Известия вузов. Математика
2008, № 8, с. 43–57

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Ю.Д. ЧУРБАНОВ

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ КАНОНИЧЕСКИХ АФФИНОРНЫХ СТРУКТУР ОДНОРОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ Φ-ПРОСТРАНСТВ

Аннотация. Рассмотрен вопрос о связи скобки Ли на касательном пространстве однородных периодических Φ-пространств и операторов канонических аффинорных структур этих пространств. Полученные формулы позволили выделить некоторые случаи интегрируемости указанных структур.

Ключевые слова: однородное периодическое Φ-пространство, обобщенное симметрическое пространство, аффинорная структура, интегрируемость аффинорной структуры.

УДК: 514.765

Abstract. We study the connection between the Lie bracket on the tangent space of homogeneous periodic Φ-spaces and operators of canonical affinor structures of these spaces. The obtained relations allow us to indicate several cases of integrability of the mentioned structures.

Keywords: homogeneous periodic Φ-space, generalized symmetric space, affinor structure, integrability of affinor structure.

Введение

Однородные периодические Φ-пространства (Φ-пространства порядка n [1], обобщенные симметрические пространства ([2], с. 23)) являются объектом изучения, начиная с работы [1], где была доказана редуктивность пространств. Затем независимо в [3] и [4] было установлено, что в случае $n = 3$ на таких пространствах существует инвариантная почти комплексная структура, порождаемая автоморфизмом Φ. Среди этих пространств был выделен класс однородных пространств, обладающих инвариантными приближенно келеровыми структурами [5]. В [6] приведен критерий существования инвариантной почти комплексной структуры на однородных регулярных Φ-пространствах, из которого вытекает существование таких структур на произвольном Φ-пространстве нечетного порядка (см. также [2], с. 107), и был предъявлен вид оператора почти комплексной структуры на касательном пространстве однородного Φ-пространства порядка 5. Намного позже в [7], [8] исследовалась эта же почти комплексная структура. После того, как в [9] было открыто существование структуры почти произведения на однородных Φ-пространствах порядка 5, удалось по иному рассмотреть существующие там почти комплексные структуры [10]. В работе [11]

Поступила 26.06.2006

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта БРФФИ (проект № Ф06Р-137), полученного в рамках выполнения совместного проекта БРФФИ–РФФИ.

были рассмотрены однородные Ф-пространства произвольного четного порядка и доказано существование в этом случае инвариантных структур: структуры почти произведения и f-структуры (в смысле К. Яно). Все это подтолкнуло В. В. Балащенко и Н. А. Степанова к открытию алгебры канонических аффинорных структур на регулярных однородных Ф-пространствах [12]. Там же, в частности, приведены формулы операторов инвариантных канонических аффинорных структур классического типа на касательном пространстве в случае периодического Ф-пространства.

С использованием операторов почти комплексной структуры в статье вводятся операторы инвариантных структур почти произведения и f-структур и доказано, что это задание эквивалентно [12]. Это помогло решить вопрос о связи операторов канонических аффинорных структур классического типа однородных периодических Ф-пространств со скобкой Ли на касательном пространстве, что в некоторых случаях позволило установить алгебраические критерии интегрируемости этих структур и решить ряд других вопросов. Этому и посвящена данная работа. Отметим, что некоторые из результатов этой статьи в разное время анонсировались в [13]–[15].

1. Общие сведения

Пусть G — связная группа Ли, Φ — ее аналитический автоморфизм конечного порядка n, т. е. $\Phi^n = \mathrm{id}$. Положим $G^\Phi = \{g \in G \mid \Phi(g) = g\}$ — группа неподвижных точек автоморфизма Φ и G^Φ_o — связная компонента единицы G^Φ. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ алгебры Ли групп Ли G и G^Φ соответственно. Пусть H — такая замкнутая подгруппа в G, что $G^\Phi_o \subset H \subset G^\Phi$.

Определение 1 ([1])**.** Однородное пространство G/H называется однородным Ф-пространством порядка n.

Положим $(d\Phi)_e = \varphi$ — касательное отображение автоморфизма Φ в единице группы G, $A = \varphi - \mathrm{id}$, $\mathfrak{m} = A\mathfrak{g}$. Тогда касательное пространство к G/H в точке $o = H$ можно отождествить с $\mathfrak{m}$ и имеет место каноническое редуктивное разложение [1]

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}. \tag{1}$$

Пусть $\theta = \varphi|_\mathfrak{m}$. Автоморфизм Φ индуцирует диффеоморфизм $D : G/H \to G/H$ по закону $D(xH) = \Phi(x)H$ и при этом [1] $(dD)_o = \theta$. Кроме того, для θ имеет место равенство

$$\theta^{n-1} + \theta^{n-2} + \cdots + \theta + \mathrm{id} = 0, \tag{2}$$

где id — тождественный на $\mathfrak{m}$ оператор. Обозначим $a_s = \cos\frac{2\pi s}{n}$, $b_s = \sin\frac{2\pi s}{n}$, $s = \overline{1, n}$, и введем операторы L_s на $\mathfrak{m}$ по правилу $L_s(X) = \theta^2(X) - 2a_s\theta(X) + X$. Пусть $\mathfrak{m}_s = \operatorname{Ker} L_s$. Тогда ([2], с. 106) $\mathfrak{m}$ можно представить в виде

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_a, \tag{3}$$

где $a = \frac{n-1}{2}$ в случае нечетного n и $a = \frac{n}{2}$ в случае четного. При этом в случае четного n для $a = \frac{n}{2}$ имеем $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_a = \{X \in \mathfrak{m} \mid \theta(X) = -X\}$. Далее ([2], с. 107) на каждом $\mathfrak{m}_s \neq \{0\}$ (кроме $\mathfrak{n}$) существует комплексная структура J_s, задаваемая равенством

$$\theta(X_s) = a_s X_s + b_s J_s(X_s). \tag{4}$$

2. Инвариантные отображения

Пусть $\alpha : \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ — билинейное отображение.

Определение 2. Будем называть α инвариантным, если

$$\alpha(\theta X, \theta Y) = \theta\alpha(X, Y) \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Лемма 1. $\forall X \in \mathfrak{m}_s$ *имеют место равенства*

$$\theta^m X + \theta^{n-m} X = 2a_{ms}X, \quad \theta^m X - \theta^{n-m} X = 2b_{ms}J_sX.$$

Доказательство. Пусть $s = \overline{1,a}$ в случае нечетного n и $s = \overline{1,a-1}$ в случае четного. Легко проверить, что

$$\theta^m(X) = a_{ms}X + b_{ms}J_s(X), \quad \theta^{n-m}(X) = a_{ms}X - b_{ms}J_s(X),$$

откуда получаются требуемые равенства.

В случае же четного n и $s = a$ имеем $a_{ms} = \cos \pi m = (-1)^m$ $b_{ms} = \sin \pi m = 0$. Но тогда $\theta^m X = (-1)^m X = a_{ms}X$ и $\theta^{(n-m)}X = (-1)^{n-m}X = a_{(n-m)s}X = a_{ms}X$. Отсюда следуют доказываемые равенства и в этом случае. $\square$

Пусть $X \in \mathfrak{m}_i$, $Y \in \mathfrak{m}_j$, где $i, j, s = \overline{1,a}$ в случае нечетного n и $i, j, s = \overline{1,a-1}$ в случае четного. Положим

$$F = \alpha(X,Y)_s + \alpha(J_iX, J_jY)_s, \quad L = \alpha(X, J_jY)_s - \alpha(J_iX, Y)_s,$$
$$Z = \alpha(X,Y)_s - \alpha(J_iX, J_jY)_s, \quad T = \alpha(X, J_jY)_s + \alpha(J_iX, Y)_s.$$

Если же n четно, то для $N \in \mathfrak{n}$ положим

$$K = \alpha(X,N)_s - \alpha(J_iX,N)_s, \quad M = \alpha(X,N)_s + \alpha(J_iX,N)_s, \quad \text{где } s = \overline{1,a-1}.$$

Лемма 2. *Имеют место равенства*

$$\theta F = a_{i-j}F + b_{i-j}L, \quad \theta L = a_{i-j}L - b_{i-j}F,$$
$$\theta Z = a_{i+j}Z + b_{i+j}T, \quad \theta T = a_{i+j}T - b_{i+j}Z,$$
$$\theta K = -a_iK - b_iM, \quad \theta M = -a_iM + b_iK.$$

Доказательство. Для доказательства первого равенства получим $\theta F = \alpha(\theta X, \theta Y)_s + \alpha(\theta J_iX, \theta J_jY)_s = \alpha(a_iX + b_iJ_iX, a_jY + b_jJ_jY)_s + \alpha(a_iJ_iX - b_iX, a_jJ_jY - b_jY)_s = (a_ia_j + b_ib_j)\alpha(X,Y)_s + (a_ib_j - a_jb_i)\alpha(X, J_jY)_s + (b_ia_j - a_ib_j)\alpha(J_iX, Y)_s + (b_ib_j + a_ia_j)\alpha(J_iX, J_jY)_s = a_{i-j}F + b_{i-j}L$. Остальные равенства доказываются аналогично. $\square$

Лемма 3. *Пусть F, L, Z, T, K, M те же, что и в лемме 2. Тогда*

$$b_sJ_sF = (a_{i-j} - a_s)F + b_{i-j}L, \quad b_sJ_sL = (a_{i-j} - a_s)L - b_{i-j}F,$$
$$b_sJ_sZ = (a_{i+j} - a_s)Z + b_{i+j}T, \quad b_sJ_sT = (a_{i+j} - a_s)T - b_{i+j}Z,$$
$$b_sJ_sK = (-a_i - a_s)K - b_iM, \quad b_sJ_sM = (-a_i - a_s)M + b_iK.$$

Доказательство. Из (4) имеем $b_sJ_sF = \theta F - a_sF = a_{i-j}F + b_{i-j}L - a_sF = (a_{i-j} - a_s)F + b_{i-j}L$. Аналогично доказываются остальные равенства. $\square$

Лемма 4. *Пусть n четно и $N \in \mathfrak{n}$, $X \in \mathfrak{m}_i$. Если $i + s \neq a$, то $\alpha(X,N)_s = 0$. Если $i + s = a$, то $J_s\alpha(X,N)_s = -\alpha(J_iX,N)_s$. В общем случае $\alpha(X,N) \in \mathfrak{m}_{a-i}$.*

Доказательство. Если $Z = \alpha(X,N)$, то $\theta^2 Z = \alpha(\theta^2 X, N)$, $\theta Z = -\alpha(\theta X, N)$. Отсюда $\theta^2 Z + 2a_i\theta Z + Z = \alpha(\theta^2 X - 2a_i\theta X + X, N) = 0$, ибо $L_i(X) = 0$. Так как $a_i = -a_{a-i}$, то $L_{a-i}Z = 0$, что и показывает $Z \in \mathfrak{m}_{a-i}$. Применим теперь J_s к J_sK из леммы 3. Тогда $(b_i^2 - b_s^2 - (a_i + a_s)^2)K = 2b_i(a_i + a_s)M$. Это равенство приводится к такому $a_{\frac{i+s}{2}}a_{\frac{i-s}{2}}(a_iK + b_iM) = 0$. Но последнее равенство справедливо, если либо $i + s = a$, либо $i = s = a$, либо $a_iK + b_iM = 0$.

В первом случае $a_i = -a_s$, $b_i = b_s$ и из леммы 3 $J_sK = -M$, $J_sM = K$ или

$$J_s\alpha(X,N)_s - J_s\alpha(J_iX,N)_s = -\alpha(X,N)_s - \alpha(J_iX,N)_s,$$
$$J_s\alpha(X,N)_s + J_s\alpha(J_iX,N)_s = \alpha(X,N)_s - \alpha(J_iX,N)_s.$$

Складывая эти равенства, имеем $J_s\alpha(X,N)_s = -\alpha(J_iX,N)_s$.

Во втором случае, когда $i = s = a$, получим $a_i = a_s = -1$, $b_i = b_s = 0$ и $\theta\alpha(X,N)_a = -\alpha(X,N)_a = \alpha(\theta X,\theta N)_a = \alpha(X,N)_a$, откуда $\alpha(X,N)_a = 0$.

В третьем случае из леммы 2 $\theta K = 0$, т. е. $K = 0$, а, значит, $M = 0$. Отсюда

$$\alpha(X,N)_s = 0. \qquad \square$$

Лемма 5. *Если $i+j \neq s$ и $i+j \neq n-s$, то $Z = T = 0$.*

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 4, применим J_s к Z и получим $(b_{i+j}^2 - b_s^2 - (a_{i+j} - a_s)^2)Z = 2b_{i+j}(a_{i+j} - a_s)T$. Отсюда $b_{\frac{i+j+s}{2}} b_{\frac{i+j-s}{2}}(a_{i+j}Z + b_{i+j}T) = 0$. С учетом условий леммы,последнее равенство эквивалентно такому $a_{i+j}Z + b_{i+j}T = 0$. Но тогда из леммы 2 $\theta Z = 0$, т. е. $Z = 0$, а значит, $T = 0$. $\square$

Аналогично доказывается

Лемма 6. *Если $i - j \neq \pm s$, то $F = L = 0$.*

Следствие. Если $i - j \neq \pm s$, $i+j \neq s$, $i+j+s \neq n$, то $\alpha(X,Y)_s = 0$.

Доказательство. В этом случае из лемм 5 и 6 $F = Z = 0$, а тогда $\alpha(X,Y)_s = F + Z = 0$. $\square$

Лемма 7. *Если $i - j = s$, то $J_s\alpha(X,Y)_s = \alpha(J_iX,Y)_s = -\alpha(X,J_jY)_s$;*
если $i - j = -s$, то $J_s\alpha(X,Y)_s = -\alpha(J_iX,Y)_s = \alpha(X,J_jY)_s$;
если $i + j = s$, то $J_s\alpha(X,Y)_s = \alpha(J_iX,Y)_s = \alpha(X,J_jY)_s$;
если $i + j + s = n$, то $J_s\alpha(X,Y)_s = -\alpha(J_iX,Y)_s = -\alpha(X,J_jY)_s$.

Доказательство. Пусть $i - j = s$. Тогда, очевидно, $i - j \neq -s$, $i + j \neq s$, $i + j + s \neq n$. Значит из леммы 5 $Z = T = 0$, а из леммы 3 $J_sF = L$, $J_sL = -F$ или $\alpha(J_iX,J_jY)_s = \alpha(X,Y)_s$, $\alpha(J_iX,Y)_s = -\alpha(X,J_jY)_s$, $J_s\alpha(X,Y)_s + J_s\alpha(J_iX,J_jY)_s = \alpha(J_iX,Y)_s - \alpha(X,J_jY)_s$. Отсюда $J_s\alpha(X,Y)_s = \alpha(J_iX,Y)_s = -\alpha(X,J_jY)_s$. Остальные равенства доказываются аналогично. $\square$

Теперь положим $\alpha(X,Y)_s = [X,Y]_s$. Следствием лемм 4–7 является

Теорема 1. *Пусть $i,j,s = \overline{1,a}$ в случае нечетного n и $i,j,s = \overline{1,a-1}$ в случае четного, $X \in \mathfrak{m}_i$, $Y \in \mathfrak{m}_j$. Тогда*
1) *если $i - j = s$, то $J_s[X,Y]_s = [J_iX,Y]_s = -[X,J_jY]_s$;*
2) *если $i - j = -s$, то $J_s[X,Y]_s = -[J_iX,Y]_s = [X,J_jY]_s$;*
3) *если $i + j = s$, то $J_s[X,Y]_s = [J_iX,Y]_s = [X,J_jY]_s$;*
4) *если $i + j + s = n$, то $J_s[X,Y]_s = -[J_iX,Y]_s = -[X,J_jY]_s$.*

Если n четно и $X \in \mathfrak{m}_i$, $Y \in \mathfrak{n}$, $i + s = a$, то

$$J_s[X,Y]_s = -[J_iX,Y]_s.$$

Во всех остальных случаях $[X,Y]_s = 0$.

3. Почти комплексные структуры

Пусть G/H — однородное Ф-пространство нечетного порядка $n = 2a+1$. Тогда ([2], с. 107) на G/H можно определить 2^a инвариантных почти комплексных структур, операторы которых на $\mathfrak{m}$ имеют вид

$$J_o(X) = \sum_{i=1}^{a} \varepsilon_i J_i(X_i), \tag{5}$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $X \in \mathfrak{m}$, $X = \sum\limits_{s=1}^{a} X_i$, $X_i \in \mathfrak{m}_i$.

Лемма 8. *Для любых* $X, Y \in \mathfrak{m}$ *имеет место равенство*

$$[J_o X, J_o Y]_{\mathfrak{h}} = [X, Y]_{\mathfrak{h}}.$$

Доказательство. Покажем вначале, что $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j]_{\mathfrak{h}} = 0$, если $i \neq j$, $i, j = \overline{1, a}$. Используя второе равенство леммы 1, а затем первое, имеем

$$\begin{aligned}[J_i X_i, J_j Y_j]_{\mathfrak{h}} &= \left[\frac{1}{2b_i}(\theta X_i - \theta^{n-1} X_i), \frac{1}{2b_j}(\theta Y_j - \theta^{n-1} Y_j)\right]_{\mathfrak{h}} = \\ &= \frac{1}{4b_i b_j}([\theta X_i, \theta Y_j]_{\mathfrak{h}} - [\theta X_i, \theta^{n-1} Y_j]_{\mathfrak{h}} - [\theta^{n-1} X_i, \theta Y_j]_{\mathfrak{h}} + [\theta^{n-1} X_i, \theta^{n-1} Y_j]_{\mathfrak{h}}) = \\ &= \frac{1}{4b_i b_j}(2[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} - [X_i, \theta^{n-2} Y_j]_{\mathfrak{h}} - [\theta^{n-2} X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}}) = \\ &= \frac{1}{4b_i b_j}(2[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} - [\theta^2 X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} - [\theta^{n-2} X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}}) = \\ &= \frac{1}{4b_i b_j}(2[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} - [\theta^2 X_i + \theta^{n-2} X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}}) = \\ &= \frac{1}{4b_i b_j}(2[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} - 2a_{2i}[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}}) = \frac{1}{2b_i b_j}(1 - a_{2i})[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} = \frac{b_i}{b_j}[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}}.\end{aligned}$$

Аналогично можно получить $[J_i X_i, J_j Y_j]_{\mathfrak{h}} = \frac{b_j}{b_i}[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}}$. Так как $b_i^2 \neq b_j^2$, то $[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} = 0$. В силу произвольности X_i, Y_j получаем требуемое.

Далее, опять применяя (4) и лемму 1, имеем

$$\begin{aligned}[J_i X_i, J_i Y_i]_{\mathfrak{h}} &= \frac{1}{b_i^2}[\theta X_i - a_i X_i, \theta Y_i - a_i Y_i]_{\mathfrak{h}} = \\ &= \frac{1}{b_i^2}([X_i, Y_i]_{\mathfrak{h}} - a_i[\theta X_i, Y_i]_{\mathfrak{h}} - a_i[X_i, \theta Y_i]_{\mathfrak{h}} + a_i^2[X_i, Y_i]_{\mathfrak{h}}) = \\ &= \frac{1}{b_i^2}((1 + a_i^2)[X_i, Y_i]_{\mathfrak{h}} - a_i[\theta X_i, Y_i]_{\mathfrak{h}} + [\theta^{n-1} X_i, Y_i]_{\mathfrak{h}}) = \\ &= \frac{1}{b_i^2}((1 + a_i^2)[X_i, Y_i]_{\mathfrak{h}} - 2a_i^2[X_i, Y_i]_{\mathfrak{h}}) = \frac{1 - a_i^2}{b_i^2}[X_i, Y_i]_{\mathfrak{h}} = [X_i, Y_i]_{\mathfrak{h}}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$[J_o X, J_o Y]_{\mathfrak{h}} = \left[\sum_{i=1}^{a} \varepsilon_i J_i(X_i), \sum_{i=1}^{a} \varepsilon_j J_j(X_j)\right]_{\mathfrak{h}} = \sum_{i=1}^{a} [J_i X_i, J_i Y_i]_{\mathfrak{h}} = [X, Y]_{\mathfrak{h}}. \qquad \square$$

Рассмотрим теперь интегрируемость почти комплексной структуры однородного Φ-пространства нечетного порядка, оператор которой на $\mathfrak{m}$ задается равенством (5). Так как почти комплексная структура инвариантна относительно G, то и ее тензор кручения N будет инвариантным, а потому будет полностью определяться своим значением N_o в точке $o = H$. При этом [3]

$$N_o(X, Y) = [X, Y]_{\mathfrak{m}} + J_o[X, J_o Y]_{\mathfrak{m}} + J_o[J_o X, Y]_{\mathfrak{m}} - [J_o X, J_o Y]_{\mathfrak{m}},$$

где $X, Y \in \mathfrak{m}$.

Теорема 2. *Тензор кручения инвариантной почти комплексной структуры* J *однородного* Φ-*пространства нечетного порядка, оператор которой на* $\mathfrak{m}$ *задается равенством* (5), *вычисляется в точке $o = H$ по формуле*

$$N_o(X,Y) = \sum_{s=1}^{a}\Bigg(\sum_{i+j=s}[X_i,Y_j]_s(1+\varepsilon_i\varepsilon_j-\varepsilon_i\varepsilon_s-\varepsilon_s\varepsilon_j)+$$
$$+\sum_{i-j=-s}[X_i,Y_j]_s(1-\varepsilon_i\varepsilon_j+\varepsilon_i\varepsilon_s-\varepsilon_s\varepsilon_j)+\sum_{i+j+s=n}[X_i,Y_j]_s(1+\varepsilon_i\varepsilon_j+\varepsilon_i\varepsilon_s+\varepsilon_s\varepsilon_j)+$$
$$+\sum_{i-j=s}[X_i,Y_j]_s(1-\varepsilon_i\varepsilon_j-\varepsilon_i\varepsilon_s+\varepsilon_s\varepsilon_j)\Bigg),$$

где X_i — проекция элемента $X \in \mathfrak{m}$ на $\mathfrak{m}_i$ разложения (3).

Доказательство. Так как $N_o(X,Y)$ билинейно, то $N_o(X,Y) = \sum\limits_{i,j,s=1}^{a}(N_o(X_i,Y_j))_s$. Но если $i+j \neq s$, $i+j+s \neq n$, $i-j \neq \pm s$, то $(N_o(X_i,Y_j))_s = 0$. Значит,

$$N_o(X,Y) = \sum_{s=1}^{a}\Bigg(\sum_{i+j=s}(N_o(X_i,Y_j))_s+\sum_{i+j+s=n}(N_o(X_i,Y_j))_s+$$
$$+\sum_{i-j=s}(N_o(X_i,Y_j))_s+\sum_{i-j=-s}(N_o(X_i,Y_j))_s\Bigg).$$

Вычислим каждое слагаемое последнего равенства с помощью равенств теоремы 1. Если $i+j=s$, то $N_o(X_i,Y_j)_s = [X_i,Y_j]_s+\varepsilon_s\varepsilon_j J_s[X_i,J_jY_j]_s+\varepsilon_s\varepsilon_i J_s[J_iX_i,Y_j]_s-\varepsilon_i\varepsilon_j[J_iX_i,J_jY_j]_s = [X_i,Y_j]_s(1-\varepsilon_s\varepsilon_j-\varepsilon_s\varepsilon_i+\varepsilon_i\varepsilon_j)$. Аналогично вычисляются остальные слагаемые, что приводит к доказательству теоремы. □

Следствие. Пусть оператор J_o на $\mathfrak{m}$ инвариантной почти комплексной структуры J имеет вид $J_o(X) = \sum\limits_{i=1}^{a} J_i(X_i)$. В этом случае J интегрируема тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{m}_i,\mathfrak{m}_j]_s = 0$, где $i+j+s=n$.

Доказательство. В этом случае все $\varepsilon_i = 1$. Поэтому если $i+j=s$ или $i-j=\pm s$, то $N_o(X_i,Y_j)_s = 0$. Если же $i+j+s=n$, то $N_o(X_i,Y_j)_s = 4[X_i,Y_j]_s$. Отсюда $N_o(X,Y) = 4\sum\limits_{s=1}^{a}\sum\limits_{i+j+s=n}[X_i,Y_j]_s$. Теперь в силу произвольности X, Y получаем доказательство следствия. □

Определение 3. Назовем инвариантную почти комплексную структуру, о которой идет речь в следствии теоремы 2, специальной почти комплексной структурой.

Теорема 3. *Любая каноническая почти комплексная структура однородного Φ-пространства нечетного порядка имеет оператор J_o на $\mathfrak{m}$ вида* (5) *и наоборот, любая инвариантная почти комплексная структура однородного Φ-пространства нечетного порядка, порожденная оператором J_o на $\mathfrak{m}$ вида* (5)*, является канонической* [12]*, т. е. представима в виде полинома от θ.*

Доказательство. Согласно теореме 5 работы [12] любая каноническая инвариантная почти комплексная структура J определяется оператором комплексной структуры J_o на $\mathfrak{m}$ вида

$J_o = \frac{2}{n}\sum\limits_{m=1}^{a}\Big(\sum\limits_{j=1}^{a}\varepsilon_j b_{mj}\Big)(\theta^m - \theta^{n-m})$. Так как $\theta^m - \theta^{n-m} = 2\sum\limits_{s=1}^{a} b_{sm}J_s$ из леммы 1, то выражение для J_o можно представить в равносильном виде $J_o = \frac{4}{n}\sum\limits_{s=1}^{a}\Big(\sum\limits_{j,m=1}^{a}\varepsilon_j b_{mj}b_{ms}\Big)J_s$. В силу $\sum\limits_{m=1}^{a} b_{ms}^2 = \frac{n}{4}$ и $\sum\limits_{m=1}^{a} b_{mj}b_{ms} = 0$ при $j \neq s$, $j, s = \overline{1,a}$, отсюда получаем, что последнее представление для J_o равносильно (5). □

Замечание 1. Полученные здесь результаты для Ф-пространств нечетного порядка остаются в силе и для Ф-пространств четного порядка при условии, что $-1 \notin \operatorname{spec}\theta$, т.е. $\mathfrak{n} = 0$. Всюду индексы изменяются от 1 до $a-1$.

4. f-структуры

В силу того, что касательное пространство $\mathfrak{m}$ можно представить в виде (3) и на каждом $\mathfrak{m}_i \neq 0$ ($i \neq a$ в случае четного n) есть комплексная структура J_i, то на $\mathfrak{m}$ можно определить оператор $(f_{(i_1,i_2,\dots,i_s)})_o$ по правилу

$$(f_{(i_1,i_2,\dots,i_s)})_o(X) = \sum_{r=1}^{s}\varepsilon_{i_r}J_{i_r}(X_{i_r}). \tag{6}$$

При этом, если n четно, то ни один из индексов i_r не равен a.

Определение 4. Пусть G/H является Ф-пространством четного порядка. Положим $f_o(X) = \sum\limits_{i=1}^{a-1} J_i(X_i)$, $X \in \mathfrak{m}$, $X = \sum\limits_{i=1}^{a} X_i$, $X_i \in \mathfrak{m}_i$. f-структуру, порожденную таким оператором, назовем специальной f-структурой пространства G/H.

Лемма 9. *Имеют место равенства*

$$[f_o(X), f_o(Y)]_{\mathfrak{h}} = [\overline{X}, \overline{Y}]_{\mathfrak{h}}, \qquad [f_o(X), f_o(Y)]_{\mathfrak{n}} = -[X, Y]_{\mathfrak{n}},$$
$$[f_o(X), Y]_{\mathfrak{n}} = [X, f_o(Y)]_{\mathfrak{n}}, \qquad f_o[N, X]_{\mathfrak{m}} = -[N, f_o(X)]_{\mathfrak{m}}$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$, $N \in \mathfrak{n}$, *где* $\overline{X} = \sum\limits_{i=1}^{a-1} X_i$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 8, имеем, что если $i \neq j$ и $i + j \neq a$, то $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j]_{\mathfrak{h}} = 0$. Если же $i = j$ или $i + j = a$, то так как $b_i = b_j$, то $[J_iX_i, J_jY_j]_{\mathfrak{h}} = [X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}}$. Покажем теперь, что если $i \neq j$ и $i + j = a$, то $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j]_{\mathfrak{h}} = 0$. Имеем $[\theta X_i, \theta Y_j]_{\mathfrak{h}} = [X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}}$. Но $[\theta X_i, \theta Y_j]_{\mathfrak{h}} = [a_iX_i + b_iJ_iX_i, a_jY_j + b_jJ_jY_j]_{\mathfrak{h}} = a_{i-j}[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} - b_{i-j}[X_i, J_jY_j]_{\mathfrak{h}}$. Однако $a_{i-j} = -a_{2j}$, $b_{i-j} = b_{2j}$. Отсюда $[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} = -a_{2j}[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} - b_{2j}[X_i, J_jY_j]_{\mathfrak{h}}$ или $a_j[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} = -b_j[X_i, J_jY_j]_{\mathfrak{h}}$. Тогда $[X_i, J_jY_j]_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{b_j}[X_i, \theta Y_j - a_jY_j]_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{b_j}[X_i, \theta Y_j]_{\mathfrak{h}} - \frac{a_j}{b_j}[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} = -\frac{a_j}{b_j}[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}}$. Значит, $[X_i, \theta Y_j]_{\mathfrak{h}} = 0$. Аналогично получаем $[\theta X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} = 0$. Складывая последние два равенства, имеем $[X_i, \theta Y_j + \theta^{n-1}Y_j]_{\mathfrak{h}} = 0$, т.е. $2a_j[X_i, Y_j]_{\mathfrak{h}} = 0$, $a_j \neq 0$ и $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j]_{\mathfrak{h}} = 0$. Наконец, имеем

$$[f_o(X), f_o(Y)]_{\mathfrak{h}} = \sum_{i,j=1}^{a-1}[J_iX_i, J_jY_j]_{\mathfrak{h}} = \sum_{i=1}^{a-1}[J_iX_i, J_iY_i]_{\mathfrak{h}} = [\overline{X}, \overline{Y}]_{\mathfrak{h}}.$$

Покажем теперь, что если $i \neq j$ и $i+j \neq a$, то $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j]_\mathfrak{n} = 0$. Как при доказательстве леммы 8,

$$[J_iX_i, J_jY_j]_\mathfrak{n} = \left[\frac{1}{2b_i}(\theta X_i - \theta^{n-1}X_i), \frac{1}{2b_j}(\theta Y_j - \theta^{n-1}Y_j)\right]_\mathfrak{n} = \frac{1}{4b_ib_j}([\theta X_i, \theta Y_j]_\mathfrak{n} -$$

$$- [\theta X_i, \theta^{n-1}Y_j]_\mathfrak{n} - [\theta^{n-1}X_i, \theta Y_j]_\mathfrak{n} + [\theta^{n-1}X_i, \theta^{n-1}Y_j]_\mathfrak{n}) =$$

$$= \frac{1}{4b_ib_j}(-2[X_i, Y_j]_\mathfrak{n} + [X_i, \theta^{n-2}Y_j]_\mathfrak{n} + [\theta^{n-2}X_i, Y_j]_\mathfrak{n}) = \frac{1}{4b_ib_j}(-2[X_i, Y_j]_\mathfrak{n} +$$

$$+ [\theta^2 X_i, Y_j]_\mathfrak{n} + [\theta^{n-2}X_i, Y_j]_\mathfrak{n}) = \frac{1}{4b_ib_j}(-2[X_i, Y_j]_\mathfrak{n} + [\theta^2 X_i + \theta^{n-2}X_i, Y_j]_\mathfrak{n}) =$$

$$= \frac{1}{4b_ib_j}(-2[X_i, Y_j]_\mathfrak{n} + 2a_{2i}[X_i, Y_j]_\mathfrak{n}) = \frac{1}{2b_ib_j}(a_{2i} - 1)[X_i, Y_j]_\mathfrak{n} = -\frac{b_i}{b_j}[X_i, Y_j]_\mathfrak{n}.$$

Аналогично можно получить $[J_iX_i, J_jY_j]_\mathfrak{n} = -\frac{b_j}{b_i}[X_i, Y_j]_\mathfrak{n}$. И поскольку $i \neq j$ или $i+j \neq a$, то $[X_i, Y_j]_\mathfrak{n} = 0$, что в силу произвольности влечет $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j]_\mathfrak{n} = 0$. Если же $i = j$ или $i+j = a$, то легко получаем $[J_iX_i, J_jY_j]_\mathfrak{n} = -[X_i, Y_j]_\mathfrak{n}$. Отсюда

$$[f_o(X), f_o(Y)]_\mathfrak{n} = \sum_{i,j=1}^{a-1}[J_iX_i, J_jY_j]_\mathfrak{n} = \sum_{i=1}^{a-1}[J_iX_i, J_iY_i]_\mathfrak{n} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{a-1}[J_iX_i, J_{a-i}Y_{a-i}]_\mathfrak{n} = -\sum_{i=1}^{a-1}[X_i, Y_i]_\mathfrak{n} - \sum_{i=1}^{a-1}[X_i, Y_{a-i}]_\mathfrak{n} = -[X, Y]_\mathfrak{n},$$

так как $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]_\mathfrak{n} = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}]_\mathfrak{n} = 0$.

Так же доказывается третье равенство леммы.

Наконец, на основании последнего равенства теоремы 1

$$f_o[N, X]_\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^{a-1} J_{a-i}[N, X_i]_{a-i} = -\sum_{i=1}^{a-1}[N, J_iX_i]_{a-i} = -[N, f_o(X)]_\mathfrak{m}. \qquad \square$$

Замечание 2. Первое равенство леммы 9 можно доказать и в более общей ситуации, когда

$$f_o(X) = \sum_{i=1}^{a-1} \varepsilon_i J_i(X_i).$$

Рассмотрим теперь вопрос об интегрируемости f-структур. По соображениям, аналогичным соображениям раздела 3, получаем, что тензор кручения $\widetilde{N}$ инвариантной f-структуры является инвариантным относительно G, а потому полностью определяется своим значением $\widetilde{N_o}$ в точке $o = H$ и ([16], с. 44)

$$\widetilde{N_o}(X, Y) = [f_o(X), f_o(Y)]_\mathfrak{m} - f_o[f_o(X), Y]_\mathfrak{m} - f_o[X, f_o(Y)]_\mathfrak{m} + f_o^2[X, Y]_\mathfrak{m},$$

где $X, Y \in \mathfrak{m}$, f_o — оператор инвариантной f–структуры.

Лемма 10. *Пусть оператор инвариантной f-структуры $(f_i)_o$ определяется на $\mathfrak{m}$ условиями $(f_i)_o(X_i) = \varepsilon_i J_i X_i$ и $(f_i)_o(X_j) = 0$ при $i \neq j$, где $\varepsilon_i = \pm 1$ и $i \neq a$ в случае четного n. Указанная f-структура интегрируема тогда и только тогда, когда*

1) $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_i = 0$, *если* $n = 3i$;

2) $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_i = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{2i} = 0$, *если* $n \neq 3i$ *и* $2i < a$;

3) $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_i = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{n-2i} = 0$, *если* $n \neq 3i$ *и* $2i > a$.

Доказательство. Очевидным образом имеем

$$\widetilde{N_o}(X,Y) = \widetilde{N_o}(X,Y)_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{a} \widetilde{N_o}(X,Y)_j = [(f_i)_o X, (f_i)_o Y]_i -$$

$$- (f_i)_o [X, (f_i)_o Y]_i - (f_i)_o [(f_i)_o X, Y]_i + (f_i)_o^2 [X,Y]_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{a} [(f_i)_o X, (f_i)_o Y]_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{a} [J_i X_i, J_i Y_i]_j - J_i [J_i X_i, Y]_i - J_i [X, J_i Y_i]_i - [X,Y]_i.$$

Если $n = 3i$, то возможен только один вариант $i+i = n-i$ из четырех, а тогда $\widetilde{N_o}(X,Y) = -3[X_i, Y_i]_i - [X,Y]_i$. Отсюда следует случай 1).

Если $n \neq 3i$, $2i < a$, то возможен только вариант $i+i = 2i$ из четырех, а тогда $\widetilde{N_o}(X,Y) = -[X_i, Y_{2i}]_i - [X_{2i}, Y_i]_i - [X,Y]_i - [X_i, Y_i]_{2i}$. Отсюда следует случай 2).

Если $n \neq 3i$, $2i > a$, то опять возможен только вариант $i+j = n-i$ из четырех, а тогда $\widetilde{N_o}(X,Y) = -[X_i, Y_{n-2i}]_i - [X_{n-2i}, Y_i]_i - [X,Y]_i - [X_i, Y_i]_{n-2i}$. Отсюда следует случай 3), что и завершает доказательство леммы. □

Пример 1. На однородном Φ-пространстве порядка 5 [10] существуют две канонические f-структуры, операторы которых на $\mathfrak{m}$ задаются равенствами $f_1(X) = J_1(X_1)$ и $f_2(X) = J_2(X_2)$. Выводы теоремы 7 работы [10] полностью согласуются с выводами леммы 10.

Пример 2. Рассмотрим однородное Φ-пространство G/H порядка 6. Касательное пространство к G/H согласно (3) представимо в виде $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{n}$, причем $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_2$, $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{n}$, $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_2$, $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_2]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_2$, $[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_1$, $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{h}$. Операторы двух из существующих там четырех канонических f-структур имеют вид $f_1(X) = J_1(X_1)$ и $f_2(X) = J_2(X_2)$. Вычислим с помощью теоремы 1 их тензоры кручения. В первом случае получаем

$$\widetilde{N_o^1}(X,Y) = [J_1(X), J_1(Y)]_{\mathfrak{m}} - J_1[J_1(X), Y]_{\mathfrak{m}} - J_1[X, J_1(Y)]_{\mathfrak{m}} - [X,Y]_{\mathfrak{m}} =$$
$$= [X_1, Y_1]_2 - [X_1, Y_2]_1 - [X_2, Y_1]_1 - [X,Y]_1.$$

Отсюда следует, что эта f-структура интегрируема тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_1 = [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1]_2 = 0$.

Во втором случае аналогичные вычисления дают $\widetilde{N_o^2}(X,Y) = -3[X_2, Y_2]_2 - [X,Y]_2$. С учетом включений выше, отсюда следует, что эта f-структура интегрируема тогда и только тогда, когда $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]_2 = 0$.

Лемма 11. *Пусть f_o — специальная f-структура однородного Φ-пространства G/H четного порядка. Она интегрируема тогда и только тогда, когда*

$$[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j]_t = [\overline{\mathfrak{m}}, \overline{\mathfrak{m}}]_{\mathfrak{n}} = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{n}]_{a-i} = 0,$$

где $i+j = n-t$, $i,j,t = \overline{1, a-1}$, $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_{a-1}$.

Доказательство. В этой ситуации $\widetilde{N}_o(X,Y)=\sum\limits_{t=1}^{a-1}\widetilde{N}_o(X,Y)_t+\widetilde{N}_o(X,Y)_{\mathfrak{n}}$. Но при $i,j\neq a$

$$\widetilde{N}_o(X,Y)_t=\sum_{i+j=t}\widetilde{N}_o(X_i,Y_j)_t+\sum_{i-j=t}\widetilde{N}_o(X_i,Y_j)_t+\sum_{i-j=-t}\widetilde{N}_o(X_i,Y_j)_t+ \\ +\sum_{i+j=n-t}\widetilde{N}_o(X_i,Y_j)_t+\sum_{i=1}^{a-1}\widetilde{N}_o(X_i,Y_a)_t+\sum_{i=1}^{a-1}\widetilde{N}_o(X_a,Y_i)_t.$$

Применяя теорему 1, видим, что первые три слагаемых равны нулю, четвертое вычисляется так: $\widetilde{N}_o(X_i,Y_j)_t=-4[X_i,Y_j]_t$. В пятом и шестом слагаемых $t+i=a$, причем $\widetilde{N}_o(X_i,Y_a)_t=-2[X_i,Y_a]_t$, $\widetilde{N}_o(X_a,Y_i)_t=-2[X_a,Y_i]_t$. Отсюда

$$\widetilde{N}_o(X,Y)=-4\sum_{i,j,t=1}^{a-1}\sum_{i+j+t=n}[X_i,Y_j]_t-2\sum_{i=1}^{a-1}([X_i,Y_a]_{a-i}+[X_a,Y_i]_{a-i})-[\overline{X},\overline{Y}]_{\mathfrak{n}}.$$

В силу произвольности X, Y доказательство леммы завершено. □

Покажем, что получаемые таким образом f-структуры на однородном Ф-пространстве являются каноническими [12], т. е. представимы в виде полинома от θ.

Теорема 4. *Любая каноническая f-структура однородного* Ф*-пространства имеет оператор на* $\mathfrak{m}$ *вида* (6) *и, наоборот, любая инвариантная f-структура однородного* Ф*-пространства, порождаемая оператором вида* (6)*, является канонической.*

Доказательство. Согласно теореме 6 работы [12] любая каноническая f-структура однородного Ф-пространства имеет на $\mathfrak{m}$ оператор

$$f_o=\frac{2}{n}\sum_{m=1}^{a}\left(\sum_{j=1}^{a}\xi_i b_{mj}\right)(\theta^m-\theta^{n-m}),$$

где ξ_j принимают значения ±1 или 0. Применяя второе равенство леммы 1, получаем, что f_o можно эквивалентным образом представить в виде

$$f_o=\frac{4}{n}\sum_{j=1}^{a}\left(\sum_{s=1}^{a}\left(\sum_{m=1}^{a}b_{mj}b_{ms}\right)J_s\right)\xi_j.$$

Положим в последнем равенстве $\xi_j=\varepsilon_{i_l}$, если $j=i_l$ для некоторого l, и $\xi_j=0$ в противном случае. Тогда

$$f_o=\frac{4}{n}\sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{s=1}^{a}\left(\sum_{m=1}^{a}b_{mi_l}b_{ms}\right)J_s\right)\varepsilon_{i_l}= \\ =\frac{4}{n}\sum_{l=1}^{s}\left(\left(\sum_{m=1}^{a}b_{mi_l}^2\right)J_{i_l}\right)\varepsilon_{i_l}=\sum_{l=1}^{s}\varepsilon_{i_l}J_{i_l}=(f_{(i_1,i_2,\dots,i_s)})_o,$$

так как $\sum\limits_{m=1}^{a}b_{mt}^2=\frac{n}{4}$, $\sum\limits_{m=1}^{a}b_{mt}b_{ml}=0$ при $t\neq l$ и $t,l=\overline{1,a}$. □

5. Структуры почти произведения

Определим на $\mathfrak{m}$ оператор структуры почти произведения, положив $\forall X \in \mathfrak{m}$

$$(P_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)})_o(X) = -X + 2\sum_{k=1}^{s} X_{i_k}. \tag{7}$$

Очевидна

Лемма 12. *Оператор* (7) *можно представить в виде*

$$(P_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)})_o(X) = -X - 2J_o(f_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)})_o(X), \tag{8}$$

где J_o *— оператор специальной почти комплексной структуры и все* $\varepsilon_{i_k} = 1$ *при* $1 \le k \le s$.

Теорема 5. *Любая инвариантная структура почти произведения, оператор которой на* $\mathfrak{m}$ *имеет вид* (7)*, является канонической и, обратно, любая каноническая структура почти произведения однородного периодического* Φ*-пространства имеет на* $\mathfrak{m}$ *оператор вида* (7).

Доказательство. Так как оператор (7) на $\mathfrak{m}$ можно записать как (8), а J_o, $(f_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)})_o$ и id представимы в виде полинома от θ, то тем самым первая часть теоремы доказана.

Обратно, согласно теореме 4 работы [12], любая каноническая структура почти произведения однородного Φ-пространства нечетного порядка $n = 2a+1$ имеет на $\mathfrak{m}$ оператор вида

$$P_o = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m \theta^m,$$

где $\alpha_m = \alpha_{n-m} = \frac{2}{n}\sum\limits_{j=1}^{a} \xi_j a_{mj}$. Учитывая лемму 1, имеем $\theta^m + \theta^{n-m} = 2\sum\limits_{s=1}^{a} a_{ms}\,\mathrm{id}_s$, $\alpha_0 = \frac{2}{n}\sum_{j,m=1}^{a} \xi_j \,\mathrm{id}\,|_{\mathfrak{m}}$. Тогда

$$\begin{aligned}
P_o = \frac{2}{n}\Bigg(\sum_{j,m=1}^{a} \xi_j \,\mathrm{id}_{\mathfrak{m}} + \sum_{j,m}^{a} \xi_j a_{mj}(\theta^m + \theta^{n-m})\Bigg) = \\
= \frac{2}{n}\Bigg(\sum_{s=1}^{a}\Bigg(\sum_{j=1}^{a} \xi_j \Bigg(1 + 2\sum_{m=1}^{a} a_{mj}a_{ms}\Bigg)\Bigg)\mathrm{id}_s\Bigg) = \\
= \frac{2}{n}\Bigg(\sum_{j=i}^{a} \xi_j \Bigg(1 + 2\sum_{m=1}^{a} a_{mj}^2\Bigg)\mathrm{id}_j + \sum_{s=1}^{a}\Bigg(\sum_{j=1}^{a} \xi_j \Bigg(1 + 2\sum_{m=1, m\ne s}^{a} a_{mj}a_{ms}\Bigg)\Bigg)\mathrm{id}_s\Bigg).
\end{aligned}$$

Но $\sum\limits_{m=1}^{a} a_{mj}^2 = \frac{2a-1}{4}$, $\sum\limits_{m=1,m\ne s}^{a} a_{mj}a_{ms} = -\frac{1}{2}$. Тогда $P_o = \sum\limits_{j=1}^{a} \xi_j \,\mathrm{id}_j$, что дает (7).

Пусть теперь G/H — однородное Φ-пространство четного порядка $n = 2a$. Тогда согласно той же теореме работы [12] имеем $P_o = \sum\limits_{m=0}^{a-1} \alpha_m \theta^m$, где $\alpha_m = \alpha_{n-m} = \frac{1}{n}\Big(2\sum\limits_{j=1}^{a-1} \xi_j a_{mj} + (-1)^m \xi_a\Big)$. Значит, $\alpha_0 = \frac{1}{n}\Big(2\sum\limits_{j=1}^{a-1} \xi_j + \xi_a\Big)$, $\alpha_a = \frac{1}{n}\Big(2\sum\limits_{j=1}^{a-1} (-1)^j \xi_j + (-1)^a \xi_a\Big)$. С учетом этого и первого равенства леммы 1 имеем

$$P_o = \sum_{s=1}^{a} \alpha_0 \,\mathrm{id}_s + \sum_{s=1}^{a} \alpha_a (-1)^s \,\mathrm{id}_s + \sum_{m=1}^{a-1} \alpha_m (\theta^m + \theta^{n-m}) =$$

$$= \sum_{s=1}^{a} \left(\frac{1}{n}\left(2\sum_{j=1}^{a-1} \xi_j + \xi_a\right) \mathrm{id}_s \right) + \sum_{s=1}^{a} \left(\frac{1}{n}\left(2\sum_{j=1}^{a-1}(-1)^j \xi_j + (-1)^a \xi_a\right)(-1)^s \,\mathrm{id}_s \right) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{a} \left(\frac{1}{n}\left(2\sum_{j=1}^{a-1} \xi_j a_{mj} + (-1)^m \xi_a\right) 2a_{ms} \,\mathrm{id}_s \right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{s=1}^{a} \left(2\sum_{j=1}^{a-1}(1+(-1)^{j+s})\xi_j + (1+(-1)^{a+s})\right)\xi_a + \right.$$

$$\left. + 4\sum_{j,m=1}^{a-1} \xi_j a_{mj} a_{ms} + 2\sum_{m=1}^{a-1}(-1)^m a_{ms}\xi_a \right) \mathrm{id}_s = \sum_{s=1}^{a} t_s \,\mathrm{id}_s\,.$$

Подсчитаем коэффициенты t_s. При $s = a$ имеем

$$t_a = \frac{1}{n}\left(2\sum_{j=1}^{a-1}(1+(-1)^{j+a})\xi_j + 2\xi_a + 4\sum_{j,m=1}^{a-1} \xi_j (-1)^m a_{mj} + 2\sum_{m=1}^{a-1}(-1)^m a_{ma}\xi_a\right).$$

Но $\sum\limits_{m=1}^{a-1}(-1)^m a_{mj} = -\frac{1}{2}(1+(-1)^{j+a})$ и $a_{ma} = (-1)^m$. Поэтому

$$t_a = \frac{1}{n}\left(2\sum_{j=1}^{a-1}(1+(-1)^{j+a})\xi_j + 2\xi_a - 2\sum_{j=1}^{a-1}(1+(-1)^{j+a})\xi_j + 2\sum_{m=1}^{a-1}\xi_a\right) =$$

$$= \frac{1}{n}(2\xi_a + 2(a-1)\xi_a) = \xi_a.$$

Пусть теперь $s \neq a$. Тогда

$$t_s = \frac{1}{n}\left(2\sum_{j=1}^{a-1}(1+(-1)^{j+a})\xi_j + (1+(-1)^{a+s})\xi_a + \right.$$

$$\left. + 4\sum_{j,m=1, j\neq s}^{a-1} \xi_j a_{mj} a_{ms} + 4\sum_{m=1}^{a-1} a_{ms}^2 \xi_s - (1+(-1)^{a+s}\xi_a)\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(2\sum_{j=1}^{a-1}(1+(-1)^{j+a})\xi_j + 4\sum_{m=1}^{a-1} a_{ms}^2 \xi_s + 4\sum_{j,m=1, j\neq s}^{a-1} a_{mj} a_{ms}\xi_j\right).$$

Но $\sum\limits_{m=1}^{a-1} a_{ms}^2 = \frac{a}{2}$. Если $j+s$ нечетно, то и $j-s$ нечетно, а тогда $\sum\limits_{m=1, j\neq s}^{a-1} a_{mj}a_{ms} = 0$. Если же $j+s$ четно, то и $j-s$ четно, а тогда $\sum\limits_{m=1, j\neq s}^{a-1} a_{mj}a_{ms} = -1$ и $1+(-1)^{j+s} = 2$. Отсюда $t_s = \frac{1}{n}\left(4\sum\limits_{j=1}^{a-1}\xi_j + 4\dfrac{a}{2}\xi_s - 4\sum\limits_{j=1}^{a-1}\xi_j\right) = \xi_s$. Значит, $P_o = \sum\limits_{s=1}^{a} \xi_s \,\mathrm{id}_s$, т. е. представимо в виде (7).

Вычислим тензор кручения $\widehat{N}$ ([16], с. 44) инвариантной структуры почти произведения. В силу инвариантности этого тензора относительно группы G он полностью определяется своим значением $\widehat{N}_o$ в точке $o = H$ и

$$\widehat{N}_o(X,Y) = [X,Y]_{\mathfrak{m}} + [(P_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)})_o X, (P_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)})_o Y]_{\mathfrak{m}} - \\ - (P_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)})_o([X,(P_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)})_o Y]_{\mathfrak{m}} + [(P_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)})_o X, Y]_{\mathfrak{m}}) \ \ \forall X, Y \in \mathfrak{m}. \qquad \square$$

Теорема 6. *Тензор кручения инвариантной структуры почти произведения, порождаемой оператором вида* (7), *в точке* $o = H$ *вычисляется по формуле*

$$\widehat{N}_o(X,Y) = 4\sum_{k,m=1}^{s}([X_{i_k}, Y_{i_m}]_{\mathfrak{m}} + [X,Y]_{i_k} - [X, Y_{i_k}]_{i_m} - [X_{i_m}, Y]_{i_k}).$$

Доказательство. Непосредственно применяя (7), получаем

$$\widehat{N}_o(X,Y) = [X,Y]_{\mathfrak{m}} + \Big[-X + 2\sum_{t=1}^{s} X_{i_t}, -Y + 2\sum_{t=1}^{s} Y_{i_t}\Big]_{\mathfrak{m}} - \\ - (P_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)})_o\bigg(\Big[X, -Y + 2\sum_{t=1}^{s} Y_{i_t}\Big]_{\mathfrak{m}} + \Big[-X + 2\sum_{t=1}^{s} X_{i_t}, Y\Big]_{\mathfrak{m}}\bigg) = \\ = 2[X,Y]_{\mathfrak{m}} - 2\sum_{t=1}^{s}[X, Y_{i_t}]_{\mathfrak{m}} - 2\sum_{t=1}^{s}[X_{i_t}, Y]_{\mathfrak{m}} + 4\sum_{k,m=1}^{s}[X_{i_k}, Y_{i_m}]_{\mathfrak{m}} + \\ + (P_{(i_1,i_2,\ldots,i_s)})_o\bigg(2[X,Y]_{\mathfrak{m}} - 2\sum_{t=1}^{s}[X, Y_{i_t}]_{\mathfrak{m}} - 2\sum_{t=1}^{s}[X_{i_t}, Y]_{\mathfrak{m}}\bigg) = \\ = 2[X,Y]_{\mathfrak{m}} - 2\sum_{t=1}^{s}[X, Y_{i_t}]_{\mathfrak{m}} - 2\sum_{t=1}^{s}[X_{i_t}, Y]_{\mathfrak{m}} + 4\sum_{k,t=1}^{s}[X_{i_t}, Y_{i_k}]_{\mathfrak{m}} - \\ - 2[X,Y]_{\mathfrak{m}} + 4\sum_{t=1}^{s}[X,Y]_{i_t} + 2\sum_{t=1}^{s}[X, Y_{i_t}]_{\mathfrak{m}} - \\ - 4\sum_{k,t=1}^{s}[X, Y_{i_t}]_{i_k} + 2\sum_{t=1}^{s}[X_{i_t}, Y]_{\mathfrak{m}} - 4\sum_{k,t=1}^{s}[X_{i_t}, Y_{i_k}]_{\mathfrak{m}} = \\ = 4\sum_{k,m=1}^{s}([X_{i_k}, Y_{i_m}]_{\mathfrak{m}} + [X,Y]_{i_k} - [X, Y_{i_k}]_{i_m} - [X_{i_m}, Y]_{i_k}). \qquad \square$$

Следствие. Пусть оператор инвариантной структуры почти произведения P_i в точке $o = H$ имеет вид $(P_i)_o X = -X + 2X_i$, $i = \overline{1,a}$. Эта структура интегрируема тогда и только тогда, когда

1) $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{m}} = [\mathfrak{m}_k, \mathfrak{m}_s]_i = 0$, где $k, s \neq i$, $k, s = \overline{1,a}$, $n \neq 3i$;

2) $[\mathfrak{m}_k, \mathfrak{m}_s]_i = 0$, где $k, s \neq i$, $k, s = \overline{1,a}$, $n = 3i$.

Доказательство. В этом случае в теореме 6 надо положить $i_k = i_t = i$. Тогда $\widehat{N}_o(X,Y) = 4([X_i, Y_i]_{\mathfrak{m}} + [X,Y]_i - [X, Y_i]_i - [X_i, Y]_i)$. Но $[X,Y]_i = [X_i, Y]_i + [X, Y_i]_i + \sum\limits_{k,s=1}^{a}[X_k, Y_s]_i$, где

$k, s \neq i$. Отсюда имеем 1), если $n \neq 3i$. Если же $n = 3i$, то $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i]_{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_i$ и тогда $\widehat{N}_o(X,Y) = 4 \sum\limits_{k,s=1}^{a} [X_k, Y_s]_i$, где k и s не равны i как по отдельности, так и вместе, что дает 2). $\square$

Определение 5. Назовем структуры почти произведения, о которых идет речь в следствии теоремы 6, специальными структурами почти произведения однородного периодического Ф-пространства.

Пусть G/H — Ф-пространство четного порядка $2a$. Рассмотрим структуру почти произведения, которая порождается оператором $P_o = \theta^a$. Такую инвариантную структуру почти произведения назовем особой структурой почти произведения однородного Ф-пространства G/H четного порядка.

Тогда, как следует из леммы 1, $P_o(X) = \sum\limits_{s=1}^{a} (-1)^s X_s$, т. е. подпространство, отвечающее собственному значению $+1$, имеет вид $V = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_4 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_k$, а подпространство, отвечающее собственному значению -1, имеет вид $T = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_3 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{m}_t$, где $k = a, t = a - 1$ в случае четного a и $k = a - 1, t = a$ в случае нечетного.

Лемма 13. *Особая структура почти произведения однородного* Ф*-пространства* G/H *четного порядка интегрируема тогда и только тогда, когда* $[\mathfrak{m}_{2i+1}, \mathfrak{m}_{2j+1}]_{\mathfrak{m}} = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, [\frac{a}{2}]$, $i < j$.

Доказательство. Согласно [17] структура почти произведения интегрируема тогда и только тогда, когда $[V, V]_T = [T, T]_V = 0$. Рассмотрим подпространство V. Так как $[V, V]_T = \sum\limits_{j,i=1,i<j}^{[\frac{a}{2}]} [\mathfrak{m}_{2i}, \mathfrak{m}_{2j}]_T$, то $[\mathfrak{m}_{2i}, \mathfrak{m}_{2j}]_T \neq 0$ согласно следствию лемм 5 и 6 только в случаях, когда $2i + 2j$, $2i - 2j$, $n - 2i - 2j$ нечетны. Значит, $[V, V]_T = 0$. Аналогично рассматривая подпространство T, получаем

$$[T, T]_V = \sum_{k,i,j=1,i<j}^{[\frac{a}{2}]} [\mathfrak{m}_{2i+1}, \mathfrak{m}_{2j+1}]_{\mathfrak{m}} \subset V,$$

что и дает доказательство леммы. $\square$

Пример 3. Рассмотрим на однородном Ф-пространстве порядка 6 канонические структуры почти произведения, операторы которых на касательном пространстве имеют вид $(P_i)_o(X) = -X + 2X_i$, $i = 1, 2$. Их тензоры кручения равны $\widehat{N}_o^i(X,Y) = 4([X_1, Y_1]_2 + [X_{3-i}, Y_3]_i + [X_3, Y_{3-i}]_i)$. Отсюда следует, что указанные структуры почти произведения интегрируемы тогда и только тогда, когда соответственно

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1]_2 = [\mathfrak{m}_{3-i}, \mathfrak{n}]_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Литература

[1] Степанов Н.А. *Основные факты теории φ-пространств* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 3. – С. 88–95.

[2] Ковальский О. *Обобщенные симметрические пространства.* – М.: Мир, 1984. – 240 с.

[3] Степанов Н.А. *Однородные* 3*-циклические пространства* // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 12. – С. 65–74.

[4] Wolf J.A., Gray A. *Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms* // J. Diff. Geom. – 1968. – V. 2. – № 1–2. – P. 77–159.

[5] Gray A. *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order* 3 // J. Diff. Geom. – 1972. – V. 7. – № 3–4. – P. 343–369.

[6] Степанов Н.А. *Почти комплексные структуры на φ-пространствах* // 3-я межвуз. научн. конф. по пробл. геометрии. Тезисы докл. – Казань, 1967. – С. 158–160.
[7] Tsagas Gr., Xenos Ph. *Relation between almost complex structures and Lie bracket for a special homogeneous spaces* // Tensor. – 1984. – V. 41. – № 3. – P. 278–284.
[8] Xenos Ph. *Properties of the homogeneous spaces of order five* // Bull. of the Calcutta Math. Soc. – 1986. – V. 78. – № 5. – P. 293–302.
[9] Балащенко В.В., Чурбанов Ю.Д. *Инвариантные структуры на однородных* Ф*-пространствах порядка* 5 // УМН. – 1990. – Т. 45. – Вып. 1. – С. 169–170.
[10] Чурбанов Ю.Д. *Геометрия однородных* Ф*-пространств порядка* 5 // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 5. – С. 70–81.
[11] Ермолицкий А.А. *Периодические аффиноры и* $2k$*-симметрические пространства* // ДАН БССР. – 1990. – Т. 34. – № 2. – С. 109–111.
[12] Балащенко В.В., Степанов Н.А. *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных* Ф*-пространствах* // Матем. сб. – 1995. – Т. 186. – № 11. – С. 3–34.
[13] Чурбанов Ю.Д. *Геометрия специальных аффинорных структур однородных* Ф*-пространств нечетного порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 2. – С. 84–86.
[14] Чурбанов Ю.Д. *Классические аффинорные структуры однородных* Ф*-пространств нечетного порядка* // VII Белорусск. Матем. конф. Тез. докл. Ч. 1. – Минск. – 1996. – С. 147–148.
[15] Чурбанов Ю.Д. *Аффинорные структуры классического типа однородных периодических* Ф*-пространств* // VIII Белорусск. Матем. конф. Тез. докл. Ч. 2. – Минск. – 2000. – С. 131.
[16] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т.1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
[17] Дашевич О.В. *Канонические структуры классического типа на регулярных* Ф*-пространствах и инвариантные аффинные связности* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 10. – С. 23–31.

Ю.Д. Чурбанов

доцент, кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики,
Белорусский государственный университет,
Беларусь, 220030, г. Минск, проспект Независимости, д. 4,

`e-mail:` churbanovi@tut.by

Yu.D. Churbanov

Associate Professor, Chair of Geometry, Topology and Methods of Teaching Mathematics,
Belarussian State University,
4 Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030 Belarus,

`e-mail:` churbanovi@tut.by