ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Май—июнь 2010. Том 17, № 3. С. 32–45

УДК 519.8

О КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ МИНИМАКСНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С РАСПАДАЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

В. А. Емеличев, А. В. Карпук, К. Г. Кузьмин

Аннотация. Рассматривается многокритериальная комбинаторная задача последовательной оптимизации с минимаксными критериями. Получена формула предельного уровня возмущений параметров векторного критерия, при которых гарантируется сохранение всех лексикографических оптимумов исходной задачи.

Ключевые слова: минимаксная задача, задача на узкие места, многокритериальность, последовательная оптимизация, лексикографическое множество, лексикографический оптимум, квазиустойчивость, радиус квазиустойчивости.

Введение

В теории оптимизации видное место занимают так называемые минимаксные (или максиминные) задачи (см., например, [7, 18, 21]). К ним относится и задача, поставленная П. Л. Чебышёвым, о наилучшем равномерном приближении функции многочленами. Различают два вида задач с критериями MINMAX:

$$\max_{y\in B(x)} F(x,y) \to \min_{x\in X},$$

$$\max_{y\in Y} F(x,y) \to \min_{x\in X}.$$

Согласно [18] первые называются *задачами со связанными переменными*, а вторые — *с распадающимися переменными.*

Получению количественных и качественных характеристик различных типов устойчивости как скалярных, так и векторных (многокритериальных) минимаксных (на узкие места) комбинаторных задач со связанными переменными посвящён ряд публикаций (см. [1–5, 9, 13, 14]). В значительно меньшей степени исследована устойчивость минимаксных дискретных задач второго вида.

В этой статье получена количественная оценка одного из типов устойчивости лексикографического варианта комбинаторной задачи на узкие места с распадающимися переменными.

Лексикографический подход к решению многокритериальных задач, состоящий в строгом ранжировании критериев по относительной важности, позволяет добиваться оптимизации более важного критерия за счёт любых потерь по всем остальным менее важным критериям. Чаще всего такие многокритериальные задачи возникают при последовательном введении дополнительных критериев в обычные скалярные задачи оптимизации, которые могут иметь не единственное решение. Лексикографический подход применим также к задачам оптимизации, которые возникают в стохастическом программировании, при моделировании иерархических структур, при решении некоторых задач динамического характера и т. п. [17, 18].

Эта работа продолжает исследования различных типов устойчивости лексикографических дискретных задач [6, 8, 10, 11, 15, 16]. Здесь рассматривается лексикографическая задача, в которой оптимизация линейных форм (MINMAX) ведётся по двум множествам различной природы — по совокупности подстановок и множеству вершин единичного куба. Выведена формула радиуса квазиустойчивости, т. е. предельного уровня возмущений коэффициентов линейных форм в пространстве с чебышёвской метрикой, сохраняющих лексикографическое множество исходной задачи. В качестве следствий указаны сравнительно простые верхняя и нижняя достижимые оценки этого радиуса, а также необходимые и достаточные условия квазиустойчивости рассматриваемой лексикографической минимаксной задачи. Результаты статьи анонсированы в [12].

1. Основные определения и обозначения

Пусть $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im})$ — i-я строка матрицы C, $\mathbb{E}^m = \{0,1\}^m$ — множество вершин единичного m-мерного куба, P — непустое подмножество симметрической группы подстановок S_m, действующих на множестве $N_m = \{1, 2, \ldots, m\}$. Пусть на множестве $X \subset \mathbb{E}^m$, $|X| > 1$, булевых ненулевых векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$ задана вектор-функция

$$f(x, C) = (f_1(x, C_1), f_2(x, C_2), \ldots, f_n(x, C_n)),$$

компонентами которой являются минимаксные критерии вида

$$f_i(x, C_i) = \max_{p\in P} C_i[p]x \to \min_{x\in X}, \qquad i \in N_n,$$

где $C_i[p] = (c_{ip(1)}, c_{ip(2)}, \dots, c_{ip(m)})$, $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ p(1) & p(2) & \dots & p(m) \end{pmatrix}$.

Лексикографическое множество (*множество лексикографических оптимумов*) определим следующим образом:

$$L^n(C) = \{x \in X \mid \forall x' \in X \quad (x \underset{C}{\not\succ} x')\},$$

где $\underset{C}{\not\succ}$ — отрицание бинарного отношения $\underset{C}{\succ}$, задаваемого на множестве X формулой

$$x \underset{C}{\succ} x' \Leftrightarrow \exists k \in N_n (g_k(x, x', C_k) > 0 \& k = \min\{i \in N_n \mid g_i(x, x', C_i) \neq 0\}),$$

где $g_k(x, x', C_k) = f_k(x, C_k) - f_k(x', C_k)$.

Ясно, что множество $L^n(C)$ является непустым подмножеством множества Парето при любой матрице $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Задачу поиска лексикографического множества $L^n(C)$ будем обозначать через $Z^n(C)$. Известно (см., например, [17, 19]), что множество $L^n(C)$ может быть определено как результат решения последовательности n скалярных задач

$$L_i^n(C) = \operatorname{Arg}\min\left\{f_i(x, C_i) \mid x \in L_{i-1}^n(C)\right\}, \quad i \in N_n,$$

где $L_0^n(C) = X$, $\operatorname{Arg}\min\{\cdot\}$ — множество всех оптимальных решений соответствующей задачи минимизации. Таким образом, имеем последовательность множеств

$$X \supseteq L_1^n(C) \supseteq L_2^n(C) \supseteq \ldots \supseteq L_n^n(C) = L^n(C).$$

Тем самым задачу $Z^n(C)$ можно рассматривать как задачу последовательной оптимизации.

Аналогично [8, 16] *радиусом квазиустойчивости* задачи $Z^n(C)$ назовём величину

$$\rho^n(C) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \varnothing, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 \mid \forall C' \in \Omega(\varepsilon) \quad L^n(C) \subseteq L^n(C + C')\},$$

$$\Omega(\varepsilon) = \{C' \in \mathbb{R}^{n\times m} \mid \|C'\| < \varepsilon\},$$

$$\|C'\| = \max\{|c'_{ij}| \mid (i, j) \in N_n \times N_m\}, \qquad C' = [c'_{ij}].$$

Таким образом, радиус квазиустойчивости задачи $Z^n(C)$ задаёт предел независимых возмущений элементов матрицы C, при которых хотя и возможно появление новых лексикографических оптимумов, однако лексикографическое множество исходной задачи должно сохраняться. Отметим, что ранее в [20] получена формула радиуса устойчивости паретовского оптимума нашей задачи и тем самым — формула радиуса квазиустойчивости векторной задачи, состоящей в поиске множества Парето. Естественно считать, что радиус квазиустойчивости задачи $Z^n(C)$ бесконечен, если $L^n(C) \subseteq L^n(C+C')$ при любой матрице $C' \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Задачу $Z^n(C+C')$, полученную из исходной задачи $Z^n(C)$ путём сложения матриц C и $C' \in \Omega(\varepsilon)$, будем называть *возмущённой*, а матрицу C' — *возмущающей*.

Задачу $Z^n(C)$ назовём *квазиустойчивой*, если множество Ξ непусто, т. е. если $\rho^n(C) > 0$. Очевидно, что свойство квазиустойчивости задачи является дискретным аналогом свойства полунепрерывности снизу по Хаусдорфу в точке $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ оптимального отображения $L^n : \mathbb{R}^{n\times m} \to 2^X$, т. е. точечно-множественного отображения, которое каждому набору параметров задачи из метрического пространства $\mathbb{R}^{n\times m}$ ставит в соответствие лексикографическое множество $L^n(C)$.

Выводу формулы радиуса квазиустойчивости задачи $Z^n(C)$ предпошлём некоторые обозначения.

Для двух различных векторов x и x' введём множество подстановок

$$P(x,x') = \{p \in P \mid \forall p' \in P \quad (N(x,p) \neq N(x',p'))\},$$

$$\overline{P}(x,x') = P \setminus P(x,x'),$$

где $N(x,p) = \{p(j) \in N_m \mid j \in N(x)\}$, $N(x) = \{j \in N_m \mid x_j = 1\}$.

В этих обозначениях для любой матрицы $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$ очевидна импликация

$$N(x,p) = N(x',p') \;\Rightarrow\; \forall i \in N_n \quad (C_i[p]x = C_i[p']x'). \tag{1}$$

Лексикографический оптимум $x \in L^n(C)$ назовём *тривиальным*, если $P(x,x') = \varnothing$ при любом векторе $x' \in X \setminus \{x\}$, и *нетривиальным*, если существует такой вектор $x' \in X \setminus \{x\}$, что $P(x,x') \neq \varnothing$. Очевидно, что при $|P| = 1$ любой лексикографический оптимум является нетривиальным. Множество всех нетривиальных лексикографических оптимумов задачи $Z^n(C)$ будем обозначать через $\widetilde{L}^n(C)$. Задачу $Z^n(C)$ назовём *тривиальной*, если все её лексикографические оптимумы тривиальны ($\widetilde{L}^n(C) = \varnothing$), и *нетривиальной*, если $\widetilde{L}^n(C) \neq \varnothing$.

2. Теоремы о радиусе квазиустойчивости

Теорема 1. *Радиус квазиустойчивости $\rho^n(C)$ тривиальной задачи $Z^n(C)$, $n \geqslant 1$, равен бесконечности.*

Доказательство. Пусть x — тривиальный лексикографический оптимум задачи $Z^n(C)$. Тогда при каждом векторе $x' \in X \setminus \{x\}$ справедливо равенство $P(x, x') = \varnothing$. Поэтому для всякой подстановки $p \in P$ существует такая подстановка $p' \in P$, что $N(x, p) = N(x', p')$. Отсюда согласно (1) для любых $x' \in X \setminus \{x\}$, $p \in P$ и $C' \in \mathbb{R}^{n\times m}$ получаем неравенства

$$(C_i + C'_i)[p]x \leqslant f_i(x', C_i + C'_i), \quad i \in N_n,$$

т. е. $g_i(x, x', C + C') \leqslant 0$, $i \in N_n$. Тем самым $x \in L^n(C + C')$. Иными словами, $L^n(C) \subseteq L^n(C + C')$ при любой возмущающей матрице $C' \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Следовательно, $\rho^n(C) = \infty$. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим случай, когда задача $Z^n(C)$ нетривиальна ($\widetilde{L}^n(C) \neq \varnothing$).

Для всякого вектора $x \in X$ положим

$$X(x) = \{x' \in X \setminus \{x\} \mid P(x, x') \neq \varnothing\}.$$

Ясно, что $X(x) \neq \varnothing$ при $x \in \widetilde{L}^n(C)$.

Лемма 1. *Пусть $x \in \widetilde{L}^n(C)$, $\varphi > 0$, а для каждой возмущающей матрицы $C' \in \Omega(\varphi)$ и любого вектора $x' \in X(x)$ выполняется хотя бы одно из условий:*

(i) $g_i(x, x', C_i + C'_i) \leqslant 0$ *для всякого индекса* $i \in N_n$,

(ii) $x \underset{C+C'}{\prec} x'$.

Тогда $x \in L^n(C + C')$ при любой матрице $C' \in \Omega(\varphi)$.

Доказательство. Пусть $x \in \widetilde{L}^n(C)$. Прежде всего отметим, что каждое из условий (i) и (ii) влечёт формулу

$$\forall C' \in \Omega(\varphi)\ \forall x' \in X(x) \quad (x \underset{C+C'}{\overline{\succ}} x'). \tag{2}$$

Пусть теперь $x' \notin X(x)$, $p^0 = \arg\max\{(C_i + C'_i)[p]x \mid p \in P\}$. Тогда множество $P(x, x')$ пусто. Поэтому существует подстановка $p^* \in P$ такая, что $N(x, p^0) = N(x', p^*)$. Сравнивая это с (1), для любых $i \in N_n$ и $C' \in \Omega(\varphi)$ выводим

$$g_i(x, x', C_i + C'_i) = f_i(x, C_i + C'_i) - f_i(x', C_i + C'_i) = \max_{p\in P}(C_i + C'_i)[p]x$$
$$- \max_{p'\in P}(C_i + C'_i)[p']x' = (C_i + C'_i)[p^0]x - \max_{p'\in P}(C_i + C'_i)[p']x'$$
$$\leqslant (C_i + C'_i)[p^0]x - (C_i + C'_i)[p^*]x' = 0.$$

Теперь имеем $\forall C' \in \Omega(\varphi)\, \forall x' \in X \backslash X(x) \quad (x \underset{C+C'}{\succsim} x')$. Отсюда благодаря (2) заключаем, что x — лексикографический оптимум любой возмущённой задачи $Z^n(C+C')$, $C' \in \Omega(\varphi)$. Лемма 1 доказана.

Для нетривиальной задачи $Z^n(C)$ ($\widetilde{L}^n(C) \neq \varnothing$) положим

$$\varphi^n(C) = \min_{x \in \widetilde{L}^n(C)} \min_{x' \in X(x)} \min_{i \in N_n} \max\{\alpha_i(x,x'), \beta_i(x,x')\}, \tag{3}$$

где

$$\alpha_i(x,x') = \max_{j \in N_i} \min_{p \in P} \max_{p' \in P} \omega_j(x,p,x',p'),$$

$$\beta_i(x,x') = \min_{p \in P(x,x')} \max_{p' \in P} \gamma_i(x,p,x',p'),$$

$$\omega_i(x,p,x',p') = \begin{cases} \gamma_i(x,p,x',p') & \text{при } \sigma(x,p,x',p') > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma(x,p,x',p') = 0, \end{cases}$$

$$\gamma_i(x,p,x',p') = \frac{C_i[p']x' - C_i[p]x}{\sigma(x,p,x',p')}, \tag{4}$$

$$\sigma(x,p,x',p') = \left|(N(x,p) \cup N(x',p')) \setminus (N(x,p) \cap N(x',p'))\right|.$$

В этих обозначениях очевидны следующие соотношения:

$$C_i[p]x - C_i[p']x' \leqslant \|C_i\| \sigma(x,p,x',p'), \qquad i \in N_n, \tag{5}$$

$$\sigma(x,p,x',p') = 0 \;\Leftrightarrow\; N(x,p) = N(x',p'), \tag{6}$$

$$p \in \overline{P}(x,x') \;\Rightarrow\; \exists p' \in P \quad (\sigma(x,p,x',p') = 0). \tag{7}$$

Здесь и далее под нормой строки $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im})$ будем понимать чебышёвскую норму $\|C_i\| = \max\{|c_{ij}| \mid j \in N_m\}$.

Ввиду нетривиальности задачи $Z^n(C)$ для любого решения $x \in \widetilde{L}^n(C)$ множество $X(x)$ непусто, поэтому $P(x,x') \neq \varnothing$ при $x' \in X(x)$. Также очевидно, что $\sigma(x,p,x',p') > 0$ при $p \in P$ и $p' \in P(x,x')$. Всё это свидетельствует о том, что величины $\varphi^n(C)$, $\alpha_i(x,x')$ и $\beta_i(x,x')$ определены корректно. Кроме того, нетрудно видеть, что $\alpha_i(x,x') \geqslant 0$ при $x \in \widetilde{L}^n(C)$, $x' \in X(x)$, поэтому $\varphi^n(C) \geqslant 0$.

Теорема 2. *Радиус квазиустойчивости $\rho^n(C)$ нетривиальной задачи $Z^n(C)$, $n \geqslant 1$, выражается формулой*

$$\rho^n(C) = \varphi^n(C).$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство $\rho^n(C) \geqslant \varphi := \varphi^n(C)$. Это неравенство очевидно, если $\varphi = 0$. Пусть $\varphi > 0$. Согласно определению числа φ (см. (3)) для любых векторов $x \in \widetilde{L}^n(C)$, $x' \in X(x)$ и индекса $i \in N_n$ верны неравенства

$$\max\left\{\alpha_i(x,x'), \beta_i(x,x')\right\} \geqslant \varphi > 0. \qquad (8)$$

Кроме того, учитывая (5), нетрудно убедиться, что для любой возмущающей матрицы $C' \in \Omega(\varphi)$ со строками C'_i, $i \in N_n$, и любого индекса $i \in N_n$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} g_i(x,x',C_i+C'_i) &= \max_{p\in P}(C_i+C'_i)[p]x - \max_{p'\in P}(C_i+C'_i)[p']x' \\ &= \max_{p\in P}\min_{p'\in P}(C_i[p]x - C_i[p']x' + C'_i[p]x - C'_i[p']x') \\ &\leqslant \max_{p\in P}\min_{p'\in P} h_i(x,p,x',p'), \end{aligned} \qquad (9)$$

где $h_i(x,p,x',p') = C_i[p]x - C_i[p']x' + \|C'_i\|\sigma(x,p,x',p')$.

Далее покажем, что для любых векторов $x \in \widetilde{L}^n(C)$, $x' \in X(x)$ и матрицы $C' \in \Omega(\varphi)$ выполняется одно из условий (i) или (ii) леммы 1.

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $\alpha_i(x,x') < \beta_i(x,x')$, $i \in N_n$. Согласно (8) для каждого индекса $i \in N_n$ получаем

$$\beta_i(x,x') = \min_{p\in P(x,x')}\max_{p'\in P}\gamma_i(x,p,x',p') \geqslant \varphi > 0,$$

т. е. для любой подстановки $p \in P(x,x')$ существует подстановка $p^* \in P$ с условием $\gamma_i(x,p,x',p^*) \geqslant \varphi$, $i \in N_n$. Следовательно, ввиду (4) и неравенств $\|C'_i\| < \varphi$ и $\sigma(x,p,x',p^*) > 0$ для любого индекса $i \in N_n$ имеем

$$\begin{aligned} C_i[p^*]x' - C_i[p]x = \gamma(x,p,x',p^*)\sigma(x,p,x',p^*) &\geqslant \varphi\sigma(x,p,x',p^*) \\ &> \|C'_i\|\sigma(x,p,x',p^*), \end{aligned}$$

поэтому $h_i(x,p,x',p^*) < 0$. Это означает, что

$$\max_{p\in P(x,x')}\min_{p'\in P} h_i(x,p,x',p') < 0. \qquad (10)$$

Кроме того, в силу (9) получаем

$$\begin{aligned} g_i(x,x',C_i+C'_i) &\leqslant \max_{p\in P}\min_{p'\in P} h_i(x,p,x',p') \\ &= \max\{\max_{p\in P(x,x')}\min_{p'\in P} h_i(x,p,x',p'),\ \max_{p\in \overline{P}(x,x')}\min_{p'\in P} h_i(x,p,x',p')\}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Согласно (1), (6) и (7) для любой подстановки $p \in \overline{P}(x, x')$ существует такая подстановка $p^* \in P$, что $h_i(x, p, x', p^*) = 0$ при $i \in N_n$. Поэтому справедливы соотношения

$$\max_{p \in \overline{P}(x,x')} \min_{p' \in P} h_i(x, p, x', p') \leqslant 0, \qquad i \in N_n,$$

которые вместе с (10) и (11) дают неравенства

$$g_i(x, x', C_i + C'_i) \leqslant 0, \quad i \in N_n.$$

Следовательно, в случае 1 выполняется условие (i) леммы 1.

Случай 2. $U := \{i \in N_n \mid \alpha_i(x, x') \geqslant \beta_i(x, x')\} \neq \varnothing$. Пусть l — наименьший индекс множества U. Тогда ввиду (8) найдётся такой индекс $k \in N_l$, что справедливы соотношения

$$\alpha_l(x, x') = \min_{p \in P} \max_{p' \in P} \gamma_k(x, p, x', p') \geqslant \varphi.$$

Откуда следует, что для любой подстановки $p \in P$ существует такая подстановка $p^* \in P$, что $\gamma_k(x, p, x', p^*) \geqslant \varphi$. Поэтому в силу неравенств $\|C'_k\| < \varphi$ и $\sigma(x, p, x', p^*) > 0$ имеем

$$C_k[p^*]x' - C_k[p]x \geqslant \varphi\sigma(x, p, x', p^*) > \|C'_k\|\sigma(x, p, x', p^*),$$

а потому (ввиду (9)) находим

$$g_k(x, x', C_k + C'_k) \leqslant \max_{p \in P} \min_{p' \in P} h_k(x, p, x', p') < 0. \tag{12}$$

Если $k = 1$, то выполняется условие (ii) леммы 1.

Если $k > 1$, то $\alpha_i(x, x') < \beta_i(x, x')$, $i \in N_{k-1}$. Поэтому, повторяя выкладки случая 1, получаем неравенства

$$g_i(x, x', C_i + C'_i) \leqslant 0, \quad i \in N_{k-1}.$$

Отсюда и из (12) следует, что $x \underset{C+C'}{\prec} x'$, т.е. выполняется условие (ii) леммы 1.

Резюмируя оба случая и используя лемму 1, заключаем, что для всякого вектора $x \in \widetilde{L}^n(C)$ справедливо включение $x \in L^n(C + C')$ при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega(\varphi)$.

Если вектор x тривиальный, т.е. $x \in L^n(C) \setminus \widetilde{L}^n(C)$, то он согласно теореме 1 остаётся лексикографическим оптимумом любой возмущённой задачи $Z^n(C + C')$, $C' \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Из проведённых рассуждений заключаем, что для всякой матрицы $C' \in \Omega(\varphi)$ справедливо включение $L^n(C) \subseteq L^n(C + C')$. Следовательно, $\rho^n(C) \geqslant \varphi$.

Докажем неравенство $\rho^n(C) \leqslant \varphi$. Согласно определению числа φ найдутся такие векторы $x \in \widetilde{L}^n(C)$, $x' \in X(x)$ и индекс $k \in N_n$, что

$$\varphi \geqslant \alpha_k(x, x') = \max_{i \in N_k} \min_{p \in P} \max_{p' \in P} \omega_i(x, p, x', p'),$$

$$\varphi \geqslant \beta_k(x, x') = \min_{p \in P(x,x')} \max_{p' \in P} \gamma_k(x, p, x', p').$$

Следовательно, выполняются неравенства

$$\varphi \geqslant \alpha_i(x, x') \geqslant \min_{p \in P} \max_{p' \in P} \omega_i(x, p, x', p'), \qquad i \in N_k. \tag{13}$$

Покажем, что существует возмущающая матрица C^* такая, что $x \underset{C+C^*}{\succ} x'$.

Для индекса k выберем подстановку $p = p(k) \in P(x, x')$ по правилу

$$\min_{p \in P(x,x')} \max_{p' \in P} \gamma_k(x, p, x', p') = \max_{p' \in P} \gamma_k(x, p(k), x', p').$$

Для всякого индекса $i \in N_{k-1}$ (при $k > 1$) зафиксируем подстановку $p = p(i) \in P$ согласно равенству

$$\min_{p \in P} \max_{p' \in P} \omega_i(x, p, x', p') = \max_{p' \in P} \begin{cases} \gamma_i(x, p(i), x', p') & \text{при } \sigma(x, p(i), x', p') > 0, \\ 0 & \text{при } \sigma(x, p(i), x', p') = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Пусть $\varphi < \delta < \varepsilon$ и возмущающая матрица $C^* = [c^*_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ такая, что каждая i-я строка C^*_i, $i \in N_k$, состоит из элементов

$$c^*_{ij} = \begin{cases} \delta & \text{при } j \in N(x, p(i)), \\ -\delta & \text{при } j \notin N(x, p(i)), \end{cases}$$

а остальные строки C^*_i, $i \in \{k+1, k+2, \dots, n\}$, (если они существуют) состоят из нулей. Тогда $C^* \in \Omega(\varepsilon)$, $\|C^*\| = \|C^*_i\| = \delta > \varphi$ при $i \in N_k$ и очевидна формула

$$\forall i \in N_k \ \forall p' \in P \qquad \big(C^*_i[p']x' - C^*_i[p(i)]x + \delta\sigma(x, p(i), x', p') = 0\big). \tag{15}$$

Для доказательства отношения $x \underset{C+C^*}{\succ} x'$ покажем, что имеют место неравенства

$$g_i(x, x', C_i + C^*_i) \geqslant 0, \quad i \in N_k, \tag{16}$$

причём
$$g_k(x, x', C_k + C_k^*) > 0. \tag{17}$$

Учитывая (15), для каждого $i \in N_k$ находим

$$g_i(x, x', C_i + C_i^*) = \max_{p \in P}(C_i + C_i^*)[p]x - \max_{p' \in P}(C_i + C_i^*)[p']x'$$
$$\geqslant (C_i + C_i^*)[p(i)]x - \max_{p' \in P}(C_i + C_i^*)[p']x' = (C_i + C_i^*)[p(i)]x - (C_i + C_i^*)[p'(i)]x'$$
$$= C_i[p(i)]x - C_i[p'(i)]x' + \delta\sigma(x, p(i), x', p'(i)). \tag{18}$$

Если $\sigma(x, p(i), x', p'(i)) = 0$, то согласно (1) и (6) верно равенство

$$C_i[p'(i)]x' = C_i[p(i)]x,$$

а потому в силу (18) имеем $g_i(x, x', C_i + C_i^*) \geqslant 0$.

Если $\sigma(x, p(i), x', p'(i)) > 0$, то, последовательно используя (13) и (14), получаем $\varphi \geqslant \max_{p' \in P} \gamma_i(x, p(i), x', p')$. Отсюда на основании (18) выводим

$$g_i(x, x', C_i + C_i^*) \geqslant C_i[p(i)]x - C_i[p'(i)]x' + \delta\sigma(x, p(i), x', p'(i))$$
$$> C_i[p(i)]x - C_i[p'(i)]x' + \varphi\sigma(x, p(i), x', p'(i))$$
$$\geqslant C_i[p(i)]x - C_i[p'(i)]x' + \sigma(x, p(i), x', p'(i)) \max_{p' \in P} \gamma_i(x, p(i), x', p')$$
$$\geqslant C_i[p(i)]x - C_i[p'(i)]x' + \sigma(x, p(i), x', p'(i))\gamma_i(x, p(i), x', p'(i)) = 0.$$

Итак, доказаны неравенства (16).

Поскольку $p(k) \in P(x, x')$, то $\sigma(x, p(k), x', p') > 0$ при любой подстановке $p' \in P$ и, в частности, при $p' = p'(k)$. Поэтому имеет место строгое неравенство (17).

Подводя итоги, заключаем, что верно бинарное отношение $x \underset{C+C^*}{\succ} x'$. Следовательно, для любого числа $\varepsilon > \varphi$ существует такая возмущающая матрица $C^* \in \Omega(\varepsilon)$, что вектор $x \in \widetilde{L}^n(C)$ не является лексикографическим оптимумом возмущённой задачи $Z^n(C + C^*)$, т. е. $\rho^n(C) \leqslant \varphi$. Теорема 2 доказана.

3. Следствия

Отметим несколько частных случаев теоремы 2.

Поскольку для всякого индекса $i \in N_n$ и любых векторов $x, x' \in X$ справедливо неравенство $\alpha_1(x, x') \leqslant \alpha_i(x, x')$, то

$$\alpha_1(x, x') \leqslant \max\{\alpha_i(x, x'), \beta_i(x, x')\}.$$

Кроме того, очевидно неравенство $\alpha_1(x, x') \leqslant \beta_1(x, x')$. Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие 1. *Для радиуса квазиустойчивости $\rho^n(C)$ нетривиальной задачи $Z^n(C)$, $n \geqslant 1$, верны следующие оценки*:

$$\min_{x \in \widetilde{L}^n(C)} \min_{x' \in X(x)} \alpha_1(x, x') \leqslant \rho^n(C) \leqslant \min_{x \in \widetilde{L}^n(C)} \min_{x' \in X(x)} \beta_1(x, x').$$

Если $P = \{p^*\}$, то $\widetilde{L}^n(C) = L^n(C)$, $X(x) = X \setminus \{x\}$ и, кроме того, при $x \neq x'$ имеем $\alpha_1(x, x') = \beta_1(x, x')$ и $\sigma(x, p^*, x', p^*) > 0$. Поэтому из следствия 1 получаем

Следствие 2. *Если множество P состоит из одной подстановки p^*, то*

$$\rho^n(C) = \min_{x \in L^n(C)} \min_{x' \in X \setminus \{x\}} \frac{C_1[p^*](x' - x)}{\sigma(x, p^*, x', p^*)}, \qquad n \geqslant 1.$$

Следствие 3. *Нетривиальная задача $Z^n(C)$, $n \geqslant 1$, квазиустойчива тогда и только тогда, когда для любых векторов $x \in \widetilde{L}^n(C)$, $x' \in X(x)$ и индекса $i \in N_n$ выполняется хотя бы одно из условий*:

(j) $\exists k \in N_i \ \ \forall p \in P \ \ \exists p^0 \in P \qquad (C_k[p^0]x' > C_k[p]x)$,

(jj) $\forall p \in P(x, x') \ \ \exists p^* \in P \qquad (C_i[p^*]x' > C_i[p]x)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть задача $Z^n(C)$ квазиустойчива. Тогда в силу теоремы 2 справедливо неравенство $\varphi^n(C) > 0$. Поэтому для любых векторов $x \in \widetilde{L}^n(C)$, $x' \in X(x)$ и индекса $i \in N_n$ имеет место хотя бы одно из неравенств

$$\alpha_i(x, x') > 0 \qquad \text{или} \qquad \beta_i(x, x') > 0,$$

которые в силу определения величин $\alpha_i(x, x')$ и $\beta_i(x, x')$ приводят к условиям (j) и (jj) соответственно.

Достаточность. Пусть $x \in \widetilde{L}^n(C)$, $x' \in X(x)$ и $i \in N_n$. Поскольку при выполнении условия (j) величина $\sigma(x, p, x', p^0)$ положительна (ввиду (5)), то для индекса $k \in N_i$, указанного условием (j), находим

$$\omega_k(x, p, x', p^0) = \gamma_k(x, p, x', p^0) = C_k[p^0]x' - C_k[p]x > 0.$$

Следовательно, $\alpha_i(x, x') > 0$.

Так как $\gamma(x, p, x', p^*) > 0$ при условии (jj), то $\beta_i(x, x') > 0$.

Таким образом, $\max\{\alpha_i(x, x'), \beta_i(x, x')\} > 0$ при любых $x \in \widetilde{L}^n(C)$, $x' \in X(x)$ и $i \in N_n$. Это означает, что $\varphi^n(C) > 0$, т. е. в силу теоремы 2 справедливо неравенство $\rho^n(C) > 0$. Следовательно, задача $Z^n(C)$ квазиустойчива. Следствие 3 доказано.

На основании следствий 2 и 3 легко может быть доказано

Следствие 4. *Для того чтобы нетривиальная задача* $Z^n(C)$, $n \geqslant 1$, *была квазиустойчива, достаточно, а в случае, когда* $|P| = 1$, *и необходимо, чтобы выполнялись равенства* $|L^n(C)| = \left|L_1^n(C)\right| = 1$.

Здесь $L_1^n(C)$ — множество Arg min, определённое в разд. 1.

Поскольку при любых векторах $x \neq x'$ выполняется неравенство $\alpha_1(x, x') \leqslant \beta_1(x, x')$, используя теорему 2, приходим к следующему утверждению.

Следствие 5. *Радиус квазиустойчивости* $\rho^1(C)$ *нетривиальной скалярной задачи* $Z^1(C)$, $C = (c_1, c_2, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m$, *определяется формулой*

$$\rho^1(C) = \min_{x \in \widetilde{L}^1(C)} \min_{x' \in X(x)} \min_{p \in P(x,x')} \max_{p' \in P} \frac{C[p']x' - C[p]x}{\sigma(x, p, x', p')}.$$

В частном случае, когда множество P состоит лишь из тождественной подстановки

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix},$$

получаем лексикографическую линейную задачу булева программирования:

$$\operatorname{lex}\min_{x \in X}(C_1 x, C_2 x, \ldots, C_n x), \qquad X \subseteq \mathbb{E}^m.$$

Поэтому из теоремы 2 выводится следующий известный результат.

Следствие 6 [8]. *Радиус квазиустойчивости* $\rho^n(C)$, $n \geqslant 1$, *лексикографической линейной задачи булева программирования равен числу*

$$\min_{x \in L^n(C)} \min_{x' \in X \setminus \{x\}} \frac{C_1(x' - x)}{\sum\limits_{j=1}^{m} |x'_j - x_j|}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воденников А. Г., Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Об одном типе устойчивости векторной комбинаторной задачи размещения // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 2. — С. 32–40.
2. **Гордеев Э. Н., Калиновский М. А.** Об устойчивости решений в задачах вычислительной геометрии // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — № 2. — С. 3–14.
3. **Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К.** Общий подход к исследованию устойчивости решений в задачах дискретной оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1996. — Т. 36, № 1. — С. 66–72.

4. **Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К.** Устойчивость в задачах на узкие места // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1980. — Т. 20, № 4. — С. 1071–1075.
5. **Гордеев Э. Н.** Об устойчивости задач на узкие места // Журн. вычисл. математики и мат. физики. — 1993. — Т. 33, № 9. — С. 1391–1402.
6. **Гуревский Е. Е., Емеличев В. А.** Анализ устойчивости лексикографической булевой задачи минимизации модулей линейных функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2007. — Т. 14, № 1. — С. 59–71.
7. **Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.** Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 368 с.
8. **Емеличев В. А., Бердышева Р. А.** О радиусах устойчивости, квазиустойчивости и стабильности векторной траекторной задачи лексикографической оптимизации // Дискрет. математика. — 1998. — Т. 10, вып. 1. — С. 20–27.
9. **Емеличев В. А., Гуревский Е. Е.** О пяти типах устойчивости лексикографического варианта комбинаторной задачи на узкие места // Дискрет. математика. — 2009. — Т. 21, вып. 3. — С. 3–13.
10. **Емеличев В. А., Гуревский Е. Е.** О ядре устойчивости многокритериальной комбинаторной минимаксной задачи // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 5, — С. 6–19.
11. **Емеличев В. А., Карелкина О. В.** О квазиустойчивости лексикографической минисуммной задачи размещения // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2009. — Т. 16, № 2, — С. 74–84.
12. **Емеличев В. А., Карпук А. В., Кузьмин К. Г.** О квазиустойчивости лексикографической минимаксной задачи булева программирования // Дискрет. математика, алгебра и их прил. Тез. докл. Междунар. науч. конф. — Минск: ИМ НАН Беларуси, 2009. — С. 91–92.
13. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** Критерии устойчивости векторных комбинаторных задач «на узкие места» в терминах бинарных отношений // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 103–111.
14. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М.** Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 2. — С. 79–92.
15. **Емеличев В. А., Кузьмин К. Г.** О радиусе устойчивости лексикографического оптимума одной векторной задачи булева программирования // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 2. — С. 71–80.
16. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. — 2001. — Т. 8, № 1. — С. 47–69.
17. **Подиновский В. В., Гаврилов В. М.** Оптимизация по последовательно применяемым критериям. — М.: Советское радио, 1975. — 192 с.
18. **Федоров В. В.** Численные методы максимина. — М.: Наука, 1979. — 280 с.

19. **Ehrgott M.** Multicriteria optimization. Second edition. — Berlin; Heidelberg: Springer–Verl., 2005. — 323 p.
20. **Emelichev V. A., Krichko V. N., Nikulin Y. V.** The stability radius of an efficient solution in minimax Boolean programming problem // Control Cybern. — 2004. — V. 33, N 1. — P. 127–132.
21. **Minimax and applications** / Eds. Du D.-Z., Pardalos P. M. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995. — 308 p.

Статья поступила
23 октября 2009 г.

Емеличев Владимир Алексеевич,
e-mail: emelichev@bsu.by

Карпук Алексей Васильевич,
e-mail: karalevich@tut.by

Кузьмин Кирилл Геннадьевич,
e-mail: kuzminkg@mail.ru