УДК 519.10

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО
РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ
МИНИМИЗАЦИИ ПРОЕКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ
НА $\mathbb{R}_+$ И $\mathbb{R}_-$ *)

В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин

Рассматривается векторная булева задача поиска множества Парето, частными критериями которой являются положительные и отрицательные срезки линейных функций. Выводится формула предельного уровня возмущений в пространстве параметров этих функций с метрикой l_1 , сохраняющих эффективность (парето-оптимальность) решения. В качестве следствий получены необходимые и достаточные условия двух типов устойчивости задачи.

Введение

При решении практических задач оптимизации приходится учитывать различные факторы неопределенности и случайности, такие как неточность входной информации, неадекватность математических моделей реальным процессам, ошибки округления, погрешность вычислений, потребность в разработке алгоритмов для решения серии «близких» задач и т. д. В связи с этим широкое распространение дискретных оптимизационных моделей в последние десятилетия обусловило внимание многих специалистов к исследованию разнообразных аспектов устойчивости, а также смежных вопросов параметрического и постоптимального анализа как скалярных, так и векторных (многокритериальных) задач дискретной оптимизации. В рамках введения не представляется возможным осветить всё многообразие существующих подходов к исследованию устойчивости задач дискретной оптимизации. Поэтому мы ограничимся исключительно последними публикациями, которые ближе всего примыкают к данной работе. Отметим лишь, что систематическое изложение

*) Исследование выполнено в рамках Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь «Математические структуры 29» (проект 913/28).

теории устойчивости и параметрического анализа задач дискретной оптимизации содержится в работах [19, 27], а достаточно полное представление о многочисленных публикациях по этим вопросам можно получить на основе аннотированной библиографии [24].

Переходя к краткому обзору публикаций, появившихся в последнее время, выделим два основных подхода к постановке и исследованию проблем устойчивости дискретных задач. В ряде работ авторы ставят своей целью найти количественные оценки, характеризующие меру устойчивости оптимальных решений. В основу этого подхода положено ключевое понятие радиуса устойчивости, под которым понимается предельный уровень возмущений параметров задачи, сохраняющих некоторые свойства оптимальных решений. Впервые этот подход был применён к классической (скалярной) задаче коммивояжера в [18], а в обзоре [27] достаточно подробно изложены основные результаты исследований в этом направлении. Наряду с поиском аналитических выражений для радиуса устойчивости ряд авторов занимается разработкой алгоритмов его вычисления, а также анализом сложности таких алгоритмов (см., например, [20, 25]).

В работах второго направления авторы концентрируют свое внимание на поиске и описании области устойчивости оптимального решения. Например, в [26] обсуждаются вопросы применимости метода k лучших решений к нахождению области устойчивости оптимального решения линейной комбинаторной задачи оптимизации. К этому направлению относятся публикации, посвящённые получению условий, при выполнении которых множество эффективных (в некотором смысле) решений векторной задачи обладает некоторым заранее заданным свойством устойчивости. В этой связи упомянем работу [17], в которой проведён сравнительный анализ пяти типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленного программирования. Аналогичные результаты для этих типов устойчивости (но по функционалу) ранее были получены в [3, 4, 7, 14, 22] для векторных задач дискретной оптимизации с разнообразными принципами оптимальности.

Ведутся работы по исследованию устойчивости алгоритмов решения дискретных задач оптимизации. Перспективным представляется анализ устойчивости релаксационных множеств, широко используемых в различных алгоритмах решения задач целочисленного программирования. Выделим работу [21], в которой указанный анализ проведён на основе L -разбиения. Устойчивость некоторых алгоритмов решения скалярных задач целочисленного программирования при малых колебаниях релак-

сационных множеств исследовалась в [16].

В настоящей статье продолжаются исследования [2, 6, 7, 23] устойчивости решений различных векторных (многокритериальных) дискретных задач с разными принципами оптимальности. Во всех этих работах анализ устойчивости осуществлялся в случае, когда в пространстве параметров задана чебышевская метрика l_∞ . В работах [9, 12] такой анализ проведён в пространстве с метрикой l_1 и получена формула для радиуса устойчивости эффективного решения векторной комбинаторной задачи с линейными частными критериями. Ранее подобные исследования для скалярных комбинаторных задач были проведены в [6].

В настоящей статье рассматривается векторная булева задача поиска множества Парето с частными критериями, являющимися положительными и отрицательными срезками линейных функций. Получена формула радиуса устойчивости эффективного решения для метрики l_1 . В качестве следствий приведены необходимые и достаточные условия двух типов устойчивости задачи. Излагаемые результаты были анонсированы в [10, 11].

1. Определения, обозначения и свойства

Рассмотрим следующую модель векторной булевой задачи. Пусть $m \geq 1$, $n \geq 2$, A_i — i -я строка матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0, 1\}^n$, $|X| \geq 2$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Введём в рассмотрение операторы проектирования вещественного вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ произвольной размерности $k \geq 1$ на неотрицательный и неположительный ортанты

$$\mathbb{R}_+^k = \{y \in \mathbb{R}^k \mid y_i \geq 0, i \in N_k\}, \quad \mathbb{R}_-^k = \{y \in \mathbb{R}^k \mid y_i \leq 0, i \in N_k\} :$$

$$a \rightarrow a^+ = [a]^+ = (a_1^+, a_2^+, \dots, a_k^+), \quad a \rightarrow a^- = [a]^- = (a_1^-, a_2^-, \dots, a_k^-),$$

где $a_i^+ = \max\{0, a_i\}$, $a_i^- = \min\{0, a_i\}$, $i \in N_k = \{1, 2, \dots, k\}$. Эти операторы называются также *положительной* и *отрицательной срезками* проектируемого вектора.

На множестве X зададим векторный критерий

$$f(x, A, b) = (f_1(x, A_1, b_1), f_2(x, A_2, b_2), \dots, f_m(x, A_m, b_m)) \rightarrow \min_{x \in X},$$

частными критериями которого являются проекции линейных функций $A_i x + b_i$ на $\mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}_-$, т. е.

$$f_i(x, A_i, b_i) = \begin{cases} [A_i x + b_i]^+, & \text{если } i \in I_1, \\ [A_i x + b_i]^-, & \text{если } i \in I_2, \end{cases}$$

где $I_1 \cup I_2 = N_m$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Таким образом, вектор-функция $f(x, A, b)$ является проекцией m -мерного вектора, состоящего из линейных функций $A_i x + b_i$, $i \in N_m$, на один из 2^m ортантов критериального пространства $\mathbb{R}^m$, задаваемого множествами I_1 и I_2 .

Отметим, что операции проектирования на простейшие выпуклые множества (ортант, гиперплоскость, полупространство, линейное многообразие и другие) лежат в основе различных вариантов фейеровских итерационных методов, используемых для численного анализа несовместных систем линейных неравенств и несобственных задач линейного программирования [1, 15].

Под *векторной* (m -критериальной) *задачей булева программирования* $Z^m(A, b)$, $m \geq 1$, будем понимать задачу нахождения множества эффективных решений (множества Парето)

$$P^m(A, b) = \{x \in X \mid P^m(x, A, b) = \emptyset\},$$

где

$$\begin{aligned} P^m(x, A, b) &= \{x' \in X \mid g(x, x', A, b) \leq 0_{(m)} \text{ и } g(x, x', A, b) \neq 0_{(m)}\}, \\ g(x, x', A, b) &= (g_1, g_2, \dots, g_m), \\ g_i &= g_i(x, x', A_i, b_i) = f_i(x', A_i, b_i) - f_i(x, A_i, b_i), \quad i \in N_m, \\ 0_{(m)} &= (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

В силу неравенства $|X| < \infty$ множество $P^m(A, b)$ непусто при любых $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$.

Если $I_1 = N_m$, то очевидно, что минимизация вектора $[Ax + b]^+$ на множестве X равносильна минимизации невязок (уклонений) следующей системы линейных булевых неравенств

$$Ax + b \leq 0_{(m)}, \quad x \in X. \quad (1)$$

Поэтому задача $Z^m(A, b)$ является задачей отыскания множества всех решений системы (1) при условии, что эта система совместна. В противном случае множество Парето $P^m(A, b)$ можно считать множеством квазирешений системы (1). Нетрудно видеть, что система неравенств (1) совместна тогда и только тогда, когда множество эффективных векторных оценок

$$f(P^m(A, b)) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y = f(x, A, b), \quad x \in P^m(A, b)\}$$

состоит лишь из нулевого вектора $0_{(m)}$.

В случае, когда $I_2 = N_m$, очевидно следующее утверждение: система строгих неравенств $Ax + b < 0_{(m)}$, $x \in X$, совместна тогда и только тогда, когда среди элементов множества $f(P^m(A, b))$ существует хотя бы одна оценка, принадлежащая множеству

$$\mathbb{R}_{<0}^m = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y_i < 0, \quad i \in N_m\}.$$

Для каждого натурального числа k в k -мерном действительном пространстве $\mathbb{R}^k$ зададим метрику l_1 , т. е. под нормой вектора $z = (z_1, z_2, \dots, z_k)$ будем понимать число $\|z\| = \sum_{i \in N_k} |z_i|$, а под нормой $\|A\|$ матрицы $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ с элементами из $\mathbb{R}$ — норму вектора $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn-1}, a_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $\Omega(\varepsilon)$ — множество таких пар (A', b') , что $A' \in \mathbb{R}^{mn}$, $b' \in \mathbb{R}^m$ и $\|A'\| + \|b'\| < \varepsilon$. Далее пару $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$ будем называть *возмущающей*, а множество $\{(A + A', b + b') \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \mid (A', b') \in \Omega(\varepsilon)\}$ будем интерпретировать как окрестность (ε -окрестность) точки (A, b) в пространстве $\mathbb{R}^{m \times (n+1)}$.

Следуя [9, 11, 12], *радиусом устойчивости* эффективного решения $x \in P^m(A, b)$ назовем число

$$\rho^m(x, A, b) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где $\Xi = \{\varepsilon > 0 \mid x \in P^m(A + A', b + b'), \text{ где } (A', b') \in \Omega(\varepsilon)\}$.

Таким образом, радиус устойчивости задает предельный уровень возмущений исходных данных задачи в пространстве $\mathbb{R}^{m(n+1)}$ параметров векторного критерия с метрикой l_1 , которые сохраняют эффективность решения.

В дальнейшем для доказательства утверждений нам понадобится ряд свойств, большинство из которых непосредственно вытекает из приведенных здесь определений и обозначений.

Для двух различных решений x и x' положим

$$N(x, x') = \{j \in N(x) \mid x'_j = 0\}, \quad N(x) = \{j \in N_n \mid x_j = 1\}.$$

Свойство 1. Для любой пары (x, x') , $x \neq x'$, хотя бы одно из множеств $N(x, x')$ или $N(x', x)$ непусто.

Отсюда следует

Свойство 2. Если $N(x, x') = \emptyset$, то при любом $i \in N_m$ верно равенство $\sum_{j \in N(x', x)} |a_{ij}| + \sum_{j \in N(x)} |a_{ij}| = \sum_{j \in N(x')} |a_{ij}|$.

Свойство 3. Если $N(x, x') = \emptyset$, то при любом $i \in N_m$ выполняется неравенство $[A_i x - A_i x']^+ + A_i x \leq \|A_i\|$.

Действительно, с учётом свойства 2 имеем

$$\begin{aligned} [A_i x - A_i x']^+ + A_i x &\leq |A_i x - A_i x'| + A_i x = \left| \sum_{j \in N(x', x)} a_{ij} \right| + \sum_{j \in N(x)} a_{ij} \\ &\leq \sum_{j \in N(x', x)} |a_{ij}| + \sum_{j \in N(x)} |a_{ij}| = \sum_{j \in N(x')} |a_{ij}| \leq \|A_i\|. \end{aligned}$$

Следующие соотношения очевидны при любых числах $c, d \in \mathbb{R}$:

$$c^+ + [-c]^- = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -|c| - |d| &\leq c^- + d^- \leq [c + d]^- \leq c^+ + d^- \leq [c + d]^+ \\ &\leq c^+ + d^+ \leq |c| + |d|, \end{aligned} \quad (3)$$

$$c^+ + c^- = c. \quad (4)$$

Для любых различных решений $x, x' \in X$ и любого $i \in N_m$ введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha(x, x', A, b) &= \sum_{i \in N_m} g_i^+(x, x', A_i, b_i), \quad \beta(x, x', A, b) = \min_{i \in N_m} h_i(x, x', A_i, b_i), \\ h_i(x, x', A_i, b_i) &= \begin{cases} -\widehat{f}_i(x, A_i, b_i), & \text{если } N(x, x') \neq \emptyset, i \in I_1, \\ -\widehat{f}_i(x, A_i, b_i) + \widehat{g}_i^+(x, x', A_i, b_i), & \text{если } N(x, x') = \emptyset, i \in I_1, \\ \widehat{f}_i(x', A_i, b_i), & \text{если } N(x', x) \neq \emptyset, i \in I_2, \\ \widehat{f}_i(x', A_i, b_i) + \widehat{g}_i^+(x', x, A_i, b_i), & \text{если } N(x', x) = \emptyset, i \in I_2, \end{cases} \\ \widehat{g}_i(x, x', A_i, b_i) &= \widehat{f}_i(x', A_i, b_i) - \widehat{f}_i(x, A_i, b_i), \\ \widehat{f}_i(x, A_i, b_i) &= \begin{cases} [A_i x + b_i]^-, & \text{если } i \in I_1, \\ [A_i x + b_i]^+, & \text{если } i \in I_2, \end{cases} \end{aligned}$$

Замечание 1. Легко убедиться, что величины $\alpha(x, x', A, b)$, $\beta(x, x', A, b)$ и $h_i(x, x', A_i, b_i)$ неотрицательны при любых $A \in \mathbb{R}^{mn}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $i \in N_m$.

При любом $i \in I_1$ и различных решениях $x, x' \in X$ определим

$$\widehat{h}_i(x, x', A_i, b_i) = \begin{cases} \widehat{f}_i(x', A_i, b_i), & \text{если } N(x', x) \neq \emptyset, \\ \widehat{f}_i(x', A_i, b_i) + \widehat{g}_i^+(x', x, A_i, b_i), & \text{если } N(x', x) = \emptyset. \end{cases}$$

Следующие четыре свойства непосредственно вытекают из определения величин $g_i(x, x', A_i, b_i)$, $\widehat{g}_i(x, x', A_i, b_i)$, $h_i(x, x', A_i, b_i)$ и $\widehat{h}_i(x, x', A_i, b_i)$.

Свойство 4. Если при некотором $i \in N_m$ выполняется неравенство $h_i(x, x', A_i, b_i) > 0$, то $A_i x + b_i < 0$ при $i \in I_1$ и $A_i x + b_i > 0$ при $i \in I_2$.

Свойство 5. Пусть $x \in X$, $i \in N_m$. Для любого решения $x' \neq x$ справедливо неравенство $h_i(x, x', A_i, b_i) > 0$, если $i \in I_1$ и $A_i x + b_i < 0$ или $i \in I_2$ и $A_i x + b_i > 0$.

Свойство 6. Для любого решения $x \neq x'$ и любого $i \in I_1$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\widehat{g}_i(x, x', A_i, b_i) &= g_i(x', x, -A_i, -b_i), \\ \widehat{h}_i(x, x', A_i, b_i) &= h_i(x', x, -A_i, -b_i).\end{aligned}$$

Свойство 7. Пусть $i \in I_1$ и пусть справедливо некоторое утверждение, сформулированное в терминах $\widehat{g}_i(x, x', A_i, b_i)$ и $\widehat{h}_i(x, x', A_i, b_i)$. Тогда это утверждение верно и для $i \in I_2$ при замене $\widehat{g}_i(x, x', A_i, b_i)$ на $\widehat{g}_i(x, x', A_i, b_i)$ и $\widehat{h}_i(x, x', A_i, b_i)$ на $h_i(x, x', A_i, b_i)$.

Свойство 8. Для любых $x, x' \in X$, $i \in N_m$ справедливы соотношения

$$f_i(x, A_i, b_i) + \widehat{f}_i(x, A_i, b_i) = A_i x + b_i, \quad (5)$$

$$f_i(x, A_i, b_i) - \widehat{f}_i(x', A_i, b_i) \leq \|A_i\| + |b_i|, \quad (6)$$

$$g_i(x, x', A_i, b_i) \leq g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) + \|A'_i\| + |b'_i|. \quad (7)$$

В самом деле, (5) вытекает из (4), а (6) — из (3) и (4). Далее, вновь используя (3), легко выводим неравенства

$$f_i(x, A_i, b_i) + [A'_i x + b'_i]^- \leq f_i(x, A_i + A'_i, b_i + b'_i) \leq f_i(x, A_i, b_i) + [A'_i x + b'_i]^+,$$

которые с учётом (6) дают (7):

$$\begin{aligned}g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) &= f_i(x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) - f_i(x, A_i + A'_i, b_i + b'_i) \\ &\geq f_i(x', A_i, b_i) + [A'_i x' + b'_i]^- - f_i(x, A_i, b_i) - [A'_i x + b'_i]^+ \\ &\geq g_i(x, x', A_i, b_i) - \|A'_i\| - |b'_i|.\end{aligned}$$

Свойство 9. Если при некотором $i \in N_m$ справедливо неравенство

$$g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) \leq 0, \quad (8)$$

то

$$g_i^+(x, x', A_i, b_i) \leq \|A'_i\| + |b'_i|. \quad (9)$$

Действительно, если $g_i(x, x', A_i, b_i) \leq 0$, то неравенство (9) очевидно, а если $g_i(x, x', A_i, b_i) > 0$, то, используя (7) и (8), получаем

$$\begin{aligned} g_i^+(x, x', A_i, b_i) &= g_i(x, x', A_i, b_i) \\ &\leq g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) + \|A'_i\| + |b'_i| \leq \|A'_i\| + |b'_i|. \end{aligned}$$

2. Леммы

Лемма 1. Если при некотором $s \in N_m$ справедливо неравенство

$$g_s(x, x', A_s + A'_s, b_s + b'_s) < 0, \quad (10)$$

то

$$g_s^+(x, x', A_s, b_s) + h_s(x, x', A_s, b_s) \leq \|A'_s\| + |b'_s|. \quad (11)$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что ввиду (10) верно неравенство $x \neq x'$.

Сначала докажем лемму, предполагая, что $s \in I_1$. Тогда $f_s(x, A_s, b_s) = [A_s x + b_s]^+$.

Если $h_s(x, x', A_s, b_s) = 0$, то неравенство (11) следует из свойства 9. Поэтому, считая (см. замечание 1)

$$h_s(x, x', A_s, b_s) > 0, \quad (12)$$

покажем, что тогда неравенство (11) строгое, т. е.

$$\psi := g_s^+(x, x', A_s, b_s) + h_s(x, x', A_s, b_s) - \|A'_s\| - |b'_s| < 0. \quad (13)$$

Из свойства 4 и неравенства (12) вытекает неравенство $A_s x + b_s < 0$, которое вместе с (10) даёт

$$A'_s x + b'_s > -A_s x - b_s > 0. \quad (14)$$

Отсюда, в частности, получаем

$$g_s^+(x, x', A_s, b_s) = f_s(x', A_s, b_s). \quad (15)$$

Возможны два случая.

Случай 1. $N(x, x') \neq \emptyset$. Тогда в силу (14) при $s \in I_1$ выполняются равенства

$$h_s(x, x', A_s, b_s) = -\widehat{f}_s(x, A_s, b_s) = -A_s x - b_s.$$

Поэтому, последовательно применяя равенство (15) и неравенства (6) и (14), получаем

$$\begin{aligned}
\psi &= g_s^+(x, x', A_s, b_s) + h_s(x, x', A_s, b_s) - \|A'_s\| - |b'_s| \\
&= f_s(x', A_s, b_s) - (A_s x + b_s) - \|A'_s\| - |b'_s| \\
&\leq f_s(x', A_s, b_s) - (A_s x + b_s) + \widehat{f}_s(x', A'_s, b'_s) - f_s(x, A'_s, b'_s) \\
&= f_s(x', A_s, b_s) - (A_s x + b_s) + \widehat{f}_s(x', A'_s, b'_s) - (A'_s x + b'_s). \quad (16)
\end{aligned}$$

В тоже время, учитывая (3) и (14), находим

$$\begin{aligned}
&f_s(x', A_s, b_s) - (A_s x + b_s) + \widehat{f}_s(x', A'_s, b'_s) - (A'_s x + b'_s) \\
&= [A_s x' + b_s]^+ + [A'_s x' + b'_s]^- - [A_s x + b_s + A'_s x + b'_s]^+ \\
&\leq f_s(x', A_s + A'_s, b_s + b'_s) + f_s(x, A_s + A'_s, b_s + b'_s) = g_s(x, x', A_s + A'_s, b_s + b'_s).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (10) и (16) приходим к необходимому неравенству

$$\psi \leq g_s(x, x', A_s + A'_s, b_s + b'_s) < 0.$$

Случай 2. $N(x, x') = \emptyset$. Если $\widehat{g}_s^+(x, x', A_s, b_s) = 0$, то доказательство неравенства $\psi < 0$ аналогично доказательству в случае 1, поскольку $h_s(x, x', A_s, b_s) = -\widehat{f}_s(x, A_s, b_s)$ при $s \in I_1$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что

$$\widehat{g}_s^+(x, x', A_s, b_s) > 0.$$

Отсюда и из (14) следует, что

$$A_s x' + b_s > A_s x + b_s > -A'_s x - b'_s, \quad (17)$$

$$h_s(x, x', A_s, b_s) = \widehat{f}_s(x', A_s, b_s) - 2(A_s x + b_s). \quad (18)$$

Используя свойство 3 и равенства (5) и (15), убеждаемся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned}
\psi &= g_s^+(x, x', A_s, b_s) + h_s(x, x', A_s, b_s) - \|A'_s\| - |b'_s| \\
&= f_s(x', A_s, b_s) + \widehat{f}_s(x', A_s, b_s) - 2(A_s x + b_s) - \|A'_s\| - |b'_s| \\
&\leq A_s x' + b_s - 2(A_s x + b_s) - [A'_s x - A'_s x']^+ - (A'_s x + b'_s) \\
&< A_s x' + b_s - (A_s x + b_s) - [A'_s x - A'_s x']^+. \quad (19)
\end{aligned}$$

Далее, учитывая (17), сумму $A_s x' + b_s$ можно записать в виде

$$[A_s x' + b_s + A'_s x + b'_s]^+ - A'_s x - b'_s.$$

Отсюда согласно (19) с учётом (2) имеем

$$\psi < [A_s x' + b_s + A'_s x + b'_s]^+ - (A'_s x + b'_s) - (A_s x + b_s) + [A'_s x' - A'_s x]^-.$$

Пользуясь этим неравенством, используя (3), (17) и учитывая (10), получаем

$$\begin{aligned} \psi &< [A_s x' + A'_s x' + b_s + b'_s]^+ - (A_s x + b_s) - (A'_s x + b'_s) \\ &= [A_s x' + A'_s x' + b_s + b'_s]^+ - [A_s x + A'_s x + b_s + b'_s]^+ \\ &= f_s(x', A_s + A'_s, b_s + b'_s) - f_s(x, A_s + A'_s, b_s + b'_s) \\ &= g_s(x, x', A_s + A'_s, b_s + b'_s) < 0. \end{aligned}$$

Итак, при $s \in I_1$ лемма 1 доказана.

Теперь покажем, что лемма верна при $s \in I_2$. Пусть при $s \in I_1$ выполняется неравенство $\widehat{g}_s(x, x', A_s + A'_s, b_s + b'_s) < 0$. Тогда в силу свойства 6 имеем $g_s(x', x, -A_s - A'_s, -b_s - b'_s) < 0$. Поэтому на основании доказанного (при $s \in I_1$) неравенства (11) получаем

$$g_s^+(x', x, -A_s, -b_s) + h_s(x', x, -A_s, -b_s) \leq \| -A'_s \| + | -b'_s |.$$

Отсюда и из свойства 6 следует, что

$$\widehat{g}_s^+(x, x', A_s, b_s) + \widehat{h}_s(x, x', A_s, b_s) \leq \|A'_s\| + |b'_s|.$$

Следовательно, на основании свойства 7 лемма верна при $s \in I_2$. Лемма 1 доказана.

Следующая лемма показывает, что в терминах введённых величин $\alpha(x, x', A, b)$ и $\beta(x, x', A, b)$ формулируется условие, при выполнении которого x становится эффективным решением не только исходной задачи $Z^m(A, b)$, но и любой возмущённой в определенной окрестности точки (A, b) .

Лемма 2. Пусть $x \in X$ и существует такое число $\varphi > 0$, что для любого решения $x' \neq x$ выполняется неравенство

$$\alpha(x, x', A, b) + \beta(x, x', A, b) \geq \varphi. \quad (20)$$

Тогда для любой возмущающей пары $(A', b') \in \Omega(\varphi)$ справедливо включение $x \in P^m(A + A', b + b')$.

Доказательство. Пусть, напротив, существует такая возмущающая пара $(A', b') \in \Omega(\varphi)$, что $x \notin P^m(A + A', b + b')$. Тогда найдётся решение $x^0 \in P^m(x, A + A', b + b')$. Это значит, что выполняются неравенства

$$g_i(x, x^0, A_i + A'_i, b_i + b'_i) \leq 0, \quad i \in N_m;$$

при этом найдётся такой индекс $s \in N_m$, что

$$g_s(x, x^0, A_s + A'_s, b_s + b'_s) < 0.$$

Отсюда в силу свойства 9 при любом $i \in N_m$ имеет место неравенство (9), а по лемме 1 — неравенство (11). Используя полученные неравенства и учитывая включение $(A', b') \in \Omega(\varphi)$, получаем соотношения

$$\begin{aligned} \alpha(x, x^0, A, b) + \beta(x, x^0, A, b) &\leq \alpha(x, x^0, A, b) + h_s(x, x^0, A_s, b_s) \\ &= \sum_{i \in N_m} g_i^+(x, x^0, A_i, b_i) + h_s(x, x^0, A_s, b_s) \leq \sum_{i \in N_m} (\|A'_i\| + |b'_i|) \\ &= \|A'\| + \|b'\| < \varphi, \end{aligned}$$

которые противоречат условию (20) леммы. Лемма 2 доказана.

Приводимая ниже лемма может быть интерпретирована следующим образом: величины $\beta(x, x', A, b)$ и $g_i^+(x, x', A_i, b_i)$, $i \in N_m$, задают окрестность точки (A, b) , вне которой найдётся такая возмущающая пара (A', b') , что решение x не является эффективным в задаче $Z^m(A + A', b + b')$.

Лемма 3. Пусть x и x' — различные решения задачи $Z^m(A, b)$. Тогда для любого числа $\varepsilon > \sum_{i \in N_m} \xi_i + \eta$, где

$$\xi_i > g_i^+(x, x', A_i, b_i), \quad i \in N_m, \quad (21)$$

$$\eta > \beta(x, x', A, b), \quad (22)$$

найдётся такая возмущающая пара $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, что

$$x \notin P^m(A + A', b + b').$$

Доказательство. Сначала отметим, что любое число ε , определённое условиями леммы 3, положительно. Неравенство (22) перепишем в виде

$$\eta > h_p(x, x', A_p, b_p), \quad (23)$$

где p — индекс, при котором выполняется равенство

$$\beta(x, x', A, b) = h_p(x, x', A_p, b_p).$$

Очевидно, для доказательства леммы 3 достаточно найти такую возмущающую пару $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, что $x' \in P^m(x, A + A', b + b')$. Для этого в

свою очередь достаточно построить такую пару $(A'_p, b'_p) \in \Psi(\xi_p + \eta)$, что справедливо неравенство

$$g_p(x, x', A_p + A'_p, b_p + b'_p) < 0, \quad (24)$$

а для любого индекса $i \in N_m \setminus \{p\}$ — пару $(A'_i, b'_i) \in \Psi(\xi_i)$ с условием

$$g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) \leq 0. \quad (25)$$

Здесь и далее $\Psi(\theta) = \{(C, d) \mid C \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}, \|C\| + |d| = \theta\}$.

Очевидно, что при таком построении в силу (21) и (22) будет выполняться включение $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, где матрица A' состоит из строк A'_i , $i \in N_m$, а столбец b' — из элементов b'_i , $i \in N_m$.

Иными словами, доказательство леммы 3 будет завершено, если будут доказаны два утверждения:

1) при $i = p$ из (21) и (23) вытекает существование такой пары $(A'_p, b'_p) \in \Psi(\xi_p + \eta)$, что имеет место (24),

2) при каждом $i \in N_m \setminus \{p\}$ из (21) следует существование такой пары $(A'_i, b'_i) \in \Psi(\xi_i)$, что справедливо (25).

Сначала справедливость этих утверждений докажем в предположении, что $i \in I_1$. Возможны следующие четыре случая.

Случай 1. $i = p$, $N(x, x') \neq \emptyset$. Зафиксировав индекс $q \in N(x, x')$, элементы пары (A'_p, b'_p) зададим в виде $a'_{pj} = \xi_p + \eta$ при $j = q$, $a'_{pj} = 0$ при $j \neq q$ и $b'_p = 0$ и докажем справедливость неравенства (24). Легко видеть, что $(A'_p, b'_p) \in \Psi(\xi_p + \eta)$. В силу строения пары (A'_p, b'_p) справедливы равенства

$$A'_p x + b'_p = \xi_p + \eta, \quad A'_p x' + b'_p = 0. \quad (26)$$

Из (5), (21) и (23) следует, что

$$\begin{aligned} \xi_p + \eta &> g_p^+(x, x', A_p, b_p) - \widehat{f}_p(x, A_p, b_p) \geq f_p(x', A_p, b_p) - f_p(x, A_p, b_p) \\ &\quad - \widehat{f}_p(x, A_p, b_p) = f_p(x', A_p, b_p) - (A_p x + b_p). \end{aligned}$$

Поэтому $\xi_p + \eta + A_p x + b_p > f_p(x', A_p, b_p) \geq 0$. Отсюда с учётом (26) получаем необходимое неравенство

$$\begin{aligned} g_p(x, x', A_p + A'_p, b_p + b'_p) &= f_p(x', A_p, b_p) - [A_p x + b_p + \xi_p + \eta]^+ \\ &= f_p(x', A_p, b_p) - A_p x - b_p - \xi_p - \eta < 0. \end{aligned}$$

Случай 2. $i = p$, $N(x, x') = \emptyset$. Тогда согласно свойству 1 множество $N(x', x)$ не пусто. Зафиксировав индекс $q \in N(x', x)$, элементы пары

$(A'_p, b'_p) \in \Psi(\xi_p + \eta)$ зададим виде $a'_{pj} = -\xi_p - \eta'$ при $j = q$, $a'_{pj} = 0$ при $j \neq q$ и $b'_p = \eta''$, где η' и η'' — положительные числа, определяемые из условий

$$\eta' = \widehat{g}_p^+(x, x', A_p, b_p) + \delta, \quad \eta'' = -\widehat{f}_p(x, A_p, b_p) + \delta, \quad \delta > 0, \quad \eta' + \eta'' = \eta.$$

Нетрудно видеть, что с учётом (23) и определения величины $h_p(x, x', A_p, b_p)$ числа η' и η'' определены корректно.

Докажем справедливость (24). Принимая во внимание строение пары (A'_p, b'_p) , получаем

$$A'_p x + b'_p = \eta'', \quad A'_p x' + b'_p = -\xi_p - \eta' + \eta''.$$

Поэтому, учитывая определение величин η' , η'' и применяя последовательно неравенство (21) и трижды равенство (5), имеем

$$\begin{aligned} g_p(x, x', A_p + A'_p, b_p + b'_p) &= [A_p x' + b_p - \xi_p - \eta' + \eta'']^+ - [A_p x + b_p + \eta'']^+ \\ &\leq [A_p x' + b_p - g_p^+(x, x', A_p, b_p) - \widehat{g}_p^+(x, x', A_p, b_p) - \widehat{f}_p(x, A_p, b_p)]^+ \\ &- [A_p x + b_p - \widehat{f}_p(x, A_p, b_p) + \delta]^+ \leq [A_p x' + b_p - g_p(x, x', A_p, b_p) - \widehat{g}_p(x, x', A_p, b_p) \\ &- \widehat{f}_p(x, A_p, b_p)]^+ - [f_p(x, A_p, b_p) + \delta]^+ < [A_p x + b_p - \widehat{f}_p(x, A_p, b_p)]^+ \\ &- f_p^+(x, A_p, b_p) = 0. \end{aligned}$$

Случай 3. $i \in N_m \setminus \{p\}$, $N(x, x') \neq \emptyset$. Тогда, фиксируя индекс $q \in N(x, x')$, определим элементы пары $(A'_i, b'_i) \in \Psi(\xi_i)$ следующим образом:

$$a'_{ij} = \begin{cases} \xi_i, & \text{если } j = q, A_i x + b_i \geq 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad b'_i = \begin{cases} -\xi_i, & \text{если } A_i x + b_i < 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Убедимся в справедливости неравенства (25). Рассмотрим два случая.

Случай 3.1. $A_i x + b_i \geq 0$. Тогда с учётом строения пары (A'_i, b'_i) имеем

$$A'_i x + b'_i = \xi_i, \quad A'_i x' + b'_i = 0.$$

Поэтому с использованием неравенства (21) находим

$$\begin{aligned} g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) &= f_i(x', A_i, b_i) - [A_i x + b_i + \xi_i]^+ \\ &= f_i(x', A_i, b_i) - (A_i x + b_i) - \xi_i \\ &< f_i(x', A_i, b_i) - (A_i x + b_i) - g_i^+(x, x', A_i, b_i) \\ &= f_i(x', A_i, b_i) - f_i(x, A_i, b_i) - g_i^+(x, x', A_i, b_i) \leq 0. \end{aligned}$$

Случай 3.2. $A_i x + b_i < 0$. Тогда из структуры пары (A'_i, b'_i) и неравенства (21) следует, что

$$A'_i x + b'_i = -\xi_i < -f_i(x', A_i, b_i).$$

Поэтому имеем

$$g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) \leq [A_i x' + b_i - \xi_i]^+ \leq [A_i x' + b_i - f_i(x', A_i, b_i)]^+ = 0.$$

Случай 4. $i \in N_m \setminus \{p\}$, $N(x, x') = \emptyset$. Тогда в силу свойства 1 множество $N(x', x)$ не пусто. Зафиксировав индекс $q \in N(x', x)$, элементы пары $(A'_i, b'_i) \in \Psi(\xi_i)$ определим виде $a'_{pj} = -\xi_i$ при $j = q$, $a'_{pj} = 0$ при $j \neq q$ и $b'_i = 0$ и покажем справедливость (25).

Ввиду структуры пары (A'_i, b'_i) справедливы равенства

$$A'_i x + b'_i = 0, \quad A'_i x' + b'_i = -\xi_i.$$

Пользуясь этим равенством и (21), находим

$$\begin{aligned} g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i) &= [A_i x' + b_i - \xi_i]^+ - f_i(x, A_i, b_i) \\ &\leq [A_i x' + b_i - g_i^+(x, x', A_i, b_i)]^+ - f_i(x, A_i, b_i) \\ &\leq f_i^+(x, A_i, b_i) - f_i(x, A_i, b_i) = 0. \end{aligned}$$

Итак показано, что при любом индексе $i \in I_1$ верны сформулированные выше два утверждения. Далее по аналогии с доказательством леммы 1 нетрудно убедиться в том, что оба утверждения, доказанные для $i \in I_1$, остаются в силе при замене величин $g_i(x, x', A_i, b_i)$, $g_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i)$ и $h_i(x, x', A_i, b_i)$ соответственно на величины $\widehat{g}_i(x, x', A_i, b_i)$, $\widehat{g}_i(x, x', A_i + A'_i, b_i + b'_i)$ и $\widehat{h}_i(x, x', A_i, b_i)$. Поэтому согласно свойству 7 эти утверждения справедливы при $i \in I_2$. Лемма 3 доказана.

3. Основной результат

Теорема. При любом $m \geq 1$ для радиуса устойчивости $\rho^m(x, A, b)$ эффективного решения $x \in P^m(A, b)$ задачи $Z^m(A, b)$ справедлива формула

$$\rho^m(x, A, b) = \min_{x' \in X \setminus \{x\}} (\alpha(x, x', A, b) + \beta(x, x', A, b)). \quad (27)$$

Доказательство. В силу замечания 1 правая часть формулы (27), которую в дальнейшем для краткости будем обозначать через φ , неотрицательна.

Сначала докажем неравенство $\rho^m(x, A, b) \geq \varphi$. Не уменьшая общности, считаем, что $\varphi > 0$ (в противном случае неравенство $\rho^m(x, A, b) \geq \varphi$ очевидно). В соответствии с определением числа φ для любого решения $x' \neq x$ имеем

$$\alpha(x, x', A, b) + \beta(x, x', A, b) \geq \varphi > 0.$$

Поэтому на основании леммы 2 решение $x \in P^m(A + A', b + b')$ при любой возмущающей паре $(A', b') \in \Omega(\varphi)$. Следовательно, $\rho^m(x, A, b) \geq \varphi$.

Остаётся показать, что $\rho^m(x, A, b) \leq \varphi$. Пусть $\varepsilon > \varphi$ и решение $x^* \neq x$ таково, что

$$\alpha(x, x^*, A, b) + \beta(x, x^*, A, b) = \varphi.$$

Тогда легко видеть, что существуют такие положительные числа

$$\xi_i > g_i^+(x, x^*, A_i, b_i), \quad i \in N_m, \quad \eta > \beta(x, x^*, A, b),$$

что $\varepsilon > \sum_{i \in N_m} \xi_i + \eta > \varphi$. Поэтому по лемме 3 найдётся такая возмущающая пара $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$, что $x \notin P^m(A + A', b + b')$. Итак доказано, что для любого числа $\varepsilon > \varphi$ справедливо неравенство $\rho^m(x, A, b) < \varepsilon$. Поэтому $\rho^m(x, A, b) \leq \varphi$. Теорема доказана.

4. Следствия

Эффективное решение x из $P^m(A, b)$ назовём *устойчивым*, если $\rho^m(x, A, b) > 0$.

Следствие 1. При любом $m \geq 1$ эффективное решение x^0 из $P^m(A, b)$ устойчиво тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий:

(i) x^0 — решение системы строгих неравенств

$$\begin{cases} A_i x + b_i < 0 & \text{при } i \in I_1, \\ A_i x + b_i > 0 & \text{при } i \in I_2, \end{cases}$$

(ii) для любого решения $x \in X \setminus \{x^0\}$ существует хотя бы один такой индекс $s \in N_m$, что справедливо неравенство

$$g_s(x^0, x, A_s, b_s) > 0.$$

Действительно, для любого решения $x \neq x^0$ справедливы утверждения:

1) $\alpha(x^0, x, A, b) > 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (ii);

2) $\beta(x^0, x, A, b) > 0$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (i) (ввиду свойств 4 и 5).

Поэтому из теоремы вытекает следствие 1. По аналогии с [4, 12–14] задачу $Z^m(A, b)$ назовём *квазиустойчивой*, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для каждой возмущающей пары $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$ справедливо включение

$$P^m(A, b) \subseteq P^m(A + A', b + b').$$

Таким образом, квазиустойчивость задачи $Z^m(A, b)$ является свойством сохранения эффективности решений в «малой» окрестности точки (A, b) , т. е. является дискретным аналогом свойства полунепрерывности снизу по Хаусдорфу многозначного (точечно-множественного) отображения, задающего паретовскую функцию выбора. Иначе говоря, задача $Z^m(A, b)$ квазиустойчива, тогда и только тогда, когда каждое решение из множества Парето $P^m(A, b)$ устойчиво.

Известно (см., например, [3, 13, 19]), что в случае, когда все частные критерии линейны, векторная задача на конечном множестве решений квазиустойчива тогда и только тогда, когда множество Парето совпадает с *множеством Смейла* (множеством строго эффективных решений), которое, являясь подмножеством множества Парето, определяется следующим образом:

$$S^m(A, b) = \{x \in X \mid S^m(x, A, b) = \emptyset\},$$

где $S^m(x, A, b) = \{x' \in X \setminus \{x\} \mid g(x, x', A, b) \leq 0_{(m)}\}$.

Поскольку всякое решение $x \in S^m(A, b)$ удовлетворяет условию (ii), то из следствия 1 вытекает

Следствие 2. При любом $m \geq 1$ задача $Z^m(A, b)$ квазиустойчива, если $P^m(A, b) = S^m(A, b)$.

Следующий пример показывает, что равенство $P^m(A, b) = S^m(A, b)$, вообще говоря, не является необходимым условием квазиустойчивости задачи $Z^m(A, b)$.

Пример. Пусть $n = 3$, $m = 2$, $I_1 = N_2$, $X = \{x', x'', x'''\}$, $x' = (1, 0, 0)^T$, $x'' = (0, 1, 0)^T$, $x''' = (0, 1, 1)^T$, $b = (0, 0)^T$ и

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Тогда $[Ax' + b]^+ = (2, 1)^T$, $[Ax'' + b]^+ = [Ax''' + b]^+ = (0, 0)^T$. Поэтому $P^2(A, b) = Q^2(A, b) = \{x'', x'''\} \neq S^2(A, b) = \emptyset$, но задача $Z^2(A, b)$ квазиустойчива, поскольку в силу теоремы $\rho^2(x'', A, b) = 1 > 0$ и $\rho^2(x''', A, b) = 2 > 0$.

Обозначим через $Q^m(A, b)$ множество таких решений x из X , что выполняется хотя бы одно из условий (i) или (ii). Тогда, воспользовавшись следствием 1, получаем следующее утверждение.

Следствие 3. При любом $m \geq 1$ задача $Z^m(A, b)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$P^m(A, b) = Q^m(A, b).$$

Ослабляя требование сохранения всего множества Парето, приходим к понятию *сильной квазиустойчивости* задачи $Z^m(A, b)$ [13]. Этот тип устойчивости трактуется как существование таких $\varepsilon > 0$ и $x^0 \in P^m(A, b)$, что для всякой возмущающей пары $(A', b') \in \Omega(\varepsilon)$ выполняется включение $x^0 \in P^m(A + A', b + b')$. Для этого вида устойчивости в силу следствия 1 справедливо следующее утверждение.

Следствие 4. Для того чтобы задача $Z^m(A, b)$, $m \geq 1$, была сильно квазиустойчивой, необходимо и достаточно, чтобы множество $Q^m(A, b)$ было непусто.

В скалярном случае ($m = 1$) множество $P^1(A, b)$ ($A \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$) является множеством оптимальных решений задачи $Z^1(A, b)$. Поэтому однокритериальными аналогами следствий 3 и 4 являются следующие два утверждения.

Следствие 5. Скалярная задача $Z^1(A, b)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда либо оптимальное решение единственно, либо для каждого оптимального решения $x \in P^1(A, b)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} Ax + b < 0 & \text{ при } I_1 = \{1\}, \\ Ax + b > 0 & \text{ при } I_2 = \{1\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Следствие 6. Скалярная задача $Z^1(A, b)$ сильно квазиустойчива тогда и только тогда, когда либо оптимальное решение единственно, либо существует хотя бы одно такое решение x^0 , что выполняются неравенства (28).

Замечание 2. Ясно, что вид формулы (27) существенно зависит от выбранной метрики l_1 в пространстве $\mathbb{R}^{m(n+1)}$. Однако следствия 1–6 теоремы верны при любой метрике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бердникова Е. А., Еремин И. И., Попов Л. Д. Распределённые фейеровские процессы для систем линейных неравенств и задач линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 16–32.
2. Бухтояров С. Е., Емеличев В. А. Конечные коалиционные игры: параметризация принципа оптимальности («от Парето до Нэша») и устойчивость обобщённо-эффективных ситуаций // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 6. С. 36–38.
3. Бухтояров С. Е., Емеличев В. А. Параметризация принципа оптимальности («от Парето до Слейтера») и устойчивость многокритериальных траекторных задач // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2003. Т. 10, № 2. С. 3–18.
4. Бухтояров С. Е., Емеличев В. А. О квазиустойчивости векторной траекторной задачи с параметрическим принципом оптимальности // Изв. вузов. Математика. 2004. № 1. С. 25–30.
5. Бухтояров С. Е., Емеличев В. А., Степанишина Ю. В. Вопросы устойчивости векторных дискретных задач с параметрическим принципом оптимальности // Кибернетика и системный анализ. 2003. № 4. С. 155–166.
6. Гордеев Э. Н. Исследование устойчивости в оптимизационных задачах на матроидах в метрике l_1 // Кибернетика и системный анализ. 2001. № 2. С. 132–144.
7. Емеличев В. А., Кричко В. Н. Об устойчивости паретовского оптимума векторной задачи булева программирования // Дискретная математика. 1999. Т. 11, вып. 4. С. 27–32.
8. Емеличев В. А., Кричко В. Н. Формула радиуса устойчивости векторной l_∞ -экстремальной траекторной задачи // Дискретная математика. 2004. Т. 16, вып. 1. С. 14–20.
9. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. Устойчивость эффективного решения векторной комбинаторной задачи в метрике l_1 // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, № 5. С. 25–28.
10. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. О радиусе устойчивости эффективного решения векторной задачи булева программирования с частными критериями, являющимися проекциями линейных функций на $\mathbb{R}_+$ // Российская конференция «Дискрет. анализ и исслед. операций»: Материалы конф. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН. 2004. С. 140.
11. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. О радиусе устойчивости эффективного решения одной векторной задачи булева программирования в метрике l_1 // Докл. РАН. 2005. Т. 401. № 6. С. 733–735.
12. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г., Леонович А. М. Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 79–92.

13. **Емеличев В. А., Подкопаев Д. П.** Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2001. Т. 8, № 1. С. 47–69.
14. **Емеличев В. А., Степанишина Ю. В.** О квазиустойчивости векторной траекторной задачи мажоритарной оптимизации // Мат. заметки. 2002. Т. 72, вып. 1. С. 34–42.
15. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983.
16. **Колоколов А. А., Девятерикова М. В.** Анализ устойчивости некоторых алгоритмов дискретной оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2004. № 3. С. 48–54.
17. **Лебедева Т. Т., Сергиенко Т. И.** Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. 2004. № 1. С. 63–70.
18. **Леонтьев В. К.** Устойчивость задачи коммивояжера // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1975. Т. 15, № 5. С. 1298–1309.
19. **Сергиенко И. В., Козерацкая Л. Н., Лебедева Т. Т.** Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наукова думка, 1995.
20. **Chakravarti N., Wagelmans A. P. M.** Calculation of stability radii for combinatorial optimization problems // Oper. Res. Lett. 1998. V. 23, N 1. P. 1–7.
21. **Devyaterikova M. V., Kolokolov A. A.** Analysis of L -structure stability of convex integer programming problems // Operations Research Proceedings, Springer. 2000. P. 49–54.
22. **Emelichev V. A., Girlich E., Nikulin Yu. V., Podkopaev D. P.** Stability and regularization of vector problems of integer linear programming // Optimization. 2002. V. 51, N 4. P. 645–676.
23. **Emelichev V. A., Krichko V. N., Nikulin Yu. V.** The stability radius of an efficient solution in minimax Boolean programming problem // Control and Cybernetics. 2004. V. 33, N 1. P. 127–132.
24. **Greenberg N. J.** An annotated bibliography for post-solution analysis in mixed integer programming and combinatorial optimization // Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming and Heuristic Search. Boston, MA: Kluwer Academic Publishers, 1998. P. 97–148.
25. **Libura M.** On accuracy of solution for discrete optimization problems with perturbed coefficients of the objective function // Ann. Oper. Res. 1999. V. 86. P. 53–62.
26. **Libura M., van der Poort E. S., Sierksma G., van der Veen J. A.** Stability aspects of the traveling salesman problem based on k -best solutions // Discrete Appl. Math. 1998. V. 87, N 1–3. P. 159–185.

27. Sotskov Yu. N., Leontev V. K., Gordeev E. N. Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization // Discrete Appl. Math. 1995. V. 58, N 2. P. 169–190.

Адрес авторов:

Белорусский государственный университет,
пр. Независимости, 4,
220113, Минск, Беларусь.
E-mail: emelichev@bsu.by,
kuzminkg@mail.ru

Статья поступила

11 октября 2004 г.

Переработанный вариант —

8 сентября 2005 г.