О ТОПОЛОГИИ ЧАСТИЧНОЙ ВЫПУКЛОСТИ

В. Г. Найденко

Институт математики НАН Беларуси
Минск, Беларусь
E-mail: naidenko@im.bas-net.by

Подтверждена гипотеза Финка – Вуда о том, что если множество направляющих гиперплоскостей частичной выпуклости O' является замыканием некоторого множества O, то множество X является замкнутым направленным полупространством частичной выпуклости с множеством направляющих гиперплоскостей O' тогда и только тогда, когда X – замкнутое направленное полупространство частичной выпуклости с множеством направляющих гиперплоскостей O.

Ключевые слова: топология, частичная выпуклость.

ВВЕДЕНИЕ

Важным аспектом в исследовании частично выпуклых множеств [1] является изучение их топологических свойств. В монографии [2] Е. Финк и Д. Вуд сформулировали следующую гипотезу: если множество направляющих гиперплоскостей частичной выпуклости O' является замыканием некоторого множества O, то множество X является замкнутым направленным полупространством частичной выпуклости с множеством направляющих гиперплоскостей O' тогда и только тогда, когда X – замкнутое направленное полупространство частичной выпуклости с множеством направляющих гиперплоскостей O. Здесь мы приведем положительное решение этой проблемы Финка – Вуда. Дадим необходимые определения [3].

Пусть в n-мерном линейном пространстве R^n задано фиксированное множество единичных векторов (направлений) $O \subseteq S^{n-1}$, где S^{n-1} – единичная сфера. Прямая, параллельная какому-нибудь вектору из O, называется O-прямой. Напомним, что множество $X \subseteq R^n$ называется частично выпуклым (O-выпуклым), если пересечение X с произвольной O-прямой связно или пусто. Кроме того, замкнутое частично выпуклое множество X называется полупространством частичной выпуклости, если пересечение X с произвольной O-прямой оказывается прямой, лучом или пустым множеством. Полупространство X частичной выпуклости называется направленным, если для любых двух параллельных O-прямых l_1 и l_2, пересечения которых с X образуют лучи r_1 и r_2, эти лучи имеют одинаковое направление, т. е. r_1 можно получить из r_2 параллельным переносом, и наоборот.

Ориентацией O_X направленного полупространства X частичной выпуклости назовем множество векторов $O_X \subseteq O$, такое, что вектор e из O принадлежит O_X

тогда и только тогда, когда для любой точки $a \in X$ луч $\{a + \alpha e \mid \alpha \geq 0\}$ целиком содержится в X.

Отметим, что частичная выпуклость является обобщением понятия классической выпуклости, так как все классически выпуклые множества являются O-выпуклыми. Кроме того, если $O = S^{n-1}$, то O-выпуклость совпадает с классической выпуклостью.

В работе [2] предложен другой способ задания системы O-прямых. Пусть в R^n задано фиксированное множество гиперплоскостей O, проходящих через начало координат $\mathbf{0}$ и называемых направляющими гиперплоскостями. Прямая, параллельная или совпадающая с прямой, образованной пересечением каких-нибудь n - 1 направляющих гиперплоскостей, называется O-прямой.

Будем говорить, что множество направлений O соответствует множеству направляющих гиперплоскостей O, если порождаемые ими системы O-прямых совпадают, т. е. они образуют одну и ту же частичную выпуклость.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Заметим, что ориентация O_X тесно связана с рецессивным (характеристическим) конусом полупространства X. Напомним, что рецессивным (характеристическим) конусом множества X называется множество $\mathbf{0}^+ X$, состоящее из таких векторов $h \in R^n$, что $x + \gamma h \in X$ для всех $x \in X$ и всех действительных чисел $\gamma \geq 0$. Через $CH[O_X]$ обозначим выпуклую коническую оболочку множества O_X, т. е. наименьший выпуклый конус, содержащий O_X. Через $\overline{A}$ обозначим замыкание произвольного множества $A \subseteq R^n$. Нетрудно убедиться, что $O_X = O \cap \mathbf{0}^+ X$. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма. Для любой точки a направленного полупространства X частичной выпуклости множество $a + \overline{CH[O_X]}$ целиком содержится в X.

Доказательство. Известно, что рецессивный конус любого замкнутого множества является замкнутым и выпуклым. Тогда справедливо включение $\overline{CH[O_X]} \subseteq \mathbf{0}^+ X$. Отметим, что для любой точки $a \in X$ выполняется утверждение $a + \mathbf{0}^+ X \subseteq X$. Следовательно, $a + \overline{CH[O_X]} \subseteq X$. Лемма доказана.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема. Если множество направляющих гиперплоскостей частичной выпуклости O' является замыканием некоторого множества O, то множество X является замкнутым направленным полупространством частичной выпуклости с множеством направляющих гиперплоскостей O' тогда и только тогда, когда X – замкнутое направленное полупространство частичной выпуклости с множеством направляющих гиперплоскостей O.

Доказательство. Здесь удобно перейти от задания частичной выпуклости с помощью направляющих гиперплоскостей O к соответствующему ему заданию с помощью множества направлений (единичных векторов) O. Тогда нетрудно видеть, что множество направляющих гиперплоскостей O' соответствует множеству направлений O', где O' – замыкание множества O. Из леммы вытекает, что замкнутое множество X будет являться направленным полупространством частичной выпуклостисти с множеством направлений O' тогда и только тогда, когда X – направленное полупространство частичной выпуклости с множеством направлений O. Теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rawlins, G.* Computational Morphology / G. Rawlins, D. Wood., G.T.Toussaint. Amsterdam: North-Holland, 1988. P. 137–152.
2. *Fink, E.* Restricted-Orientation Convexity. Series: Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series / E. Fink, D. Wood. Berlin, New York: Springer-Verlag, 2004. 120 p.
3. *Найденко, В. Г.* Частичная выпуклость / В. Г. Найденко // Математические заметки. 2004. Т. 75. Вып. 2. С. 222–235.