Доклады Национальной академии наук Беларуси

2011 ноябрь-декабрь Том 55 № 6

УДК 517.988

А. Н. ТАНЫГИНА

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Белорусский государственный университет, Минск *Поступило 15.08.2011*

Пусть X и Y – банаховы пространства, $D \subset X$ – выпуклое множество, f и g – определенные на D и принимающие значения из Y нелинейные операторы, причем f дифференцируем в каждой внутренней точке множества D, а g – недифференцируемый оператор. Одним из наиболее эффективных методов решения операторного уравнения вида

$$f(x) + g(x) = 0 \tag{1}$$

является обобщенный метод Ньютона–Канторовича, последовательные приближения в котором задаются равенствами

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

где $x_0 \in D$ – заданное начальное приближение.

Среди известных оценок скорости сходимости последовательных приближений (2) к решению уравнения (1) наиболее точными являются оценки, полученные в работе [1], где для анализа скорости сходимости процесса (2) был применен метод мажорант Л. В. Канторовича [2, гл. XVIII]. Однако предположения относительно операторов f и g в указанной работе являются громоздкими и довольно сложными для проверки на практике, в связи с чем в [3] был предложен более совершенный подход к решению уравнения (1), сводящий изучение данного уравнения к изучению обычного скалярного уравнения при предположениях, что

$$\|f'(x'') - f'(x')\| \le \varphi(t)\|x'' - x'\|, \quad \forall x',\ x'' \in \overline{B(x_0, t)} \subseteq D, \tag{3}$$

$$\|g(x'') - g(x')\| \le \psi(t)\|x'' - x'\|, \quad \forall x',\ x'' \in \overline{B(x_0, t)} \subseteq D, \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – неубывающие функции неотрицательного аргумента. Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ постоянны, то условия (3) и (4) сводятся к классическим условиям Липшица.

В случае, когда $g = 0$, наиболее точные из известных оценки скорости сходимости процесса (2) были получены в работах [4; 5] при новом предположении о гладкости оператора f, названном авторами регулярной гладкостью. Цель настоящей работы – обобщение основного результата о сходимости последовательных приближений из [5] на уравнения вида (1) при предположении, что оператор f является регулярно гладким, а оператор g удовлетворяет условию (4).

Пусть $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – непрерывная строго монотонно возрастающая вогнутая функция, причем $\omega(0) = 0$; $\mathcal{N}$ – класс функций, обладающих такими свойствами. Без ограничения общности будем считать, что $f'(x_0) = I$. Обозначим $h(f) = \inf_{x \in D} \|f'(x)\|$. Согласно [5] оператор f называется *ω-регулярно гладким* на D (или ω является *модулем регулярной гладкости* для оператора f на D), если существует число $h \in [0, h(f)]$ такое, что для любых $x',\ x'' \in D$ имеет место неравенство

$$\omega^{-1}\left(h_f(x',x'')+\|f'(x'')-f'(x')\|\right)-\omega^{-1}\left(h_f(x',x'')\right)\le\|x''-x'\|, \qquad (5)$$

где

$$h_f(x',x'')=\min\left\{\|f'(x')\|,\|f'(x'')\|\right\}-h.$$

Оператор f называется *регулярно гладким* на D, если он является ω-регулярно гладким на D для некоторого $\omega\in\mathcal{N}$.

Условие (5) можно переписать в виде

$$\|f'(x'')-f'(x')\|\le\omega\left(\omega^{-1}(h_f(x',x''))+\|x''-x'\|\right)-h_f(x',x''),$$

или в виде

$$\|f'(x'')-f'(x')\|\le\omega\left(\xi(x',x'')+\|x''-x'\|\right)-\omega(\xi(x',x'')), \qquad (6)$$

где $\xi(x',x'')=\omega^{-1}(h_f(x',x''))$.

Л е м м а 1 [5]. *Если оператор f является ω-регулярно гладким на D с некоторым h, то для любых $x',\ x''\in D$ имеет место неравенство*

$$\left|\omega^{-1}\left(\|f'(x'')\|-h\right)-\omega^{-1}\left(\|f'(x')\|-h\right)\right|\le\|x''-x'\|.$$

Непосредственно из определения функции ξ и леммы 1 следует неравенство

$$\xi(x',x'')\ge\omega^{-1}\left(\|f'(x')\|-h\right)-\|x''-x'\| \qquad (7)$$

для любых $x',\ x''\in D$.

Как и в работах [1; 3], схема доказательства теоремы о сходимости последовательных приближений (2) основывается на использовании мажорантных уравнений. В процессе доказательства существенную роль играют приводимые ниже леммы.

Пусть $\omega\in\mathcal{N}$, $\Omega(t)=\int\limits_0^t\omega(\tau)d\tau$, $\Psi(t)=\int\limits_0^t\psi(\tau)d\tau$, a – положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\|f(x_0)+g(x_0)\|\le a.$$

Обозначим через χ постоянную

$$\chi=\omega^{-1}(1-h),$$

через Φ_h – функцию числового аргумента $t\in[0,\chi]$

$$\Phi_h(t)=a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-t)-th.$$

Определим числовую последовательность $\{t_n\}$ следующим рекуррентным соотношением:

$$t_{n+1}=t_n+\frac{a-\Omega(\chi)+\Omega(\chi-t_n)-t_nh+\Psi(t_n)}{h+\omega(\chi-t_n)}, \qquad (8)$$

$n=0,1,\ldots;\ t_0=0.$

Если ввести в рассмотрение функцию

$$W(t)=\Phi_h(t)+\Psi(t), \qquad (9)$$

то соотношение (8) можно переписать в виде

$$t_{n+1}=t_n-\frac{W(t_n)}{\Phi_h'(t_n)},$$

$n=0,1,\ldots;\ t_0=0.$

Л е м м а 2. *Пусть функция (9) имеет единственный нуль* t_* *на отрезке* $[0, \chi]$ *и выполнено условие*

$$a < \Omega(\chi) + h \cdot \chi - \Psi(\chi). \tag{10}$$

Тогда последовательность (8) определена корректно, монотонно возрастает и сходится к t_*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку t_* – единственный корень уравнения $W(t) = 0$, $W(0) = a > 0$ и W непрерывна на $[0, \chi]$, то W принимает на интервале $[0, t_*)$ положительные значения. В силу свойств функции ω функция $\Phi_h'(t) = -\omega(\chi - t) - h$ является отрицательной на интервале $[0, t_*)$. Таким образом, функция

$$u(t) = -\frac{W(t)}{\Phi_h'(t)}$$

положительна на $[0, t_*)$. Нетрудно показать, что $t + u(t)$ – неубывающая функция на $[0, t_*)$. Следовательно, последовательность $\{t_n\}$ монотонно возрастает и

$$t_{n+1} = t_n + u(t_n) \le t_* + u(t_*) = t_*$$

для $t_n \le t_*$. Таким образом, последовательность $\{t_n\}$ сходится к некоторому $t_{**} \in [0, t_*]$ и $t_{**} = t_{**} + u(t_{**})$, откуда $W(t_{**}) = 0$. Поскольку t_* – единственный нуль функции W на отрезке $[0, \chi]$, то $t_{**} = t_*$.

Последовательность $\{t_n\}$ определена корректно. Действительно, в силу условия (10) $W(\chi) < 0 < a = W(0)$ и, следовательно, существует $\theta \in (0, \chi)$ такое, что $W(\theta) = 0$. Значит, $\theta = t_* = \lim\limits_{n\to\infty} t_n$ и $t_n \le \theta < \chi$ для любого $n = 0, 1, \ldots$. В силу строгой монотонности функции ω значение $\omega(\chi - t_n) > 0$ для любого $n = 0, 1, \ldots$. Лемма доказана.

Л е м м а 3. *Пусть оператор f является* ω*-регулярно гладким на D с некоторым h, оператор g удовлетворяет условию (4), функция (9) имеет единственный нуль* t_* *на отрезке* $[0, \chi]$ *и замкнутый шар* $\overline{B(x_0, t_*)}$ *содержится во множестве D. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение* x_* *в шаре* $\overline{B(x_0, t_*)}$.

С х е м а   д о к а з а т е л ь с т в а. Доказательство существования решения x_* в шаре $\overline{B(x_0, t_*)}$ повторяет рассуждения, проведенные при доказательстве предложения 2 в [3]. В рассмотрение вводятся последовательность

$$u_{n+1} = Du_n \quad (n = 0, 1, \ldots;\ u_0 = x_0),$$

где $D = I - [f'(x_0)]^{-1}(f + g) = I - (f + g)$, и числовая последовательность

$$\rho_{n+1} = d(\rho_n) \quad (n = 0, 1, \ldots;\ \rho_0 = 0),$$

где $d(t) = t + W(t)$. Доказывается, что последовательность $\{\rho_n\}$ монотонно возрастает, сходится к t_* и для любого $n = 0, 1, \ldots$ справедливо неравенство $\|u_{n+1} - u_n\| \le \rho_{n+1} - \rho_n$, откуда следует, что последовательность $\{u_n\}$ является сходящейся к решению уравнения (1), лежащему в шаре $\overline{B(x_0, t_*)}$.

Для доказательства единственности решения x_* в шаре $\overline{B(x_0, t_*)}$ предполагается, что существует еще одно решение x_{**} уравнения (1) в этом шаре, отличное от x_*, и показывается, что при всех $n = 0, 1, \ldots$ справедливо неравенство $\|x_{**} - u_n\| \le t_* - \rho_n$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $x_{**} = x_*$.

В ходе доказательства при оценке норм вида $\|f'(x'') - f'(x')\|$ используются неравенства (6) и (7), а также тот факт, что в силу вогнутости ω разность $\omega(t + \tau) - \omega(t)$ не возрастает по *t* для каждого фиксированного $\tau > 0$. При оценке норм вида $\|g(x'') - g(x')\|$ используется неравенство

$$\|g(x'') - g(x')\| \le \Psi\left(t + \|x'' - x'\|\right) - \Psi(t) \quad \forall x', x'' \in \overline{B(x_0, t)} \subseteq D, \tag{11}$$

которое следует из условия (4) в силу предложения 1 из [3].

Обозначим для любого $n = 1, 2, \ldots$

$$r(x_{n-1}, x_n) = \left\| f(x_n) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \right\|.$$

Л е м м а 4. *Пусть оператор f является* ω*-регулярно гладким на D с некоторым h, оператор g удовлетворяет условию (4), последовательность* $\{t_n\}$ *определена по правилу (8) и выполнено условие (10). Если для любого* $1 \le k \le n$ *последовательные приближения* x_k *определены и удовлетворяют неравенству*

$$\left\| x_k - x_{k-1} \right\| \le t_k - t_{k-1}, \tag{12}$$

то справедлива оценка

$$r(x_{n-1}, x_n) \le a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_n) - t_n h + \Psi(t_{n-1}). \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_t = x_{n-1} + t(x_n - x_{n-1}),\ 0 \le t \le 1.$ Тогда

$$r(x_{n-1}, x_n) \le \int_0^1 \left\| f'(x_t) - f'(x_{n-1}) \right\| \left\| x_n - x_{n-1} \right\| dt \le$$

$$\le \int_0^1 \Big(\omega\big(\xi(x_{n-1}, x_t) + \left\| x_t - x_{n-1} \right\| \big) - \omega(\xi(x_{n-1}, x_t)) \Big) \left\| x_n - x_{n-1} \right\| dt.$$

В силу неравенства (7)

$$\xi(x_{n-1}, x_t) \ge \omega^{-1}\left(\left\| f'(x_{n-1}) \right\| - h \right) - \left\| x_t - x_{n-1} \right\| = \omega^{-1}\left(\left\| f'(x_{n-1}) \right\| - h \right) - t\left\| x_n - x_{n-1} \right\|.$$

Поскольку по предположению леммы для любого $1 \le k \le n$ имеет место неравенство (12), то

$$\left\| x_n - x_0 \right\| \le \sum_{k=1}^{n} \left\| x_k - x_{k-1} \right\| \le \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = t_n.$$

В силу леммы 1

$$\omega^{-1}\left(\left\| f'(x_n) \right\| - h \right) \ge \omega^{-1}\left(\left\| f'(x_0) \right\| - h \right) - \left\| x_n - x_0 \right\|.$$

Поскольку $\omega^{-1}\left(\left\| f'(x_n) \right\| - h \right) \ge 0,$ то

$$\omega^{-1}\left(\left\| f'(x_n) \right\| - h \right) \ge \left(\omega^{-1}\left(\left\| f'(x_0) \right\| - h \right) - \left\| x_n - x_0 \right\| \right)^+ \ge \left(\omega^{-1}\left(\left\| f'(x_0) \right\| - h \right) - t_n \right)^+, \tag{14}$$

где $\lambda^+ = \max\{\lambda, 0\}.$

Заметим, что $\left(\omega^{-1}\left(\left\| f'(x_0) \right\| - h \right) - t_n \right)^+ = \left(\omega^{-1}(1 - h) - t_n \right)^+ = (\chi - t_n)^+.$ Пусть $\alpha_n = (\chi - t_n)^+.$ В силу условия (10) $t_n < \chi$ для любого $n = 0, 1, \ldots,$ откуда следует, что $\alpha_n = \chi - t_n > 0$ для любого $n = 0, 1, \ldots.$ Неравенство (14) перепишется в виде

$$\omega^{-1}\left(\left\| f'(x_n) \right\| - h \right) \ge \alpha_n.$$

Аналогично

$$\omega^{-1}\left(\left\| f'(x_{n-1}) \right\| - h \right) \ge \alpha_{n-1}.$$

Используя предположение $\left\| x_n - x_{n-1} \right\| \le t_n - t_{n-1},$ получим

$$\omega^{-1}\left(\left\| f'(x_{n-1}) \right\| - h \right) - t\left\| x_n - x_{n-1} \right\| \ge \alpha_{n-1} - t(t_n - t_{n-1}),$$

откуда

$$\xi(x_{n-1}, x_t) \ge \alpha_{n-1} - t(t_n - t_{n-1}) = \alpha_{n-1} - t\delta_{n-1},$$

где $\delta_{n-1} = t_n - t_{n-1}.$

В силу вогнутости и монотонности ω имеем

$$r(x_{n-1}, x_n) \le \int_0^1 \left(\omega(\alpha_{n-1}) - \omega(\alpha_{n-1} - t\delta_{n-1})\right)\delta_{n-1} dt.$$

Производя замену $\tau = t\delta_{n-1}$, получим следующее равенство для правой части:

$$\int_0^1 \left(\omega(\alpha_{n-1}) - \omega(\alpha_{n-1} - t\delta_{n-1})\right)\delta_{n-1} dt = \omega(\alpha_{n-1})\delta_{n-1} + \Omega(\alpha_n) - \Omega(\alpha_{n-1}) =$$

$$= \omega(\chi - t_{n-1})\cdot(t_n - t_{n-1}) + \Omega(\chi - t_n) - \Omega(\chi - t_{n-1}).$$

Несложно показать, что в силу определения последовательности $\{t_n\}$ для любого $n = 0, 1, \ldots$ имеет место равенство

$$\omega(\chi - t_n)\cdot(t_{n+1} - t_n) - \Omega(\chi - t_n) + t_{n+1}h - \Psi(t_n) = a - \Omega(\chi).$$

Поэтому оценка для $r(x_{n-1}, x_n)$ может быть переписана в виде (13). Лемма доказана.

Основной результат работы – следующая

Теорема. *Пусть оператор f является ω-регулярно гладким на D с некоторым h, оператор g удовлетворяет условию (4), функция (9) имеет единственный нуль t_* на отрезке $[0, \chi]$, замкнутый шар $\overline{B(x_0, t_*)}$ содержится во множестве D и выполнено условие (10). Тогда*

1) *уравнение (1) имеет единственное решение x_* в шаре $\overline{B(x_0, t_*)}$;*

2) *последовательные приближения (2) определены для всех $n = 0, 1, \ldots,$ принадлежат шару $\overline{B(x_0, t_*)}$ и сходятся к x_*;*

3) *для всех $n = 0, 1, \ldots$ справедливы оценки*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \le t_{n+1} - t_n, \tag{15}$$

$$\|x_* - x_n\| \le t_* - t_n, \tag{16}$$

где последовательность $\{t_n\}$ определена по правилу (8), монотонно возрастает и сходится к t_*.

Доказательство. Для доказательства теоремы необходимо показать, что последовательные приближения (2) определены для всех $n = 0, 1, \ldots,$ принадлежат шару $\overline{B(x_0, t_*)}$ и удовлетворяют оценкам (15) и (16). Остальные утверждения следуют из лемм 2 и 3.

Так как (16) прямо следует из (15), достаточно доказать (15). Для $n = 0$ неравенство (15) очевидно:

$$\|x_1 - x_0\| = \left\|[f'(x_0)]^{-1}(f(x_0) + g(x_0))\right\| \le a = t_1 - t_0.$$

Предположим, что (15) выполняется для всех $n < k$, и покажем справедливость данного неравенства при $n = k$. Установим сначала обратимость оператора $f'(x_k)$. Имеем

$$\left\|[f'(x_0)]^{-1}(f'(x_k) - f'(x_0))\right\| = \|f'(x_k) - f'(x_0)\| \le \omega\left(\xi(x_0, x_k) + \|x_k - x_0\|\right) - \omega(\xi(x_0, x_k)).$$

В силу неравенства (7)

$$\xi(x_0, x_k) \ge \omega^{-1}\left(\|f'(x_0)\| - h\right) - \|x_k - x_0\| = \chi - \|x_k - x_0\|.$$

По предположению индукции

$$\|x_k - x_0\| \le \sum_{j=1}^{k} \|x_j - x_{j-1}\| \le \sum_{j=1}^{k} (t_j - t_{j-1}) = t_k$$

и, следовательно, $\xi(x_0, x_k) \ge \chi - t_k > 0$ ($t_k < \chi$ для любого $k = 0, 1, \ldots,$ так как предполагается выполненным условие (10)). В силу вогнутости ω

$$\omega\left(\xi(x_0, x_k) + \|x_k - x_0\|\right) - \omega(\xi(x_0, x_k)) \le \omega\left(\chi - t_k + \|x_k - x_0\|\right) - \omega(\chi - t_k) \le$$
$$\le \omega(\chi - t_k + t_k) - \omega(\chi - t_k) < \omega(\chi) - \omega(0) = \omega(\chi) = 1 - h \le 1.$$

Таким образом, $\left\|[f'(x_0)]^{-1}(f'(x_k) - f'(x_0))\right\| < 1.$ Следовательно, оператор

$$T = I + [f'(x_0)]^{-1}(f'(x_k) - f'(x_0))$$

обратим. Поскольку $f'(x_k) = f'(x_0)T = T,$ оператор $f'(x_k)$ также обратим и

$$\left\|[f'(x_k)]^{-1}\right\| = \left\|T^{-1}\right\| \le \frac{1}{1 - \|T - I\|} \le \frac{1}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_k)]}.$$

Далее, используя оценку для $r(x_{k-1}, x_k)$ из леммы 4 и неравенство (11), получаем

$$\|x_{k+1} - x_k\| = \left\|[f'(x_k)]^{-1}(f(x_k) + g(x_k))\right\| =$$
$$= \left\|[f'(x_k)]^{-1}(f(x_k) - f(x_{k-1}) - f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + g(x_k) - g(x_{k-1}))\right\| \le$$
$$\le \left\|[f'(x_k)]^{-1}\right\| \cdot \left\|f(x_k) - f(x_{k-1}) - f'(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\right\| + \left\|[f'(x_k)]^{-1}\right\| \cdot \left\|g(x_k) - g(x_{k-1})\right\| \le$$
$$\le \frac{r(x_{k-1}, x_k) + \Psi(t_k) - \Psi(t_{k-1})}{1 - [\omega(\chi) - \omega(\chi - t_k)]} \le \frac{a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_k) - t_k h + \Psi(t_k)}{h + \omega(\chi - t_k)} = t_{k+1} - t_k.$$

Следовательно, неравенство (15) выполняется для $n = k.$

Поскольку для любого $n = 0, 1, \ldots$ оператор $f'(x_n)$ обратим и $\|x_n - x_0\| \le t_n \le t_*,$ то последовательные приближения (2) определены для всех $n = 0, 1, \ldots$ и принадлежат шару $\overline{B(x_0, t_*)}.$ Сходимость последовательных приближений к x_* вытекает из неравенства (16). Теорема доказана.

В заключение отметим, что всякий гладкий по Липшицу оператор является регулярно гладким, в то время как обратное неверно. Поэтому доказанная теорема применима к более широкому классу нелинейных операторных уравнений вида (1) по сравнению с соответствующими теоремами о сходимости из [1; 3].

Автор выражает благодарность П. П. Забрейко за ценные замечания и обсуждение результатов работы.

Литература

1. З а б р е й к о П. П., З л е п к о П. П. // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 3. С. 365–369.
2. К а н т о р о в и ч Л. В., А к и л о в Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М., 1959.
3. Z a b r e j k o P. P., N g u e n D. F. // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1987. Vol. 9, № 5–6. P. 671–684.
4. G a l p e r i n A., W a k s m a n Z. // J. Comp. Appl. Math. 1991. Vol. 35. P. 207–215.
5. G a l p e r i n A., W a k s m a n Z. // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. 1994. Vol. 15, № 7–8. P. 813–858.

A. N. TANYHINA

anast-minsk@yandex.ru

GENERALIZED NEWTON–KANTOROVICH METHOD FOR EQUATIONS WITH NONDIFFERENTIABLE OPERATORS

Summary

The article deals with the generalized Newton–Kantorovich method for solving operator equations with nondifferentiable operators in Banach spaces. The convergence theorem is proved by means of majorant scalar equations.