L(2,1) РАСКРАСКА И ГАМИЛЬТОНОВО ПОПОЛНЕНИЕ

О. В. Максимович, Р. И. Тышкевич

Белорусский государственный университет
Минск, Беларусь
E-mail: aleh.maksimovich@gmail.com, tyshkevich@bsu.by

Эта статья – продолжение нашей работы [1], где задача «Инъективная L(2,1)-раскраска» интерпретируется как оптимизационная задача на множестве перестановок вершин графа. В частности последнее позволило доказать в предлагаемой статье полиномиальную эквивалентность задач «Гамильтонов цикл» и «Инъективная L(2, 1)-раскраска». Здесь также решается задача «Расстояние до трассируемого графа».

Ключевые слова: L(2,1)-раскраска, лямбда-раскраска, трассируемость, гамильтоновость, гамильтоново пополнение.

ЗАДАЧА «L(2, 1)-РАСКРАСКА»

Эта задача известна как математическая модель проблемы распределения радиочастот в ретрансляционной радиосети [2]. Данные в такой сети передаются от вышки к вышке напрямую, если они находятся в прямой радиовидимости, или по цепочке между вышками в противном случае. В задаче требуется минимизировать используемый диапазон частот, что в терминах раскрасок выражается как минимизация максимального использованного индекса краски.

Произвольную функцию $\varphi : V(G) \to \mathbf{Z}_+$ назовем *раскраской* графа G. Раскраску φ назовем L(2, 1)-*допустимой* (или просто *допустимой*), если выполнены следующие *условия допустимости*:

1. $|\varphi(v) - \varphi(u)| \geq 2$, если $v \sim u$;
2. $\varphi(v) \neq \varphi(u)$, если расстояние между вершинами v и u равно 2.

Обозначим $\Lambda(G)$ (или просто Λ, если из контекста ясно о каком графе идет речь) множество всех допустимых раскрасок графа G. Для $\varphi \in \Lambda$ положим $\max \varphi = \max \{\varphi(v) \mid v \in V(G)\}$. Допустимую раскраску $\varphi \in \Lambda$ назовем L(2,1)-*раскраской* (или просто λ-*раскраской*), если $\max \varphi \le \lambda$, $\lambda \in \mathbf{Z}_+$; λ-раскраску φ назовем *оптимальной*, если $\max \varphi = \min \{\max \psi \mid \psi \in \Lambda\}$. Ниже $L(G; 2, 1)$ (или $\lambda(G)$) – минимальное число λ, для которого существует λ-раскраска графа G.

Задача 1. Для произвольного графа найти параметр $\lambda(G)$ и оптимальную λ-раскраску вершин.

Заменив в условиях допустимости пункт 2 требованием инъективности функции φ, получим определения λ'-допустимой раскраски и всех связанных с этой раскраской понятий, введенных выше.

Задача 2. Для произвольного графа G найти параметр $\lambda'(G)$ и оптимальную λ'-раскраску.

Заметим, что для графов диаметра 2 понятия $\lambda(G)$ и $\lambda'(G)$ раскрасок совпадают.

О L(2,1)-РАСКРАСКЕ УНИГРАФОВ

Наш подход состоит в следующем. Опираясь на характеризацию унографов и теорию декомпозиции, разложить произвольный унограф на 1-неразложимые компоненты, для каждой из них найти оптимальную λ'-раскраску, «склеить» эти раскраски в оптимальную λ'-раскраску исходного унографа и переработать последнюю в оптимальную λ-раскраску. На этой базе нами получены оптимальные λ- и λ'-раскраски всех неразложимых унографов, а также ряда их композиций с произвольными оптимально раскрашенными графами.

СВЯЗЬ С ГАМИЛЬТОНОВОСТЬЮ

Между известной задачей нахождения гамильтонова пути и упомянутой выше общей задачей λ'- раскраски есть прямая связь, которая описывается следующей теоремой.

Теорема 1. В графе G порядка n существует гамильтонов путь, если и только если для дополнительного графа $\overline{G}$ верно равенство $\lambda'(\overline{G}) = n - 1$. И если это равенство верно, то следующие утверждения эквивалентны:

1. Перестановка $p = (p_1, ..., p_n)$ вершин графа $\overline{G}$ оптимальна;
2. $(p_1, ..., p_n)$ гамильтонов путь в G.

Более того, можно получить численную характеризацию близости указанного графа к графу содержащему гамильтонов путь. Такие графы также называют *трассируемыми*.

Теперь перейдем к исследованию свойства гамильтоновости. Пусть G – некоторый граф, а $u, v \in V(G)$. По аналогии с гамильтоновым пополнением граф H назовем (u, v)-*трассируемым пополнением графа* G, если $V(H) = V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ и в H существует гамильтонов (u, v)-путь. Наименьшую из величин $|E(H) \setminus E(G)|$ назовем *расстоянием от графа G до трассируемого графа* и обозначим $T(G)$.

Теорема 2. Пусть задан граф G порядка n, а для его дополнения $\overline{G}$ известна оптимальная λ'-перестановка вершин $p = (p_1, ..., p_n)$. Определим параметр $d = \lambda'(\overline{G})$– – $(n - 1)$. Тогда верны следующие утверждения.

1. $d = T(G)$.

2. Граф G можно дополнить до ближайшего трассируемого графа, вставив в него d недостающих ребер $\{e_1, e_2, ..., e_d\}$, определяемых последовательностью p.

3. Граф G содержит гамильтонов путь тогда и только тогда, когда $d = 0$, и при этом p – один из его гамильтоновых (p_1, p_n)-путей.

Пусть задан граф G. Рассмотрим новые графы G' и $G''(a, b)$. Граф G' получается добавлением к графу G новой доминирующей вершины, а $G''(a, b)$ – добавлением к G двух вершин x и y и пары ребер (x, a) и (y, b), где $a, b \in E(G)$.

Теорема 3. Верны следующие утверждения (смотри например [3]):

1. Гамильтоновость графа G эквивалентна существованию гамильтонового пути хотя бы в одном из графов $G''(a, b)$, $a, b \in E(G)$.

2. Граф G является трассируемым, если и только если граф G' гамильтонов.

Из предшествующего вытекает следующая теорема о связи λ'-раскраски и гамильтоновости:

Теорема 4.

1. Гамильтоновость графа G эквивалентна тому, что $\lambda'(\overline{G''(a,b)}) = n - 1$ хотя бы для одного ребра $a, b \in E(G)$.

2. Ближайшее гамильтоново пополнение может быть построено с точностью до одного ребра.

Упомянутое выше гамильтоново пополнение строится сначала пополнением графа до трассируемого (теорема 2), а затем, при необходимости, добавляется ребро, соединяющее конечные вершины гамильтонова пути. Понятно, что если такое ребро в графе уже есть, то построенное пополнение является кратчайшим. В противном случае минимальное пополнение можно найти только перебрав все оптимальные λ'-перестановки вершин графа $\overline{G}$. Но нам, вообще говоря, известна только одна из них.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Максимович, О.В.* Инъективная L(2, 1)-раскраска как оптимизационная задача на множестве перестановок вершин графа: доминантно-пороговые графы / О. В. Максимович, Р. И. Тышкевич // Труды Института математики НАН Беларуси. 2009. Т 17. № 1. С. 110–118.
2. *Griggs, J.R.* Labelling graphs with a condition at distance 2 / J. R. Griggs, R. K .Yeh // SIAM Journal of Discreet Mathematics. 1992. Vol. 5(4). P. 586–595.
3. *Емеличев, В.А.* Лекции по теории графов. / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И Тышкевич. М.: Наука, 1990. (2-е издание М., URSS, 2009).