

В.В.Беняш-Кривец, В.И.Черноусов

О МНОГООБРАЗИЯХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГРУППЫ БУТЫЛКИ КЛЕЙНА

(Представлено академиком И.В.Гайшуном)

Пусть $\Gamma = \langle g_1, \dots, g_m \rangle$ — конечно порожденная группа и G — связная линейная алгебраическая группа, определенная над полем K нулевой характеристики. Любому представлению $\rho : \Gamma \rightarrow G(K)$ можно поставить в соответствие набор элементов

$$(\rho(g_1), \dots, \rho(g_m)) \in G^m = G \times \dots \times G$$

Очевидно, что этот набор удовлетворяет всем определяющим соотношениям группы Γ , и поэтому соответствие $\rho \mapsto (\rho(g_1), \dots, \rho(g_m))$ в действительности задает биекцию между множеством $\text{Hom}(\Gamma, G(K))$ и K -точками некоторого аффинного K -многообразия $\mathbf{R}(\Gamma, G) \subset G^m$, называемого многообразием представлений группы Γ в группу G . В случае когда $G = \mathbf{GL}_n$, многообразие $\mathbf{R}(\Gamma, G)$ обычно обозначается через $\mathbf{R}_n(\Gamma)$ и называется многообразием n -мерных представлений группы Γ (см., например, [1]).

Цель настоящей статьи — описать многообразие n -мерных представлений фундаментальной группы бутылки Клейна. Как известно, эту группу можно задать в виде $\Gamma = \langle g_1, g_2 \mid g_1^2 = g_2^2 \rangle$ и поэтому исследуемое многообразие совпадает с множеством

$$\mathbf{R}_n(\Gamma) = \{(X, Y) \in \mathbf{GL}_n \times \mathbf{GL}_n \mid X^2 = Y^2\}$$

Для формулировки основных результатов нам понадобятся следующие обозначения. Для любых двух целых чисел s и t таких, что $0 \leq s \leq n/2$, $0 \leq t \leq n - 2s$, обозначим через $\varphi_{s,t}$ K -определенный рациональный морфизм

$$\varphi_{s,t} : \mathbf{A}^s \times \mathbf{A}^{n-2s} \times (\mathbf{GL}_2)^s \times \mathbf{GL}_n \rightarrow \mathbf{GL}_n \times \mathbf{GL}_n,$$

переводящий точку $(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}, Z_1, \dots, Z_s, A)$ в точку (X, Y) , где $a_i, b_i \in \overline{K}^*$, $Z_i \in \mathbf{GL}_2(\overline{K})$, $A \in \mathbf{GL}_n(\overline{K})$ и

$$X = A \operatorname{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}) A^{-1},$$

$$Y = A \operatorname{diag}(Z_1 \operatorname{diag}(a_1, -a_1) Z_1^{-1}, \dots, Z_s \operatorname{diag}(a_s, -a_s) Z_s^{-1}, \\ -b_1, \dots, -b_t, b_{t+1}, \dots, b_{n-2s}) A^{-1}.$$

Легко проверить, что для указанных выше матриц X, Y выполняется соотношение $X^2 = Y^2$ и, следовательно, $\operatorname{Im} \varphi_{s,t} \subset \mathbf{R}_n(\Gamma)$. Обозначим также через $V_{s,t}$ замыкание $\operatorname{Im} \varphi_{s,t}$ в топологии Зарисского.

Теорема 1. *Многообразия $V_{s,t}$ являются в точности различными неприводимыми компонентами многообразия $\mathbf{R}_n(\Gamma)$, при этом $\dim V_{s,t} = n^2 + s$.*

Следствие. Число неприводимых компонент многообразия $\mathbf{R}_n(\Gamma)$ равно $(n+2)^2/4$, если n -четно, и $(n+1)(n+3)/4$, если n -нечетно.

Теорема 2. Все компоненты многообразия $\mathbf{R}_n(\Gamma)$ являются $\mathbf{Q}$ -рациональными многообразиями.

Хорошо известно, что бутылка Клейна является компактной неориентируемой поверхностью рода 2. В случае же перехода к произвольному роду g ситуация значительно усложняется, и вопрос об описании многообразий $\mathbf{R}_n(\Gamma_g)$ для фундаментальных групп Γ_g неориентируемых компактных поверхностей рода g в настоящее время остается открытым. Отметим также, что для фундаментальных групп Γ_g компактных ориентируемых поверхностей рода g строение многообразия $\mathbf{R}_n(\Gamma_g)$ известно; а именно, в [2], [3] показано, что $\mathbf{R}_n(\Gamma_g)$ является (абсолютно) неприводимым $\mathbf{Q}$ -рациональным многообразием размерности $n^2 + n$, если $g = 1$, и $(2g - 1)n^2 + 1$, если $g \geq 2$.

Основная часть доказательства теоремы 1 сосредоточена в следующем утверждении.

Предложение 1. Любая неприводимая компонента V многообразия $\mathbf{R}_n(\Gamma)$ содержит непустое открытое подмножество U такое, что для всех $(X, Y) \in U$ матрицы X, Y являются регулярными полупростыми.

Доказательство. Достаточно установить, что V содержит хотя бы одну точку (X, Y) с регулярными полупростыми X, Y . Рассмотрим элемент $(X_0, Y_0) \in V$, не лежащий ни в какой другой компоненте $\mathbf{R}_n(\Gamma)$. Непосредственно проверяется, что для любой матрицы $Z \in W = Z_{\mathbf{GL}_n}(X_0^{-1}Y_0)$ точка $(X_0Z, Y_0Z) \in \mathbf{R}_n(\Gamma)$ и поэтому неприводимое множество $U = \{(X_0Z, Y_0Z) \mid Z \in W\} \subset V$. Согласно предложению 1 из [3], множества $U_1 = \{(X, Y) \in U \mid X \text{ - регулярен}\}$, $U_2 = \{(X, Y) \in U \mid Y \text{ - регулярен}\}$ непусты и, следовательно, $U_3 = U_1 \cap U_2$ также непусто. Тем самым, без ограничения общности можем считать, что X_0 и Y_0 — регулярные элементы.

Кроме того, так как V устойчиво относительно сопряжения, можно дополнительно считать, что

$$X_0 = \text{diag} (J_{r_1}(a_1), -J_{s_1}(a_1), \dots, J_{r_k}(a_k), -J_{s_k}(a_k)) ,$$

где $J_{r_i}(a_i)$ — блок Жордана размерности r_i , $a_i^2 \neq a_j^2$ при $i \neq j$ и $r_i \geq s_i \geq 0$ для всех i .

Очевидно, что при возведении матрицы в квадрат структура ее жордановой нормальной формы (т.е. размер и число блоков Жордана) не меняется, откуда с учетом равенства $X_0^2 = Y_0^2$ и регулярности Y_0 заключаем, что Y_0 сопряжена с матрицей

$$\tilde{Y}_0 = \text{diag} (\varepsilon_1 J_{r_1}(a_1), -\varepsilon_1 J_{s_1}(a_1), \dots, \varepsilon_k J_{r_k}(a_k), -\varepsilon_k J_{s_k}(a_k)) ,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Если все числа r_i, s_i равны 1, то (X_0, Y_0) — искомая точка. В противном случае очевидное индуктивное рассуждение редуцирует доказательство к случаю $k = 1$, т.е. когда $X_0 = \text{diag} (J_r(a), -J_s(a))$, $r \geq s \geq 0$, $Y_0 = \text{diag} (\varepsilon J_r(a), -\varepsilon J_s(a)) = \Omega X_0$, где $\Omega = \text{diag} (\underbrace{\varepsilon, \dots, \varepsilon}_r, \underbrace{-\varepsilon, \dots, -\varepsilon}_s)$

Рассмотрим множество $T = \{X \text{diag} (A, B)X^{-1} \mid X \in \mathbf{GL}_n\}$, где матрицы A, B определяются следующим образом : для произвольных чисел $a_i \in \overline{K}^*$, $1 \leq i \leq r$,

таких что $a_i^2 \neq a_j^2$ положим

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_r \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & -1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_s \end{pmatrix}.$$

Ясно, что T - неприводимое множество, состоящее из полупростых элементов, и его замыкание $\bar{T}$ содержит X_0 . Несложно проверить также, что для $X \in T$

$$\dim Z_{\mathbf{GL}_n}(X^2) = \dim Z_{\mathbf{GL}_n}(X_0^2) = n + 2s$$

Поэтому множество $\tilde{T} = \{X \in \bar{T} \mid \dim Z_{\mathbf{GL}_n}(X^2) = n + 2s\}$ содержит X_0 , открыто в T , а значит и неприводимо.

Рассмотрим многообразие $F = \{(X, Z) \in \tilde{T} \times \mathbf{GL}_n \mid X^2 Z = Z X^2\}$ и морфизм $\varphi : F \rightarrow \mathbf{R}_n(\Gamma)$, $(X, Z) \mapsto (X, Z \Omega X Z^{-1})$. Также, как и при доказательстве леммы 3 в [3], показывается, что многообразие F , а значит и образ $\varphi(F)$, является неприводимым. Т.к. по построению $(X_0, Y_0) \in \varphi(F)$, то $\text{Im } \varphi \subset V$, и тем самым V содержит хотя бы одну точку (X, Y) с регулярными полупростыми X, Y , что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 1. Выше фактически было установлено, что $\mathbf{R}_n(\Gamma) = \bigcup_{s,t} V_{s,t}$. Несложный подсчет показывает также, что для точки общего положения

$$(X, Y) \in V_{s,t} \text{ размерность слоя } \dim \varphi_{s,t}^{-1}(X, Y) = n + 2s, \text{ откуда } \dim V_{s,t} = [s + (n - 2s) + 4s + n^2] - (n + 2s) = n^2 + s.$$

Осталось убедиться в том, что многообразия $V_{s,t}$ и V_{s_1,t_1} не могут совпадать и не могут содержаться друг в друге. Если $s = s_1$, то $\dim V_{s,t} = \dim V_{s_1,t_1}$. Предположим, что $V_{s,t} = V_{s_1,t_1}$ и пусть $\tilde{U} = \{(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}) \in \mathbf{A}^s \times \mathbf{A}^{n-2s} \mid a_i^2 \neq a_j^2 \text{ при } i \neq j, b_k \neq b_l \text{ при } k \neq l, a_i^2 \neq b_k^2 \text{ для всех } i, k\}$, $U = \varphi_{s,t}(\tilde{U} \times (\mathbf{GL}_2)^s \times \mathbf{GL}_n)$, $U_1 = \varphi_{s_1,t_1}(\tilde{U} \times (\mathbf{GL}_2)^s \times \mathbf{GL}_n)$. Поскольку U плотно в $V_{s,t}$, а U_1 — в V_{s_1,t_1} , достаточно показать, что $U \cap U_1 = \emptyset$, ибо последнее противоречит равенству $V_{s,t} = V_{s_1,t_1}$. Пусть $(X, Y) \in U \cap U_1$. Тогда у матриц X, Y , с одной стороны, в точности $s + t$ общих собственных значений, а с другой стороны — $s + t_1$, что невозможно при $t \neq t_1$.

Пусть теперь $s_1 > s_2$. Тогда $\dim V_{s_1,t_1} = n^2 + s_1 > \dim V_{s_2,t_2} = n^2 + s_2^2$. Если бы $V_{s_2,t_2} \subset V_{s_1,t_1}$, то при проекции на первую координату имели бы также включение $\text{pr}_X(V_{s_2,t_2}) \subset \text{pr}_X(V_{s_1,t_1})$, что невозможно, ибо $\dim \text{pr}_X(V_{s_2,t_2}) = n^2 - s_2 > \dim \text{pr}_X(V_{s_1,t_1}) = n^2 - s_1$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Обозначим через W $(n^2 + s)$ -мерное подмногообразие в $\mathbf{A}^s \times \mathbf{A}^{n-2s} \times \mathbf{GL}_2^s \times \mathbf{GL}_n$, состоящее из таких элементов

$$(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}, Z_1, \dots, Z_s, A),$$

$$\text{что } a_i, b_i \in \overline{K}^*, Z_i = \begin{pmatrix} u_i & 1 \\ 1 & v_i \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и покажем вначале, что}$$

морфизм ограничения $\varphi_{s,t}|_W$ является конечнолистным. Действительно, пусть $w =$

$(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}, Z_1, \dots, Z_s, A)$, где

$$Z_i = \begin{pmatrix} u_i & 1 \\ 1 & v_i \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \dots$$

точка общего положения, и предположим, что найдется еще одна точка $\tilde{w} \in W$ такая, что $\varphi_{s,t}(w) = \varphi_{s,t}(\tilde{w})$. Пусть $\tilde{w} = (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_s, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-2s}, \tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_s, \tilde{A})$, где

$$\tilde{Z}_i = \begin{pmatrix} \tilde{u}_i & 1 \\ 1 & \tilde{v}_i \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \tilde{a}_{21} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда справедливы следующие два равенства:

$$\begin{aligned} A \operatorname{diag} (a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}) A^{-1} &= \\ \tilde{A} \operatorname{diag} (\tilde{a}_1, -\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_s, -\tilde{a}_s, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-2s}) \tilde{A}^{-1} & \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} A \operatorname{diag} (Z_1 \operatorname{diag}(a_1, -a_1) Z_1^{-1}, \dots, Z_s \operatorname{diag}(a_s, -a_s) Z_s^{-1}, \\ -b_1, \dots, -b_t, b_{t+1}, \dots, b_{n-2s}) A^{-1} &= \\ \tilde{A} \operatorname{diag} (\tilde{Z}_1 \operatorname{diag}(\tilde{a}_1, -\tilde{a}_1) \tilde{Z}_1^{-1}, \dots, \tilde{Z}_s \operatorname{diag}(\tilde{a}_s, -\tilde{a}_s) \tilde{Z}_s^{-1}, \\ -\tilde{b}_1, \dots, -\tilde{b}_t, \tilde{b}_{t+1}, \dots, \tilde{b}_{n-2s}) \tilde{A}^{-1} & \end{aligned} \quad (2)$$

Из (1) вытекает, что

$$\{\pm a_1, \dots, \pm a_s\} = \{\pm \tilde{a}_1, \dots, \pm \tilde{a}_s\}, \quad \{b_1, \dots, b_{n-2s}\} = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_{n-2s}\}$$

и кроме того, $A^{-1} \tilde{A} = \omega d$, где d — диагональная матрица, а ω — блочно диагональная матрица вида $\omega = \operatorname{diag} (\omega_1, \omega_2)$ и ω_1, ω_2 — мономиальные матрицы размерностей соответственно $2s$ и $n - 2s$. Сравнивая первые строки в равенстве $\tilde{A} = A\omega d$, делаем вывод, что $d = 1$, и тем самым матрицы $A, \tilde{A}$ отличаются друг от друга перестановками столбцов.

Нам осталось доказать, что для матриц $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_s$ также существует лишь конечное число возможностей. С этой целью подставим равенство $\tilde{A} = A\omega$ в (2) и рассмотрим левый верхний угол размерности $2s$. После избавления от A имеем:

$$\begin{aligned} Z \operatorname{diag}(a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s) Z^{-1} &= \\ \tilde{Z} \operatorname{diag}(\tilde{a}_1, -\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_s, -\tilde{a}_s) \tilde{Z}^{-1} & \end{aligned} \quad (3)$$

где $Z = \operatorname{diag} (Z_1, \dots, Z_s)$, $\tilde{Z} = \operatorname{diag} (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_s)$. Так как

$$\omega_1 \operatorname{diag} (\tilde{a}_1, -\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_s, -\tilde{a}_s) \omega_1^{-1} = \operatorname{diag} (a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s)$$

то из (3) получаем равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{diag} (a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s) &= \\ (Z^{-1} \omega_1 \tilde{Z} \omega_1^{-1}) \operatorname{diag} (a_1, -a_1, \dots, a_s, -a_s) (Z^{-1} \omega_1 \tilde{Z} \omega_1^{-1})^{-1} & \end{aligned}$$

откуда $Z^{-1}\omega_1\tilde{Z}\omega_1^{-1}$ — диагональная матрица. Обозначая её через t , имеем $\omega_1\tilde{Z}\omega_1^{-1} = Zt$. Ясно, что сопряжение при помощи ω_1 переставляет блоки матрицы $\tilde{Z}$. Поэтому обязательно $t = 1$, а значит $\varphi_{s,t}|_W$ — конечнолистный морфизм.

Отождествим сейчас поле K -рациональных функций $K(V_{s,t})$ с подполем $(\varphi_{s,t}|_W)^*(K(V_{s,t}))$ поля $K(W)$. Анализ предыдущего рассуждения показывает, что последнее подполе совпадает с полем инвариантов $K(W)^G$ конечной группы $G = \text{Sym}_s \times$

$\text{Sym}_t \times \text{Sym}_{n-2s-t} \times \prod_{i=1}^s H_i$, где H_i — группы второго порядка, а действие G на $K(W)$

задается следующим образом. Пусть $K(W) = K(a_1, \dots, a_s, b_1, \dots, b_{n-2s}, a_{21}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{nn}, u_1, \dots, u_s, v_1, \dots, v_s)$, где $a_i, b_i, a_{ij}, u_i, v_i$ — алгебраически независимые над K переменные. Тогда группа Sym_s переставляет столбцы в матрицах

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_s \\ a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2\ 2s-1} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{n\ 2s-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_s \\ a_{22} & a_{24} & \dots & a_{2\ 2s} \\ & & \dots & \\ a_{n2} & a_{n4} & \dots & a_{n\ 2s} \end{pmatrix}$$

и элементы в множестве $\{a_1, \dots, a_s\}$; группы $\text{Sym}_t, \text{Sym}_{n-2s-t}$ переставляют соответственно столбцы в матрицах

$$\begin{pmatrix} a_{2\ 2s+1} & \dots & a_{2\ 2s+t} \\ & \dots & \\ a_{n\ 2s+1} & \dots & a_{n\ 2s+t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{2\ 2s+t+1} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \\ a_{n\ 2s+t+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

и элементы в множествах $\{b_1, \dots, b_t\}, \{b_{t+1}, \dots, b_{n-2s}\}$. Образующий σ_i группы H_i ($\sigma_i^2 = 1$) переводит элементы $a_i, u_i, v_i, a_{k2i-1}, a_{k2i}$ соответственно в $-a_i, v_i, u_i, a_{k2i}, a_{k2i-1}$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ и действует неподвижно на остальных переменных.

Завершает доказательство теоремы 2

Предложение 2. *Поле $K(W)^G$ является чисто трансцендентным расширением K .*

Доказательство предложения 2 осуществляется явным построением базиса трансцендентности поля $K(W)^G$ и из-за ограничения объема статьи будет опущено.

Следствие. *Если $K = \mathbf{C}$, то $|\pi_0(\mathbf{R}_2(\Gamma))| = 2$, а именно $W_1 = \bigcup_{t-\text{четно}} V_{s,t}$ и $W_2 =$*

$\bigcup_{t-\text{нечетно}} V_{s,t}$ — связанные непересекающиеся множества.

Исследования профинансированы Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь и Международным научным фондом Дж. Сороса (грант MWQ000).

Литература

1. Lubotzky A., Magid A. // Memoirs AMS. 1985. V. 58, N. 336. p. 1–116.
2. Рапичук А.С., Беняш-Кривец В.В. // Докл. РАН. 1993. Т. 329, N 2. С. 140–143.
3. Rapinchuk A.C., Benyash-Krivetz V.V., Chernousov V.I. // Israel J. Math. 1995.

УДК 512.547 + 512.552

Беняш-Кривец В. В. , Черноусов В. И. О многообразиях представлений фундаментальной группы бутылки Клейна. // Доклады Академии наук Беларуси.

Пусть Γ — фундаментальная группа бутылки Клейна. В работе устанавливается число неприводимых компонент многообразия $\mathbf{R}_n(\Gamma)$ n -мерных представлений группы Γ . Доказывается, что все неприводимые компоненты являются $\mathbf{Q}$ -рациональными многообразиями.

Библиогр. — 3 назв.

Summary

Для фундаментальной группы Γ компактной неориентируемой поверхности рода $g = 2$ описана структура многообразия представлений Γ в $\mathbf{GL}_n$.

For the fundamental group Γ of the compact non-orientable surface of genus $g = 2$ the structure of representation varieties of Γ into $\mathbf{GL}_n$ is described.

Benyash-Krivetz V.V., Chernousov V.I.

On Representation Varieties of the fundamental Group of Klein's Bottle.