивающим вблизи M.

Доказательство. Из предположения 1) теоремы 2, в частности, имеем следующее:

$$(\forall \alpha > 0,\ \alpha < \Delta)(\exists m \in \mathrm{Fr}_{Y_0} M)(\exists x_0 \in B(m, \alpha) \setminus Y_0)\colon \quad V(x_0) > 0.$$

Поэтому для заданного положительного числа $\lambda = V(x_0)$ на основании предположения 2) можно указать достаточно малое число $\eta > 0$ такое, что если $x \in B(Y_0, \Delta)$ и $d(x, Y_0) < \eta$, то $|V(x)| < V(x_0)$.

Зафиксируем число $\sigma < \alpha$. Тогда с учетом предположения 3) вдоль всякого движения $p\colon t \to pt$, $p \in B(m, \sigma) \setminus Y_0$, имеет место неравенство $V(pt) \geqslant V(p)$ при всех

$t \geqslant 0$. Поэтому согласно сделанным построениям для таких движений выполняется следующее условие: $d(Y_0, pt) \geqslant \eta$ $\forall t \geqslant 0$, где число $\eta = \eta(p) > 0$. Таким образом, множество Y_0 не является полупритягивающим вблизи M.

Замечание 2. a) Утверждение теоремы 1 относится к принципу сведения для задачи о неустойчивости (см., например, обзор литературы по этому вопросу в работе [12]). Оно своеобразно тем, что неустойчивость замкнутого множества M, принадлежащего замкнутому множеству Y_0, сводится, по существу, к двум требованиям: отсутствию притяжения Y_0 вблизи M и наличию движений в достаточно малой окрестности Y_0, равномерно слабо притягивающихся к M.

b) Теорема 1 остается верной, если требование 3) заменить следующим предположением:

3$'$) *каждая точка множества Y равномерно слабо притягивается множеством M либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$.*

Однако заметим, что здесь в случае $t \to -\infty$ утверждение о неустойчивости множества M становится тривиальным.

Рассмотрим приложение теорем 1 и 2 для специальных классов полудинамических систем.

3. Неавтономные дифференциальные уравнения

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x,t), \qquad x \in G \subset \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{6}$$

где G – открытая окрестность начала координат евклидового пространства $\mathbb{R}^n$, а $f\colon G \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, причем $f(0,t) = 0$ для всех $t \geqslant 0$. Пусть $\|\cdot\|$ – норма пространства $\mathbb{R}^n$, а $B(x,\varepsilon)$ – шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиусом $\varepsilon > 0$.

Предположим, что функция $f(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица по x, тогда для любой пары $(x_0,t_0) \in G \times \mathbb{R}^+$ существует единственное решение $x(x_0,t_0,t)$ системы (6), удовлетворяющее начальному условию $x(x_0,t_0,t_0) = x_0$. Более того, всякое такое решение непрерывно зависит от всех своих аргументов.

Стандартные приемы позволяют построить полудинамическую систему, соответствующую дифференциальному уравнению (6). Действительно, введем новую переменную $t = x_{n+1}$, $x_{n+1} \geqslant 0$, и перейдем от уравнения (6) к системе автономных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = f(x, x_{n+1}), \qquad \frac{dx_{n+1}}{d\tau} = 1 \tag{7}$$

в фазовом пространстве точек $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$. Производя изменение скорости движения вдоль траекторий системы (7) путем деления правой части на выражение $\sqrt{1 + \|f(x,x_{n+1})\|^2}$, можно перейти к системе, все решения которой существуют на вещественной оси времени $\mathbb{R}$. Это и дает, в точности соответствующую (7), динамическую систему. В преобразованной системе нулевому решению уравнения (6) отвечает замкнутое инвариантное множество $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_s = 0,$

$s = 1, 2, \ldots, n\}$. Таким образом, проблема устойчивости или неустойчивости нулевого решения (6) сводится соответственно к проблеме устойчивости или неустойчивости множества M динамической системы, отвечающей автономному дифференциальному уравнению (7).

Функцией Хана $a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ будем называть непрерывную строго возрастающую положительную функцию такую, что $a(0) = 0$.

Если $V\colon G \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция, через $\dot{V}$ обозначим производную по времени, вычисленную от функции V в силу системы (6).

Покажем, что из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что для системы* (6) *существуют, окрестность* U *начала координат* $\mathbb{R}^n$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V\colon U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *и функция Хана* a, *для которых выполняются следующие условия*:

1) $V(0,t) = 0\ \ \forall t \geqslant 0$ *и для любого числа* $\alpha > 0$ *существует точка* p, $0 < \|p\| < \alpha$, *и существует момент времени* $t_0 \geqslant 0$ *такие, что* $V(p,t_0) > 0$;
2) $|V(x,t)| \leqslant a(\|x\|)\ \ \forall (x,t) \in U \times \mathbb{R}^+$;
3) $\dot{V}(x,t) \geqslant 0\ \ \forall (x,t) \in U \times \mathbb{R}^+$;
4) *нулевое решение системы* (6) *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $Y = \overline{\{x \in U : \dot{V}(x,t) = 0,\, V(x,t) \neq 0\ \forall t \geqslant 0\}}$.

Тогда нулевое решение системы (6) *неустойчиво*.

Доказательство. Положим $Y_0 = \overline{\{x \in U : V(x,t) = 0\ \forall t \geqslant 0\}}$ и воспользуемся эквивалентным представлением уравнения (6) в виде уравнения (7). Нетрудно видеть, что из условий 1)–3) теоремы 3 для системы (6) следует выполнение условия 1) теоремы 1 для замкнутого множества $M = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_s = 0,\ s = 1, 2, \ldots, n\}$.

Кроме того, повторяя схему доказательства теоремы 1, замечаем, что требование 2) можно не предполагать заранее по двум причинам. Во-первых, поскольку оно непосредственно следует для первых n компонент множества M из условия (1), а во-вторых, специфика определения устойчивости или неустойчивости системы (7) такова, что в действительности оценка возмущений относится лишь к первым n компонентам фазового пространства X.

Наконец, требование 3) теоремы 1 будет выполненным по следующим соображениям. Согласно принципу инвариантности [24; гл. VIII, пп. 4, 5] наибольшее слабо инвариантное подмножество Y содержится во множестве

$$E = \overline{\{x \in U : \dot{V}(x,t) = 0\ \forall t \geqslant 0\}}.$$

Кроме того, схема доказательства теоремы 1 требует рассмотрения лишь движений, не принадлежащих множеству Y_0, что в данном случае означает $V(x,t) \neq 0$. Таким образом, из предположения 4) теоремы 3 следует выполнение требования 3) теоремы 1. Это и завершает доказательство теоремы 3.

Замечание 3. Путем несложных рассуждений можно увериться в том, что из теоремы 3 вытекают теоремы Четаева [17] и Красовского [18] о неустойчивости. Принципиальное отличие теоремы 3 состоит в рассмотрении полутраекторий на множествах, где производная функции Ляпунова обращается в нуль. Такие полутраектории должны соответствовать движениям изображающих точек в начало координат при $t \to +\infty$ (либо при $t \to -\infty$ в соответствии с замечанием 2, b)).

Пример 1. Пусть задано дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + (1 - (\dot{x} - a(x,t))^2)\dot{x} - x(\dot{x} - a(x,t))^2 = 0, \qquad |x| < h, \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$ {eq8}

где $h > 0$, $a\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию Липшица по x. Покажем, что при выполнении условия

$$xa(x,t) < a_0 < 0, \qquad x \neq 0, \quad t \geqslant 0 \tag{9}$$ {eq9}

решение $x = 0$, $\dot{x} = 0$ уравнения (8) неустойчиво. Действительно, рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(x,\dot{x}) = (\dot{x} + x)^2.$$

Ее производная по времени, вычисленная в силу уравнения (8), имеет вид

$$\dot{V}(x,\dot{x},t) = 2(\dot{x} - a(x,t))^2(\dot{x} + x)^2.$$

Очевидно, условия 1)–3) теоремы 3 выполняются. Для анализа условия 4) этой теоремы рассмотрим множество точек, где $\dot{V}(x,\dot{x},t) = 0$, $V(x,\dot{x}) \neq 0$. Это множество определяет скалярное дифференциальное уравнение первого порядка $\dot{x} = a(x,t)$, $t \geqslant 0$. В силу соотношения (9) нулевое решение такого уравнения асимптотически устойчиво. Поэтому нулевое решение исследуемого уравнения является асимптотически устойчивым относительно множества, где производная функции Ляпунова равна нулю, в то время как сама функция отлична от нуля. Это на основании теоремы 3 и позволяет сделать вывод о неустойчивости нулевого решения рассматриваемого уравнения (8).

Отметим, что для выбранной функции Ляпунова и предположения (9) условия теоремы [17] о неустойчивости не выполняются. Более того, здесь даже в случае, когда функция $a\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ является периодической по времени t, используемая функция Ляпунова не удовлетворяет условиям теоремы о неустойчивости [18].

3.1. Треугольные системы. Представительным примером приложения принципа сведения является случай треугольных дифференциальных уравнений. Рассмотрим частный случай системы (6)

$$\dot{x} = F(x,t) + H(x,y,t), \qquad \dot{y} = G(x,t) + K(x,y,t), \tag{10}$$ {eq10

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $F(0,t) = 0$, $G(0,t) = 0$, $H(0,y,t) = 0$ $\forall t \geqslant 0$. Положим $M = \{(0,0)\}$ и $Y_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} : x = 0\}$. Особенность треугольной системы характеризуется тем, что здесь замкнутое множество Y_0 положительно инвариантно.

Если множество Y_0 не является полупритягивающим вблизи M, то в соответствии с определением 2 это означает следующее: для любого числа $\sigma > 0$ существуют точка $p = (x_0, y_0)$, $x_0 \neq 0$, $\|p\| < \sigma$, момент времени $t_0 \geqslant 0$ и существует число $\eta = \eta(p) > 0$ такие, что для решения $(x(x_0,y_0,t_0,t), y(x_0,y_0,t_0,t))$ системы (10) выполняется условие $\|x(x_0,y_0,t_0,t)\| \geqslant \eta$ $\forall t \geqslant t_0$. Это условие может быть гарантировано утверждением теоремы 2. Поэтому для системы (10) из теоремы 3 с учетом замечания 2, b) непосредственно вытекает

Теорема 4. *Предположим, что для системы* (10) *существуют, окрестность* $U = U_x \times U_y$ *начала координат* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, *непрерывно дифференцируемая функция* $V\colon U_x\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *и функция Хана* a, *для которых выполняются следующие условия*:

1) *$V(0,t) = 0$ $\forall t \geqslant 0$ и для любого числа $\alpha > 0$ существует точка p, $0 < \|p\| < \alpha$, и существует момент времени $t_0 \geqslant 0$ такие, что $V(p,t_0) > 0$;*
2) *$|V(x,t)| \leqslant a(\|x\|)$ $\forall (x,t) \in U \times \mathbb{R}^+$;*
3) *$\dot{V}(x,y,t) \geqslant 0$ $\forall (x,y,t) \in U \times \mathbb{R}^+$, причем $\dot{V}(x,y,t) = 0$ $\forall t \geqslant 0$ означает $x = 0$;*
4) *нулевое решение системы*

$$\dot{y} = G(y,t) + K(0,y,t),$$

равномерно асимптотически устойчиво (или неустойчиво).

Тогда нулевое решение системы (10) неустойчиво.

Пример 2. Рассмотрим следующий частный случай системы (10):

$$\dot{x} = P(x,y,t)x, \qquad \dot{y} = Ax - P(x,y,t)y,$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n$, A – знакоопределенная матрица, а P – симметричная матричная функция.

Возьмем функцию Ляпунова в виде скалярного произведения $V(x,y) = \pm x'y$, где знак выбирается совпадающим со знаком свойства знакоопределенности матрицы A. Она имеет производную по времени в силу системы, равную $\dot{V}(x,y) = \pm x'Ax$, которая является знакоположительной функцией.

Очевидно, первые три условия теоремы 4 выполняются. Кроме того, поскольку на множестве, где производная обращается в нуль, равна нулю и функция Ляпунова, нет необходимости в проверке условия 4) теоремы 4. Таким образом, по теореме 4 нулевое решение данной системы неустойчиво при любой матрице $P(x,y,t)$, приемлемой в соответствии с условиями существования и единственности решений.

3.2. Устойчивость по отношению к части переменных. Практическая значимость задачи об устойчивости по отношению к части переменных подчеркивалась Ляпуновым [2] и детально разработана в трудах Румянцева и его учеников (см., например, [19]). Для формулировки соответствующего утверждения разделим в уравнении (6) компоненты вектора x на две группы переменных, положив $x = (y,z)$, где $y = (y_1,\ldots,y_m)$, $z = (z_1,\ldots,z_p)$. Рассмотрим задачу о неустойчивости нулевого решения (6) по отношению к координатам вектора y.

Несложные рассуждения показывают, что из теоремы 4 вытекают следующие результаты.

Теорема 5. *Предположим, что для системы (6) существуют, окрестность $U = U_y \times U_z$ начала координат $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$, непрерывно дифференцируемая функция $V: U \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и функция Хана a для которых выполняются условия*

1) *$V(0,t) = 0$ $\forall t \geqslant 0$ и для любого числа $\alpha > 0$ существует точка p, $0 < \|p\| < \alpha$, и существует момент времени $t_0 \geqslant 0$ такие, что $V(p,t_0) > 0$;*
2) *$|V(x,t)| \leqslant a(\|x\|)$ $\forall (x,t) \in U \times \mathbb{R}^+$;*
3) *$\dot{V}(x,t) \geqslant 0$ $\forall (x,t) \in U \times \mathbb{R}^+$;*
4) *нулевое решение системы (6) равномерно асимптотически устойчиво относительно множества $Y = \{x \in U : \dot{V}(x,t) = 0\, V(x,t) \neq 0\ \forall t \geqslant 0\}$.*

Тогда нулевое решение системы (6) y-неустойчиво.

Теорема 6. *Предположим, что выполнены условия 1)–3) теоремы 5 и, кроме того,*

1) *$V(0,z,t) = 0$ $\forall z \in U_z$ и $\forall t \geqslant 0$;*

2) *множество* $\{x \in U : y = 0\}$ *положительно инвариантно*;

3) *нулевое решение системы* (6) *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $Y = \overline{\{x \in U : \dot V(0,z,t) = 0,\ V(0,z,t) \neq 0\ \forall t \geqslant 0\}}$.

Тогда нулевое решение системы (6) *y-неустойчиво.*

Теоремы 5 и 6 расширяют возможности применения соответственно теорем 19.3 и 19.4 [19], обобщая их на неавтономный случай.

4. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом

Рассмотрим для простоты случай автономных уравнений. Пусть $C([-h,0],\mathbb{R}^n)$ – пространство Банаха непрерывных функций $\varphi\colon [-h,0] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|\varphi\| = \max_{s\in[-h,0]} \|\varphi(s)\|$ и со сходимостью в C, являющейся равномерной сходимостью на $[-h,0]$. Определим функцию $x_t\colon [h,0] \to \mathbb{R}^n$ равенством $x_t(s) = x(t+s)$, $-h \leqslant s \leqslant 0$. Пусть $f\colon X \subset C \to \mathbb{R}^n$ – непрерывная функция, где X – открытое подмножество в C. Предположим, кроме того, что f удовлетворяет локальному условию Липшица и отображает ограниченные множества из X в ограниченные множества из C.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot x = f(x_t). \tag{11}$$ {eq11

Обозначим через $x(\varphi)$ решение, начинающееся в точке $(0,\varphi)$. Известно [21], что в оговоренных предположениях решение единственно и непрерывно зависит от начальных условий. Наконец, пусть $f(0) = 0$, т.е. уравнение (11) обладает нулевым решением.

Определим фазовое отображение $\pi\colon X \times \mathbb{R}^+ \to X$ полудинамической системы $(X,\mathbb{R}^+,\pi)$ равенством $\pi(x_t,s) = x_{t+s}$, $s \in [-t,+\infty[$. В частности, $x(t) = x_t(0) = \pi(t,\varphi)(0)$. Нетрудно убедиться в том, что введенное таким образом отображение удовлетворяет трем определяющим аксиомам полудинамических систем.

Верхней правосторонней производной непрерывной функции $V\colon C \to \mathbb{R}$ вдоль решения уравнения (11) называют функцию

$$\dot V(x) = \overline{\lim_{s\to 0+}}\, \frac{V(x_s(\varphi)) - V(\varphi)}{s}\,.$$

Положим $B(0,\alpha) = \{\varphi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n) : \|\varphi\| \leqslant \alpha\}$. Тогда из теорем 1 и 2 для уравнения (11) вытекает следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть нуль принадлежит замыканию открытого множества* U *в* C *и* W – *окрестность нуля в* C. *Предположим, что для уравнения* (11) *существует непрерывная функция* $V\colon \overline{U \cap W} \to \mathbb{R}^+$, *и функция Хана* a, *для которых выполняются следующие условия*:

1) $V(0) = 0$ *и для любого числа* $\alpha > 0$ *существует элемент* $\varphi \in B(0,\alpha)$ *такой, что* $V(\varphi) > 0$;

2) $V(\varphi) \leqslant a(\|\varphi(0)\|)\ \ \forall \varphi \in U$;

3) $\dot V(\varphi) \geqslant 0\ \ \forall \varphi \in U$;

4) *нулевое решение системы* (11) *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $Y = \{\varphi \in \overline{U} : \dot V(\varphi) = 0,\ V(\varphi) \neq 0\}$.

Тогда нулевое решение системы (11) *неустойчиво.*

Действительно, положим $M = \{(0)\}$ и $Y_0 = \{\varphi \in C([-h,0],\mathbb{R}^n) : V(\varphi) = 0\}$. Тогда условия 1)–3) согласно теореме 2 означают, что множество Y_0 не является притягивающим вблизи решения $x = 0$ уравнения (11), т.е. для Y_0 выполняется требование 1) теоремы 1.

Поскольку для уравнения (11) из ограниченности траектории следует ее относительная компактность, для нулевого решения (множества M) условие 2) теоремы 1 также выполняется.

Кроме того, на основании принципа инвариантности [25] следует, что всякое слабо инвариантное множество уравнения (11) расположено на множестве $E = \{\varphi \in \overline{U} : \dot V(\varphi) = 0\}$. Следовательно, требование 4) теоремы 3 влечет выполнение требования 3) теоремы 1. Это доказывает теорему 7.

Пример 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение четвертого порядка с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} \dot y_1(t) = y_2(t), \\ \dot y_2(t) = y_3(t), \\ \dot y_3(t) = y_4(t), \\ \dot y_4(t) = y_1(t)(y_3(t) + a(y_1(t))y_2(t) + b(y_1(t))y_1(t) + \psi(y_1(t-h)))^2 + g(y_1(t), \end{cases} \tag{12}$$

{eq12

где $y_i(t) \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$. Здесь $h > 0$, функции $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ и $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны, удовлетворяют условию Липшица по y_1, причем, $\psi(0,t) = 0$ при всех $t \geqslant 0$, а $g(y_1) = 0$ тогда и только тогда, когда $y_1 = 0$.

Пусть $x(\varphi) = (y_1(\,\cdot\,), y_2(\,\cdot\,), y_3(\,\cdot\,), y_4(\,\cdot\,))$ – решение, отвечающее некоторой начальной функции $\varphi\colon [-h,0] \to \mathbb{R}^4$, и обозначим через x_t функцию, удовлетворяющую условию $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in [-h,0]$.

Для исследования проблемы неустойчивости решения $x(\varphi) = 0$ уравнения (12) используем метод функционалов Ляпунова [18].

Рассмотрим на C функцию Ляпунова

$$V(x_t) = y_1(t)y_3(t) - \frac{1}{2}y_2^2(t) - \int_0^{y_1(t)} g(s)\,ds.$$

Ее производная вдоль решения имеет следующий вид:

$$\dot V(x_t) = y_1^2(t)(y_3(t) + a(y_1(t))y_2(t) + b(y_1(t))y_1(t) + \psi(y_1(t-h)))^2.$$

Очевидно, для такой функции выполняются условия 1)–3) теоремы 7.

Укажем требования, обеспечивающие выполнение и условия 4) этой теоремы. Для этого рассмотрим подмножество пространства X, где $\dot V(x_t) = 0$ вдоль решений уравнения (12). Нетрудно видеть, что оно определяется двумя равенствами, а именно, либо $y_1(t) = 0$, либо

$$\ddot y_1(t) + a(y_1(t))\dot y_1(t) + b(y_1(t))y_1(t) + \psi(y_1(t-h)) = 0. \tag{13}$$

{eq13

1) Если существует положительная полутраектория, вдоль которой $y_1(t) = 0$, имеем также в силу системы уравнений, что $y_2(t) = 0$ и $y_3(t) = 0$. А тогда и $V(x_t) = 0$, поэтому требование 4) теоремы 7 выполняется.

2) Пусть существует решение системы (12), удовлетворяющее дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом (13). Уравнение типа (13) исследовалось Красовским [18; с. 203]. Здесь, в частности, установлено, что при выполнении следующих условий:

$$a(y) \geqslant a_0 > 0, \qquad b(y) \geqslant b_0 > 0, \qquad |\psi(z)| \leqslant L|z|, \qquad t \geqslant 0, \qquad a_0 > L \tag{14}$$

{eq14

нулевое решение $y_1(t) = 0$, $\dot{y}_1(t) = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Таким образом, соотношение (14) обеспечивает требование 4) теоремы 7, а значит, нулевое решение уравнения (12) неустойчиво.

Отметим, что выбранная функция Ляпунова не удовлетворяет условиям теоремы 5.3.3 [21] и теоремам V.2.6 и V.2.7 [10] о неустойчивости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. И. Зубов, *Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение*, Высшая школа, М., 1984.

[2] А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, Гостехиздат, М.–Л., 1950.

[3] N. P. Bhatia, G. Szegö, *Stability Theory of Dynamical Systems*, Die Grundlehren Math. Wiss., **161**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

[4] А. М. Самойленко, *Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы*, М., 1987.

[5] Н. Г. Булгаков, Б. С. Калитин, “Обобщение теорем второго метода Ляпунова. I. Теория”, *Изв. АН БССР. Сер. Физ.-матем. наук*, 1978, № 3, 32–36.

[6] Б. С. Калитин, “Развитие метода знакопостоянных функций Ляпунова”, *Выбраныя навуковыя працы БДУ*. Т. *Матэматыка*, БДУ, Мінск, 2001, 232–257.

[7] Б. С. Калитин, “Устойчивость замкнутых инвариантных множеств полудинамических систем. Метод знакопостоянных функций Ляпунова”, *Дифференц. уравнения*, **38**:11 (2002), 1565–1566.

[8] B. Kalitine, “Sur le théorème de la stabilit'e non asymptotique dans la méthode directe de Lyapunov”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **338**:2 (2004), 163–166.

[9] J.-C. Vivalda, B. Kalitin, “LaSalle's invariance principle and method of semi definite functions”, *Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер.* 1. *Физ. Матем. Информ.*, 2006, № 1, 62–67.

[10] А. С. Андреев, *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений*, УлГУ, Ульяновск, 2005.

[11] Я. С. Барис, О. Б. Лыкова, “Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. I”, *Укр. матем. журн.*, **41**:12 (1989), 1607–1613.

[12] П. Сейберт, “Принцип сведения в теории устойчивости динамических и полудинамических системах”, *Матем. заметки*, **56**:3 (1994), 134–143.

[13] P. Seibert, “Relative stability and stability of closed sets”, *Seminar on Differential Equations and Dynamical systems*, II, Lecture Notes in Math., **144**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1970, 185–189.

[14] P. Seibert, J. S. Florio, “On the reduction to a subspace of stability properties of systems in metric space”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **169**:1 (1995), 291–320.

[15] Б. С. Калитин, “К задаче Флорио–Сейберта”, *Дифференц. уравнения*, **25**:4 (1989), 727–729.

[16] Б. С. Калитин, “B-устойчивость и проблема Флорио–Сейберта”, *Дифференц. уравнения*, **35**:4 (1999), 453–463.

[17] Н. Г. Четаев, *Устойчивость движения*, ГИТТЛ, М., 1955.

[18] Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, ГИФМЛ, М., 1959.

[19] В. В. Румянцев, А. С. Озиранер, *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных*, Наука, М., 1987.

[20] С. Н. Шиманов, "О неустойчивости движения системы с запаздыванием по времени", *ПММ*, 1960, № 1, 55–63.

[21] Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984.

[22] S. H. Saperstone, *Semidynamical Systems in Infinite-Dimentional Space*, Appl. Math. Sci., **37**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1981.

[23] С. К. Сибирский, А. С. Шубэ, *Полудинамические системы. Топологическая теория*, Штиинца, Кишинев, 1987.

[24] Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа, *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*, М., 1980.

[25] J. P. LaSalle, *The Stability of Dynamical Systems*, With an appendix: "Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations" by Z. Artstein, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., **25**, Soc. Ind. Appl. Math., Philadelphia, Pa., 1976.

Б. С. Калитин
Белорусский государственный университет, Минск
E-mail: Kalitine@yandex.ru

Поступило
10.10.2007
Исправленный вариант
20.06.2008