УДК 515.124.62+515.125

**С. М. Агеев**

# Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. II. Теорема о незаузленности

Доказано, что пространство Небелинга незаузленно относительно $Z$-множеств. Установлены теоремы о существовании, улучшении и сжатии совершенных резольвент.

Библиография: 11 названий.

В первой части работы (см. [1]) на основе построенной аксиоматики пространств Небелинга была решена проблема улучшения связности разбиений. В настоящей статье мы развиваем этот аксиоматический подход и устанавливаем в первой главе два основополагающих факта теории пространств Небелинга: теорему о незаузленности и теорему о сжатии совершенных резольвент. Во второй главе на основании доказанной теоремы о незаузленности излагается теорема о существовании совершенной резольвенты, а также процедура улучшения резольвент. Тем самым для завершения доказательства характеризационной теоремы пространств Небелинга [1; гипотеза 1.2] остается установить непротиворечивость системы аксиом пространств Небелинга. Третья глава частично решает эту задачу: справедливость постулата Бествины и постулата о гомеоморфизме сводится к непротиворечивости системы аксиом пространств Небелинга.

## § 1. Предварительные сведения и факты

В настоящей работе мы продолжаем использовать понятия и обозначения, принятые ранее [1]. В частности, все пространства (отображения), если они не возникают в результате некоторых построений, предполагаются сепарабельными метрическими (непрерывными).

**1.1.** $\mathrm{UV}^{k-1}$**-тест.** Приведем конечномерный вариант $\mathrm{ANE}_Y$-теста, обсуждавшегося в первой части работы. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $Y \in \mathrm{ANE}(k)$. Будем говорить, что *пара покрытий* $\delta, \varepsilon \in \operatorname{cov} Y$ *удовлетворяет* $\mathrm{ANE}_Y(k)$*-тесту*, если $\delta^2 \prec \varepsilon$ и для любого замкнутого подпространства $A \subset W$, $\dim W \leqslant k$, а также для любых отображений $\widehat{\alpha}\colon W \to Y$ и $\beta\colon A \to Y$ с условием $\operatorname{dist}(\widehat{\alpha}\restriction_A, \beta) \prec \delta$ существует продолжение $\widehat{\beta}\colon W \to Y$, $\widehat{\beta}\restriction_A = \beta$, с условием $\operatorname{dist}(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}) \prec \varepsilon$. Будем говорить, что *пара покрытий* $\delta \prec \varepsilon$ *удовлетворяет* $s$*-кратному* $\mathrm{ANE}_Y(k)$*-тесту*, $s \in \mathbb{N}$, если существует такая последовательность покрытий $\delta = \delta_0 \prec \delta_1 \prec \dots \prec \delta_s = \varepsilon$, что каждая соседняя пара покрытий удовлетворяет $\mathrm{ANE}_Y(k)$-тесту. Определение того, что *пара чисел* $0 < \delta < \varepsilon$ *удовлетворяет* $\mathrm{ANE}_Y(k)$*-тесту*, дается аналогично.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS (грант № 96-0712) и гранта Министерства образования Республики Беларусь. Автор также признателен за поддержку, оказанную NSERC № OGP 005616 во время визита в Университет Саскачеван.

Справедлив аналог утверждения, гарантирующего существование большого количества пар чисел, удовлетворяющих $\mathrm{ANE}_Y(k)$-тесту.

Теорема 1.1. *Для любого* $\mathrm{ANE}(k)$*-пространства* $(Y,\varrho)$ *и для любого* $c\in\operatorname{cov}Y$ *существует метрика* $d\geqslant\varrho$*, совместимая с топологией на* $Y$*, такая, что* $\{\mathrm{N}_d(y;1)\mid y\in Y\}\prec c$*, а если* $0<9\delta<\varepsilon<1$*, то* $\delta<\varepsilon$ *удовлетворяет* $\mathrm{ANE}_Y(k)$*-тесту.*

Из теоремы Дугунджи–Майкла о метриках [2; гл. 6] несложно вывести следующий факт об $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображении $f\colon X\to Y$ полных $\mathrm{ANE}(k)$-пространств.

Предложение 1.2. *Для любых покрытий* $\bar s_X\in\operatorname{cov}X$ *и* $\bar c_Y\in\operatorname{cov}Y$ *существуют метрика* $\rho(x,x')$*, совместимая с топологией на* $X$*, и метрика* $d(y,y')$*, совместимая с топологией на* $Y$*, такие, что*

(a) $\{\mathrm{N}_\rho(x;1)\mid x\in X\}\prec\bar s_X$ *и* $\{\mathrm{N}_d(y;1)\mid y\in Y\}\prec\bar c_Y$;

(b) *если* $0<9\delta<\varepsilon<1$*, то пара чисел* $\delta<\varepsilon$ *удовлетворяет* $\mathrm{ANE}_X(k)$*- и* $\mathrm{ANE}_Y(k)$*-тестам, а также для любого замкнутого подпространства* $A$ *метрического пространства* $W$, $\dim W\leqslant k$*, и для любых отображений* $\widehat\alpha\colon W\to X$ *и* $\beta\colon A\to X$ *с условием* $\operatorname{dist}(f\circ\widehat\alpha\restriction_A,f\circ\beta)<\delta$ *существует продолжение* $\widehat\beta\colon W\to X$, $\widehat\beta\restriction_A=\beta$*, с условием* $\operatorname{dist}(f\circ\widehat\alpha,f\circ\widehat\beta\,)<\varepsilon$.

Будем в этом случае для краткости говорить, что метрики $\rho(x,x')$ и $d(y,y')$ удовлетворяют $\mathrm{UV}^{k-1}$-тесту относительно $\{f\colon X\to Y;\ \bar s_X,\bar c_Y\}$.

Если $\widehat{\mathscr Q}$ есть разбиение $X$, а $A\subset X$, то через $\mathscr N_A\subset\mathscr N\langle\widehat{\mathscr Q}\rangle$ мы обозначаем нерв разбиения $\widehat{\mathscr Q}_A\rightleftharpoons\{\widehat q\in\widehat{\mathscr Q}\mid\widehat q\cap A\neq\varnothing\}$ окрестности $\mathrm N(A;\widehat{\mathscr Q})$. Если $\sigma\in\operatorname{cov}X$, то $\mathscr N_\sigma=\{\mathscr N_U\mid U\in\sigma\}$ есть замкнутое полиэдральное покрытие $\mathscr N\langle\widehat{\mathscr Q}\rangle$. Напомним некоторые соотношения между образами и прообразами канонического отображения $\widehat\upsilon\colon X\to\mathscr N\langle\widehat{\mathscr Q}\rangle$.

Лемма 1.3. *Для любых* $A,B\subset X$ *и* $\sigma\in\operatorname{cov}X$ *справедливо*:

($\alpha$) *если* $\widehat\upsilon(A)\subset\mathscr N_U$, $U\in\sigma$*, то* $A\subset\mathrm N(U;\widehat{\mathscr Q}\,)$;

($\beta$) *если* $\widehat\upsilon(B)\subset\mathrm N(\widehat\upsilon(A);\mathscr N_\sigma)$*, то* $B\subset\mathrm N(A;\widehat{\mathscr Q}^2\circ\sigma\circ\widehat{\mathscr Q}\,)$;

($\gamma$) *если* $\sigma,\theta\in\operatorname{cov}X$*, то* $\mathscr N_\sigma\circ\mathscr N_\theta\prec\mathscr N_{\sigma\circ\widehat{\mathscr Q}\circ\theta}$;

($\delta$) $\widehat\upsilon(A)\subset\mathrm N(\mathscr N_A;\mathscr N_{\widehat{\mathscr Q}})$ *и* $\mathscr N_A\subset\mathrm N(\widehat\upsilon(A);\mathscr N_{\widehat{\mathscr Q}})$.

Из ($\delta$) и ($\beta$) легко следует

Лемма 1.4. *Если* $f,g\colon W\to X$ *являются* $\delta$*-близкими, то* $\operatorname{dist}(\widehat\upsilon\circ f,\widehat\upsilon\circ g)\prec\mathscr N_\delta\circ\mathscr N_{\widehat{\mathscr Q}}$*. Обратно, если* $\operatorname{dist}(\widehat\upsilon\circ f,\widehat\upsilon\circ g)\prec\mathscr N_\delta$*, то* $\operatorname{dist}(f,g)\prec\delta\circ\widehat{\mathscr Q}^2\circ\delta\circ\widehat{\mathscr Q}$.

В первой части работы [1; теорема 10.1] было доказано, что каноническое отображение $\widehat\upsilon$ является $k$-эквивалентностью относительно $\mathscr N_{\widehat{\mathscr Q}}$, если $\widehat{\mathscr Q}$ есть $k$-разбиение $X$. Отсюда и из леммы 1.4 непосредственно следует важный результат о выполнимости $\mathrm{ANE}(k)$-тестов в нервах разбиений:

Теорема 1.5. *Пусть* $X\cong\nu^k$*, и пусть* $\delta,\varepsilon\in\operatorname{cov}X$ *таковы, что пара* $\delta\prec\varepsilon$ *удовлетворяет* 8*-кратному* $\mathrm{ANE}_X(k)$*-тесту. Если* $\widehat{\mathscr Q}\prec\delta$ *есть* $k$*-разбиение* $X$*, то пара покрытий* $\mathscr N_\delta\prec\mathscr N_\varepsilon$ *удовлетворяет* $\mathrm{ANE}_{\mathscr N_{\widehat{\mathscr Q}}}(k)$*-тесту.*

**1.2. Сжимающий критерий Бинга.** Пусть $(X, d_X)$ и $(Y, d_Y)$ – два полных гомеоморфных пространства ограниченных диаметров. Множество $\mathscr{H}(X,Y)$ всех гомеоморфизмов естественно изучать в одной из следующих топологий:

(1) топология, порожденная sup-метрикой

$$\rho_s(f,g) = \sup\bigl\{\mathrm{dist}(f(x), g(x)) \mid x \in X\bigr\};$$

(2) "limitation"-топология, в которой базис точки $f \in \mathscr{H}(X,Y)$ образуют множества $\mathscr{V}_\varepsilon$ вида

$$\bigl\{g \in \mathscr{H}(X,Y) \mid \mathrm{dist}(g(x), f(x)) < \varepsilon(f(x))\bigr\}, \qquad \varepsilon \in C(Y, \mathbb{R}^+),$$

или, что эквивалентно, множества $\mathscr{W}_{c_Y}$ вида

$$\bigl\{g \in \mathscr{H}(X,Y) \mid \mathrm{dist}(g,f) \prec c_Y\bigr\}, \qquad c_Y \in \operatorname{cov} Y$$

(здесь $C(Y,\mathbb{R}^+)$ – пространство всех положительных непрерывных функций);

(3) топология, порожденная гомеоморфной метрикой

$$\rho_h(f,g) = \max\bigl\{\rho_s(f,g), \rho_s(f^{-1}, g^{-1})\bigr\}.$$

Для компактных пространств все три топологии эквивалентны, причем метрика $\rho_h$ является полной, а равномерный предел гомеоморфизмов, вообще говоря, гомеоморфизмом не является. В некомпактном случае "limitation"-топология неметризуема, а $\rho_h$ не является полной метрикой. Однако $\mathscr{H}(X,Y)$ с "limitation"-топологией обладает свойством Бэра (т.е. счетное пересечение открытых плотных подмножеств является плотным), что легко следует из того, что оно является пространством Choquet.

Определение 1.6. Топологическое пространство $X$ называется *пространством Choquet*, если для любой точки $x_1 \in X$ и любой ее окрестности $\mathscr{O}(x_1)$ можно индуктивно построить сколь угодно малую окрестность $\mathscr{O}(x_i) \Subset \mathscr{O}(x_{i-1})$ произвольной точки $x_i \in \mathscr{O}(x_{i-1})$, $i = 2, 3, \dots$, так, чтобы $\bigcap\{\mathscr{O}(x_i) \mid 1 \leqslant i < \infty\}$ было одноточечно.

То, что $\mathscr{H}(X,Y)$ с "limitation"-топологией является пространством Choquet, доказывается аналогично [3]. Отметим также, что пространство совершенных $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений из $X \in \mathrm{ANE}(k)$ в $Y$ с "limitation"-топологией тоже является пространством Choquet.

Обычно рассматривают более просто устроенные расширения $\mathscr{H}(X,Y)$, замкнутые относительно равномерной сходимости (если $X$ и $Y$ компактны) и относительно "limitation"-сходимости (если $X$ и $Y$ не компактны). Минимально возможным таким расширением является класс почти гомеоморфизмов.

Определение 1.7. Совершенное отображение $f\colon X \to Y$ называется (*сильным*) *почти гомеоморфизмом*, если для любого $c_Y \in \operatorname{cov} Y$ (а также для любой окрестности $\mathscr{U}$, $\mathrm{Cl}(\mathscr{N}_f) \subset \mathscr{U} \subset Y$) найдется такой гомеоморфизм $f'\colon X \to Y$, что $\mathrm{dist}(f, f') \prec c_Y$ (а также $f' = f$ вне $\mathscr{U}^\bullet \rightleftharpoons f^{-1}(\mathscr{U})$).[1]

[1] Точка $y \in Y$ называется *сингулярным значением* совершенного отображения $f\colon X \to Y$, если $|f^{-1}(y)| > 1$. Множество всех сингулярных значений отображения $f$ обозначается через $\mathscr{N}_f \subset Y$.

Скажем, что совершенное отображение $f\colon X \to Y$ *допускает* (*сильное*) *сжатие*, если для любых $c_X \in \operatorname{cov} X$ и $c_Y \in \operatorname{cov} Y$ (а также для любой окрестности $\mathscr{U}$, $\mathrm{Cl}(\mathscr{N}_f) \subset \mathscr{U} \subset Y$) существует гомеоморфизм $h\colon X \to X$, $c_Y$-близкий к $f$, такой, что $f \circ h$ есть $c_X$-*отображение*[2] (а также $h = \mathrm{Id}$ вне $\mathscr{U}^\bullet$).

Почти гомеоморфизмы характеризуются как отображения, *допускающие сжатие.*

Теорема 1.8 (сжимающий критерий Бинга). *Для совершенных отображений полных пространств свойства допускать* (*сильное*) *сжатие и быть* (*сильным*) *почти гомеоморфизмом эквивалентны.*

Множеством *сингулярных точек* $\mathscr{H}_f \subset X$ называется прообраз $f^{-1}(\mathscr{N}_f)$ сингулярных значений. Его дискриптивный тип есть $F_\sigma$, что легко следует из приводимого ниже утверждения.

Лемма 1.9. *Если $f\colon X \to Y$ совершенно, то для любого $\varepsilon > 0$ множество $\mathscr{N}_f(\varepsilon) \rightleftharpoons \bigl\{y \in Y \mid \operatorname{diam} f^{-1}(y) \geqslant \varepsilon\bigr\} \subset \mathscr{N}_f$ замкнуто в $Y$.*

Изучим теперь взаимоотношение между сингулярными значениями предельного $g\colon X \to Y$ и допредельных $\{f_n\colon X \to Y\}$ совершенных отображений.

Теорема 1.10. *Пусть $\{f_n\colon X \to Y\}$ равномерно сходится к $g\colon X \to Y$, а $A \subset Y$ есть компакт. Тогда $A \cap \mathscr{N}_g = \varnothing$ в случае, если*

(4) *$A$ не пересекается с сингулярными значениями $\mathscr{N}_{f_n} \subset Y$ для всех $n$;*
(5) $\operatorname{dist}(f_n, f_{n+1}) < \delta_n$, *где* $0 < 2\delta_n < \delta_{n-1}$, *и* $\operatorname{diam} f_n^{-1}(\mathrm{N}(a; 3\delta_n)) < 2^{-n}$ *для всех $a \in A$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть существуют $a \in A$ и $x_1, x_2 \in g^{-1}(a)$, $\operatorname{dist}(x_1, x_2) \geqslant 2^{-n_0}$. В силу выбора $\delta_{n_0} > 0$ для одной из точек $f_{n_0}(x_i)$ (например, $f_{n_0}(x_1)$) имеем $\operatorname{dist}(a, f_{n_0}(x_1)) \geqslant 3\delta_{n_0}$. Так как $\operatorname{dist}(g, f_{n_0}) < \delta_{n_0} + \delta_{n_0+1} + \dots \leqslant 2\delta_{n_0}$, то $\operatorname{dist}(a, g(x_1)) \geqslant \operatorname{dist}(a, f_{n_0}(x_1)) - \operatorname{dist}(f_{n_0}(x_1), g(x_1)) > 0$ – противоречие с $g(x_i) = a$.

### 1.3. Универсальные пространства.

Определение 1.11. Польское пространство $X$ будем называть *сильно $k$-универсальным польским* пространством, если любое отображение $\varphi\colon Z \to X$ из польского пространства $Z$, $\dim Z \leqslant k$, сколь угодно близко аппроксимируется замкнутым вложением.

Определение 1.12. Пусть $D^k$ есть $k$-мерный диск, а $D$ – их счетное дискретное объединение $\bigsqcup\{(D^k)_i \mid 1 \leqslant i < \infty\}$. Пространство $X$ называется *дискретно* (*локально конечно*) *$D^k$-аппроксимируемым*, если любое отображение $\varphi\colon D \to X$ сколь угодно близко аппроксимируется отображением $\widetilde{\varphi}\colon D \to X$, для которого семейство $\{\widetilde{\varphi}((D^k)_i) \mid 1 \leqslant i < \infty\}$ дискретно (локально конечно).

Для любого пространства понятия дискретной и локально конечной $D^k$-аппроксимируемости эквивалентны [4]; для польских $\mathrm{ANE}(k)$-пространств свойства сильной $k$-универсальности и дискретной $D^k$-аппроксимируемости эквивалентны [5; с. 127].

Определение 1.13. Замкнутое множество $F$ пространства $X$ называется

(a) *$Z_k$-множеством*, $0 \leqslant k < \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого отображения $\varphi\colon D^k \to X$ $k$-диска существует отображение $\widetilde{\varphi}\colon D^k \to X \setminus F$, $\varepsilon$-близкое к $\varphi$;

[2] То есть $h(f^{-1}(y)) \prec c_X$ для всех $y \in Y$.

(b) *$Z$-множеством*, если для любого покрытия $\omega \in \operatorname{cov} X$ существует отображение $f\colon X \to X \setminus F$, $\omega$-близкое к Id;

(c) *сильным $Z$-множеством*, если для любого покрытия $\omega \in \operatorname{cov} X$ существуют окрестность $U$, $F \subset U$, и отображение $f\colon X \to X \setminus U$, $\omega$-близкое к Id.

Известно [5], что в $k$-мерном польском сильно $k$-универсальном ANE($k$)-пространстве $X$ понятия $Z_k$-, $Z$- и сильного $Z$-множества совпадают. Теперь изучим возможность "конструктивного" описания $Z$-множеств.

Определение 1.14. Счетное дизъюнктное объединение $\bigsqcup F_i \subset X$ компактных подмножеств $F_i$ называется *$Z_k$-детектором в $X$*, если любое замкнутое подмножество $F \subset X$, не пересекающееся почти со всеми $F_i$, является $Z_k$-множеством.

Аналогично определяется $Z$-детектор. Эти понятия (без названия) и доказательство теоремы их существования восходят к [3], [6]. Счетное семейство $\{\varphi_i\colon D^k \hookrightarrow X\}$ вложений $k$-дисков $D^k$ называется *дизъюнктным* (*плотным*), если любые их образы не пересекаются (соответственно если $\{\varphi_i\}$ плотно в $C(D^k, X)$). Скажем, что семейство $\{\varphi_i\}$ *порождает $Z_k$-детектор*, если $\bigsqcup\{\varphi_i(D^k)\}$ есть $Z_k$-детектор в $X$.

Теорема 1.15 (о существовании детекторов). *Пусть $X$ есть сильно $k$-универсальное польское* ANE($k$)*-пространство. Тогда*

(d) *семейство $\{\varphi_i\}$ вложений $D^k$ в $X$ порождает $Z_k$-детектор в том случае, когда $\{\varphi_i\}$ является плотным и дизъюнктным семейством*;

(e) *существует плотное и дизъюнктное семейство вложений $D^k$ в $X$.*

Напомним, что в [1] было установлено существование *универсального $Z$-детектора $D$* в $X = \nu^k$ (а именно, $D \cap F$ является $Z$-детектором в $F$ для любого $F \in \mathscr{C}_X$).

**1.4. Редуцированная склейка.** Если заданы совершенное отображение $F\colon X \to W$ полных метрических пространств и замкнутое подмножество $Y \subset W$, то они порождают частичное отображение $X \hookleftarrow A \rightleftharpoons F^{-1}(Y) \xrightarrow{f \rightleftharpoons F\restriction_A} Y$. *Редуцированной склейкой $X \cup_F Y$ отображения $F$ по множеству $Y$* называется склейка пространств $X$ и $Y$ по отображению $f$ [7]. Несложно проверить, что $X \cup_F Y$ есть полное метрическое пространство.

Обозначим через $\mathscr{F}$ естественное отображение $X$ в редуцированную склейку $X \cup_F Y$, а через $\mathscr{G}$ – отображение $X \cup_F Y \mapsto W$, заданное равенствами $\mathscr{G} = F$ на $X \setminus A$ и $\mathscr{G} = \mathrm{Id}_Y$ на $Y$. Ясно, что $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ непрерывны и совершенны, а $F = \mathscr{G} \circ \mathscr{F}$. Отображение $\mathscr{G}$ устроено проще $F$, поскольку множество сингулярных значений $\mathscr{N}_{\mathscr{G}}$ равно $\mathscr{N}_F \setminus Y$. Приведем более сложные свойства редуцированной склейки.

Теорема 1.16. *Пусть $F\colon X \to W$ есть совершенное* UV$^{k-1}$*-отображение* ANE($k$)*-пространств, $Y \subset W$ – замкнутое* ANE($k$)*-подпространство. Тогда*

(i) *$\mathscr{F}$ есть* UV$^{k-1}$*-отображение*;

(ii) *редуцированная склейка $X \cup_F Y$ есть полное* ANE($k$)*-пространство*;

(iii) *$\mathscr{G}$ есть* UV$^{k-1}$*-отображение.*

*Если дополнительно известно, что $Y \subset W$ есть $Z_k$-компакт, то $Y$ является $Z_k$-компактом в $X \cup_F Y$, причем $Y \cap \mathscr{N}_{\mathscr{G}} = \varnothing$.*

Сформулированное утверждение является следствием теоремы о делении $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений:

Теорема 1.17. *Пусть $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $f\colon X \to Y$ между $\mathrm{ANE}(k)$-пространствами представлено в виде композиции $X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} Y$, где $g \in \mathrm{UV}^{k-1}$ и $Z \in \mathrm{ANE}(k)$. Тогда $h \in \mathrm{UV}^{k-1}$.*

Частичное совершенное отображение $X \hookleftarrow A \xrightarrow{f} Y$ естественным образом порождает отображение $\mathscr{F}\colon X \to X \cup_f Y$ в склейку $X \cup_f Y$. Если $f$ есть гомеоморфизм на свой образ $f(A) = \mathrm{Cl}\, f(A) \subset Y$, то склейка называется *отождествлением $X$ и $Y$ по $A$ и $f(A)$* и будет обозначаться через $X \cup Y$ (если не возникает путаницы). Исследуем экстензорные свойства склеек.

Предложение 1.18. *Если $A \in \mathrm{AE}(k)$ замкнуто и в $X$, и в $Y$, а отождествление $X \cup Y \in \mathrm{AE}(k)$, то $X, Y \in \mathrm{AE}(k)$.*

Теорема 1.19. *Пусть $X \hookleftarrow A \xrightarrow{f} Y$ есть частичное совершенное отображение полных метрических пространств. Если $X, Y \in \mathrm{AE}(k)$, а $A \in \mathrm{AE}(k-1)$, то $X \cup_f Y \in \mathrm{AE}(k)$.*

Эта теорема доказана для компактных пространств в [8]. Следующее утверждение является уточнением теоремы 1.19, если дополнительно известно, что $A \in \mathrm{AE}(k)$, а $f \in \mathrm{UV}^{k-1}$.

Теорема 1.20. *Пусть $X \hookleftarrow A \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{UV}^{k-1}$ есть частичное совершенное отображение полных пространств. Если $X, Y, A \in \mathrm{AE}(k)$, то естественное отображение $\mathscr{F}\colon X \to X \cup_f Y \in \mathrm{UV}^{k-1}$.*

Из теоремы 1.20 и теоремы 1.17 о делении $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений легко следует

Теорема 1.21. *Пусть частичное совершенное отображение $X \hookleftarrow A \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{UV}^{k-1}$ полных $\mathrm{AE}(k)$-пространств продолжается до $F\colon X \to Y \in \mathrm{UV}^{k-1}$. Тогда естественное разложение $F$ в композицию $X \xrightarrow{\mathscr{F}} X \cup_f Y \xrightarrow{\mathscr{G}} Y$ состоит из $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений.*

## Глава 1. Теорема о незаузленности

Приступая к доказательству теоремы о незаузленности, фиксируем в этой главе $\mathrm{AE}(k)$-пространство $X = \nu^k$, снабженное двумя системами (возможно, совпадающими) абстрактных $\nu$-конструктивных множеств $\mathscr{C}_X$ и $\widehat{\mathscr{C}}_X$ и совершенную *$k$-резольвенту* $f\colon X \to Y$ (т.е. $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение из $X = \nu^k$ в польское пространство $Y \in \mathrm{AE}(k)$). Пусть также задано $k$-разбиение $\widehat{\mathscr{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства $(X, \widehat{\mathscr{C}}_X)$ с полным нервом. Ясно, что

(†) каноническое отображение $\widehat{\upsilon}\colon X \to \widehat{\mathscr{Q}}$ есть $k$-эквивалентность относительно $\mathring{\mathscr{N}}_{\widehat{\mathscr{Q}}} \rightleftharpoons \bigl\{\mathring{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}\rangle \mid \widehat{q} \in \widehat{\mathscr{Q}}\bigr\} \in \mathrm{cov}\,\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ (см. [1; § 10]).

## § 2. $\mathscr{S}_m$-приемлемые тройки

Пусть фиксированы покрытия $\bar{c}_Y \in \operatorname{cov} Y$ и $\bar{s}_X \in \operatorname{cov} X$. В силу предложения 1.2 существуют метрика $\rho(x,x')$, совместимая с топологией на $X$, и метрика $d(y,y')$, совместимая с топологией на $Y$, удовлетворяющие $\mathrm{UV}^{k-1}$-тесту относительно $\{f; \bar{s}_X, \bar{c}_Y\}$. Отсюда, в частности, следует, что $\mathscr{Y}(1) \prec \bar{c}_Y$ и $\mathscr{X}(1) \prec \bar{s}_X$, где $\mathscr{Y}(\alpha) \rightleftharpoons \{\mathrm{N}_d(y;\alpha) \mid y \in Y\}$, $\alpha > 0$, а $\mathscr{X}(\alpha) \rightleftharpoons \{\mathrm{N}(x;\alpha) \mid x \in X\}$. Воспользуемся теоремой 1.5, чтобы решить вопрос о выполнимости $\mathrm{ANE}(k)$-тестов в $\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$.

Предложение 2.1. *Существует такая константа $a > 0$, что если $0 < a\delta < \varepsilon < 1$ и $f(\widehat{\mathscr{Q}}) \prec \mathscr{Y}(\delta)$, то пара покрытий $\mathscr{N}_{\mathscr{Y}(\delta)^\bullet} \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}(\varepsilon)^\bullet}$ удовлетворяет $\mathrm{ANE}_{\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle}(k)$-тесту.*[3]

Следствием теоремы об открытости класса $k$-эквивалентностей [1; теорема 10.6] является следующий результат.

Теорема 2.2. *Пусть $Z \in \mathrm{ANE}$, и пусть $\eta, \theta \in \operatorname{cov} Z$ таковы, что пара покрытий $\theta \prec \eta$ удовлетворяет 9-кратному $\mathrm{ANE}_Z(k)$-тесту. Если $\varphi'\colon X \to Z$ есть $k$-эквивалентность относительно $\theta$, то любое отображение $\varphi\colon X \to Z$, $\theta$-близкое к $\varphi'$, является $k$-эквивалентностью относительно $\eta$.*

С помощью предложения 2.1, теоремы 2.2 и условия (†) можно оценить близость отображения к $\widehat{v}$, которая гарантирует ему сохранение свойства $k$-эквивалентности.

Предложение 2.3. *Существует такая константа*[4] *$b > a$, что если $0 < b\delta < \varepsilon < 1$, а также $f(\widehat{\mathscr{Q}}) \prec \mathscr{Y}(\delta)$, то любое отображение $\beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, $\mathscr{N}_{\mathscr{Y}(\delta)^\bullet}$-близкое к $\widehat{v}$, является $k$-эквивалентностью относительно $\mathscr{N}_{\mathscr{Y}(\varepsilon)^\bullet}$.*

Введем в рассмотрение *быстро убывающую последовательность чисел*

$$\mathscr{S}_p \rightleftharpoons \{\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_{\pi p}\},$$

где $p = k(k+1)/2 + 1$, $\pi = 5$ и $(b+100)\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n < 1$ для всех $0 \leqslant n < \pi p$, и ее подпоследовательности

$$\mathscr{S}_m \rightleftharpoons \{\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_{\pi m}\},$$

$0 \leqslant m \leqslant p$. Так как метрики на $X$ и $Y$ зависят только от выбора отображения $f$ и покрытий $\bar{s}_X$ и $\bar{c}_Y$, то и последовательность $\mathscr{S}_p$ определяется ими.

Через $\mathscr{X}_n$ и $\mathscr{Y}_n$, $0 \leqslant n \leqslant \pi p$, обозначим покрытия $\mathscr{X}(\varepsilon_n) \in \operatorname{cov} X$ и $\mathscr{Y}(\varepsilon_n) \in \operatorname{cov} Y$ соответственно. Ясно, что $\mathscr{Y}_n^{20} \prec \mathscr{Y}_{n-1}$ и $\mathscr{X}_n^{20} \prec \mathscr{X}_{n-1}$. Далее, на $k$-разбиение $\widehat{\mathscr{Q}}$ наложим дополнительное условие:

(1) $\widehat{\mathscr{Q}} \prec \mathscr{X}_{\pi p}$ и $f(\widehat{\mathscr{Q}}) \prec \mathscr{Y}_{\pi p}$ (и, следовательно, $f(\widehat{\mathscr{Q}}) \prec \mathscr{Y}_0 \prec \mathscr{Y}(1) \prec \bar{c}$).

По предложению 2.1 пара покрытий $\mathscr{N}_{\mathscr{Y}_n^\bullet} \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}_{n-1}^\bullet}$ удовлетворяет $\mathrm{ANE}_{\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle}(k)$-тесту, а также заключению предложения 2.3. Фиксируем также открытое подмножество $\mathscr{V} \subset Y$, ручное (относительно $\mathscr{C}_X$) $Z$-множество $Z_1 \subset X$ и множество $Z_2 \subset X$, которые совпадают вне $\mathscr{V}^\bullet$, а также отображение $h\colon Z_1 \to Z_2$, тождественное вне $\mathscr{V}^\bullet$.

[3] Всюду в дальнейшем через $A^\bullet$ обозначается прообраз $f^{-1}(A)$.

[4] Точные значения встречающихся в дальнейшем констант могут быть вычислены, хотя для нас важен только факт их существования.

Определение 2.4. Тройка $\big(\mathscr{Q}, T\colon \mathscr{Q}\to\widehat{\mathscr{Q}}, \beta\colon X\to\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\big)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть разбиение $(X,\mathscr{C}_X)$, $T$ – трансформация, а $\beta$ – аккомпанемент $T$, называется $\mathscr{S}_m$-*приемлемой*, $0\leqslant m<p$, если

(i) $\beta$ является $k$-эквивалентностью относительно $\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}$;
(ii) $\operatorname{dist}(\beta,\widehat{v})\prec\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}$;
(iii) $\mathscr{Q}_{\pi m}\rightleftharpoons\big\{q\in\mathscr{Q}\mid f(q)\cap\mathrm{N}(\mathscr{V};\mathscr{Y}_{\pi m})=\varnothing\big\}$ содержится в $\widehat{\mathscr{Q}}$ и $T{\restriction}_{\mathscr{Q}_{\pi m}}=\mathrm{Id}$;
(iv) $\beta{\restriction}_{Z_1}=\widehat{v}\circ h$;
(v) $\{\beta(f^{-1}(y))\mid y\in Y\}\prec\mathscr{N}_{\mathscr{X}_{\pi m+1}}$ для всех $y\in Y$.

В качестве важного следствия из (ii) и (iv) имеем:

(2) $f\circ h$ и $f{\restriction}_{Z_1}$ являются $\mathscr{Y}_{\pi m-1}$-близкими.

Изучим свойства $\mathscr{S}_m$-приемлемых троек, связанные с близостью элементов $\mathscr{Q}$ и $\widehat{\mathscr{Q}}$, соответствующих при трансформации $T$.

Предложение 2.5. *Если $(\mathscr{Q},T,\beta)$ является $\mathscr{S}_m$-приемлемой тройкой, то*

(3) $q\subset\mathrm{N}(Tq;\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m})$ *для любого* $q\in\mathscr{Q}$;
(4) $f(\mathscr{Q})\prec\mathscr{Y}_{\pi m}$.

Доказательство. Так как $\operatorname{dist}(\beta,\widehat{v})\prec\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}$ и $\beta(q)\subset\mathscr{N}_{Tq}$, то $\widehat{v}(q)\subset\mathrm{N}\big(\beta(q);\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}\big)\subset\mathrm{N}\big(\mathscr{N}_{Tq};\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}\big)$. В силу 1.3($\delta$) и 1.3($\gamma$) имеем

$$\mathrm{N}\big(\mathscr{N}_{Tq};\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}\big)\subset\mathrm{N}\big(\widehat{v}(Tq);\mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}\circ\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}\big)\subset\mathrm{N}\big(\widehat{v}(Tq);\mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}^2\circ\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}\big).$$

Из полученных вложений следует $\widehat{v}(q)\subset\mathrm{N}\big(\widehat{v}(Tq);\mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}^2\circ\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}\big)$. Отсюда и из 1.3($\beta$) следует $q\subset\mathrm{N}\big(Tq;\widehat{\mathscr{Q}}^4\circ\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}\circ\widehat{\mathscr{Q}}\big)$ – свойство (3) доказано.

Докажем (4). Из $\operatorname{dist}(\beta,\widehat{v})\prec\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}$ и 1.3($\gamma$) следует

$$\widehat{v}(\mathscr{Q})\prec\mathrm{St}\big(\beta(\mathscr{Q});\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}\big)\prec\mathrm{St}\big(\mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}};\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}\big)\prec\mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}^2\circ\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}.$$

Из 1.3($\alpha$) следует $\mathscr{Q}\prec\mathrm{St}\big(\widehat{\mathscr{Q}}^2\circ\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1};\widehat{\mathscr{Q}}\big)$. Так как $f(\widehat{\mathscr{Q}})\prec\mathscr{Y}_{\pi m+1}$ в силу (1), то отсюда следует, что $f(\mathscr{Q})\prec\mathscr{Y}_{\pi m}$.

## § 3. Перестройки $\mathscr{S}_m$-приемлемых троек

Покажем, что приемлемая тройка $(\mathscr{Q},T,\beta)$ с достаточно мелким $k$-разбиением $\mathscr{Q}$ порождает гомеоморфизм, аппроксимативно продолжающий $h$.

Предложение 3.1. *Пусть $(\mathscr{Q},T,\beta)$ есть $\mathscr{S}_0$-приемлемая тройка, в которой $\mathscr{Q}$ – $k$-разбиение $(X,\mathscr{C}_X)$. Пусть выбрана окрестность $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}\Subset\mathscr{U}\subset Y$, так, что $\mathrm{N}(\mathscr{V};(\bar c_Y)^2)\subset\mathscr{U}$. Тогда существует такой гомеоморфизм $\widetilde{h}\colon X\to X$, что*

($\alpha$) *условие аппроксимативного продолжения*: $\operatorname{dist}(\widetilde{h}{\restriction}_{Z_1},h)\prec\widehat{\mathscr{Q}}^4$;
($\beta$) $\operatorname{dist}(f\circ\widetilde{h},f)\prec\bar c^4$;
($\gamma$) $\widetilde{h}=\mathrm{Id}$ *на* $X\setminus\mathscr{U}^\bullet$;
($\delta$) $\widetilde{h}(Z_1)\subset X$ *есть ручное* (*относительно* $\widehat{\mathscr{C}}_X$) $Z$-*множество*;
($\varepsilon$) *условие сжатия слоев*: $\widetilde{h}(f^{-1}(y))\prec\bar s_X$ *для любого* $y\in Y$.

Доказательство. В силу постулата о гомеоморфизме [1; § 14] существует такой гомеоморфизм $\widetilde{h}\colon X \to X$, что $\widetilde{h}(q) \subseteq \mathrm{N}(Tq; \widehat{\mathscr{Q}})$ для всех $q \in \mathscr{Q}$ и выполнено условие $(\delta)$.

Проверим оставшиеся свойства. Возьмем точку $z \in Z_1 \cap q$, где $q \in \mathscr{Q}$. Поскольку $\beta\restriction_{Z_1} = \widehat{v} \circ h$, то $\widehat{v}(h(z)) \in \mathring{\mathrm{S}}\mathrm{t}\langle Tq\rangle$. Поэтому $h(z) \in \mathrm{N}(Tq; \widehat{\mathscr{Q}}^2)$ и, стало быть, $Tq \subset \mathrm{N}(h(z); \widehat{\mathscr{Q}}^3)$. В итоге имеем $\widetilde{h}(z) \in \widetilde{h}(q) \subset \mathrm{N}(Tq; \widehat{\mathscr{Q}}) \subset \mathrm{N}(h(z); \widehat{\mathscr{Q}}^4)$ и $\mathrm{dist}(\widetilde{h}\restriction_{Z_1}, h) \prec \widehat{\mathscr{Q}}^4$ – свойство $(\alpha)$ доказано.

Пусть $x \in q$, где $q \in \mathscr{Q}$. Из 2.5(3) легко следует $Tq \subset \mathrm{N}(q; \mathscr{Y}_0^\bullet)$ и, значит, $f(Tq) \subset \mathrm{N}(f(q); \mathscr{Y}_0)$. В силу 2.5(4) и условия (1), § 2, $f(\mathscr{Q}) \prec \mathscr{Y}_0 \prec \bar{c}$ и поэтому $f(\mathscr{Q}) \prec \bar{c}$. Отсюда легко следует

- ($\zeta$) $f(\widetilde{h}(x)) \in f\big(\mathrm{N}(Tq; \widehat{\mathscr{Q}})\big) \subset \mathrm{N}\big(f(Tq); f(\widehat{\mathscr{Q}})\big) \subset \mathrm{N}\big(f(Tq); \bar{c}\big) \subset \mathrm{N}\big(f(q); \mathscr{Y}_0 \circ \bar{c}\big) \subset \mathrm{N}\big(f(x); \bar{c}^{\,4}\big)$;
- ($\eta$) семейство $\mathscr{R} \rightleftharpoons \{q \in \mathscr{Q} \mid f(q) \cap \mathrm{N}(\mathscr{V}; \bar{c}_Y) = \varnothing\}$ содержится в $\mathscr{Q}_0 = \{q \in \mathscr{Q} \mid f(q) \cap \mathrm{N}(\mathscr{V}; \mathscr{Y}_0) = \varnothing\}$, а его тело $X_0 \rightleftharpoons \cup\mathscr{R} \in \mathscr{C}_X^k$ расположено следующим образом: $\mathrm{Cl}\big(f^{-1}(\mathscr{V})\big) \subset X \setminus X_0 \subset \mathscr{U}^\bullet$.

Свойство $(\beta)$ легко следует из ($\zeta$). Из ($\eta$) и из свойства 2.4(iii) следует $\mathscr{R} \subset \widehat{\mathscr{Q}}$ и $T\restriction_{X_0} = \mathrm{Id}$.

Поскольку $\mathrm{Id}_{X_0}\colon X_0 \to X_0$ является частичным сильным аккомпанементом $T$, то в силу постулата о гомеоморфизме $\widetilde{h}\colon X \to X$ можно выбрать с дополнительным условием: $\widetilde{h} = \mathrm{Id}$ на $X_0$. Отсюда и из ($\zeta$) легко следует $(\gamma)$.

Так как $\beta(q) \subset \mathscr{N}_{T(q)}$ и $\widehat{v} \circ h(q) \subset \widehat{v}\big(\mathrm{N}(T(q); \widehat{\mathscr{Q}})\big) \subset \mathrm{N}\big(\mathscr{N}_{T(q)}; \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}\big)$, то

$$\mathrm{dist}(\beta, \widehat{v} \circ h) \prec \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}^2.$$

Следовательно,

$$\widehat{v} \circ h\big(f^{-1}(y)\big) \subset \mathrm{N}\big(\beta(f^{-1}(y)); \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}^2\big) \subset W \in \mathscr{N}_{\mathscr{X}_1} \circ \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}^2 \prec \mathscr{N}_{\mathscr{X}_1 \circ \widehat{\mathscr{Q}}^4}.$$

Поскольку в силу 1.3($\alpha$) имеем $\widehat{v}^{-1}(W) \subset V \in \mathscr{X}_1 \circ \widehat{\mathscr{Q}}^5$, а $\mathscr{X}_1 \circ \widehat{\mathscr{Q}}^6 \prec \mathscr{X}_0 \prec \bar{s}_X$, то $h(f^{-1}(y)) \subset \widehat{v}^{-1}\big(\widehat{v} \circ h(f^{-1}(y))\big) \subset \widehat{v}^{-1}(W) \subset V' \in \bar{s}_X$ – свойство $(\varepsilon)$ доказано.

В последующих двух предложениях описывается механизм, позволяющий улучшать свойства связности элементов разбиения $\mathscr{Q}$ в приемлемой тройке $(\mathscr{Q}, T, \beta)$ за счет относительного ухудшения контроля над трансформацией $T$.

Предложение 3.2. *Для любого $m < p - 1$ и для любой $\mathscr{S}_{m+1}$-приемлемой тройки $(\mathscr{Q}', T', \beta')$, в которой $\mathscr{Q}'$ есть $l_r$-разбиение $X$, где $r + l \leqslant k$, $l < k$, существует $\mathscr{S}_m$-приемлемая тройка $(\mathscr{Q}, T, \beta)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $l_{r+1}$-разбиение $X$.*

Доказательство. Обозначим $\theta \rightleftharpoons \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)+2}}$ и $\eta \rightleftharpoons \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)-2}} \in \mathrm{cov}\,\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$. Очевидно, что $\mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}^2 \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi p-1}} \prec \theta$, а из предложения 2.1 следует, что $\theta \prec \eta$ удовлетворяет 3-кратному $\mathrm{ANE}_{\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle}(k)$-тесту. Применим теорему о сильной перестройке $l_r$-разбиения в $l_{r+1}$-разбиение [1; теорема 18.1] к тройке $(\mathscr{Q}', T', \beta')$ и ручному $Z$-множеству $Z_1 \subset X$. В результате получим тройку $(\mathscr{Q}, T, \beta)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $l_{r+1}$-разбиение $X$, $T$ – трансформация разбиений, а $\beta$ – аккомпанемент $T$, такую, что

1. трансформации $T$ и $T'$ являются $Z_1$-эквивалентными, а также $\beta = \beta'$ на $Z_1$;
2. $\beta$ является $k$-эквивалентностью относительно $\eta^2$;

(3) $\operatorname{dist}(\beta,\beta') \prec \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}}$;

(4) если $q' \in \mathscr{Q}'$ и $\beta'(q') \cap \mathrm{N}(\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}; \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}) = \varnothing$, то $q' \in \mathscr{Q}$ и $T(q') = T'(q')$.

Напомним, что $\mathfrak{C} \subset X$ есть объединение тел плохих наборов, а набор из $r+1$ элемента $\widehat{q}_{\alpha_s} \in \widehat{\mathscr{Q}}$, $\widehat{q}_{\alpha_1} \cap \dots \cap \widehat{q}_{\alpha_{r+1}} \neq \varnothing$, называется *плохим*, если $\bigcap\{q'_{\alpha_s} \mid 1 \leqslant s \leqslant r+1\} \notin \mathrm{AE}(l)$.

Из условия (2) следует, что $\beta$ является $k$-эквивалентностью относительно $\eta^2 \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)-3}} \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}$, что доказывает 2.4(i) для $\beta$. Из (1) и 2.4(iv) для $\beta'$ легко следует свойство 2.4(iv) для $\beta$: $\beta\restriction_{Z_1} = \widehat{v} \circ h$. Свойство 2.4(ii) для $\beta$ справедливо, так как в силу (3), 2.4(ii) для $\beta'$ и леммы 1.3 имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\beta,\widehat{v}) &\prec \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}} \circ \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)+1}} \prec \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}^3} \circ \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)+1}} \\ &\prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi p-1}} \circ \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)+1}} \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}.\end{aligned}$$

Лемма 3.3. *Для тройки $(\mathscr{Q},T,\beta)$ справедливо свойство* 2.4(iii).

Доказательство леммы 3.3. Пусть $f(q) \cap \mathrm{N}(\mathscr{V}; \mathscr{Y}_{\pi m}) = \varnothing$ для $q \in \mathscr{Q}$, но $q \notin \widehat{\mathscr{Q}}$. Возьмем любой элемент $q' \in \mathscr{Q}'$, $q' \subset \mathrm{N}(q; (\mathscr{Q}')^4)$. Так как в силу 2.5(4) $f(\mathscr{Q}') \prec \mathscr{Y}_{\pi(m+1)}$ и $\mathscr{Y}^8_{\pi(m+1)} \prec \mathscr{Y}_{\pi m}$, то

$$f(q') \cap \mathrm{N}(\mathscr{V}; \mathscr{Y}_{\pi(m+1)}) \subset \mathrm{N}(f(q); \mathscr{Y}^4_{\pi(m+1)}) \cap \mathrm{N}(\mathscr{V}; \mathscr{Y}_{\pi(m+1)}) = \varnothing$$

и, следовательно, в силу 2.4(iii) для $\mathscr{S}_{m+1}$-приемлемой тройки $(\mathscr{Q}',T',\beta')$ имеем $q' = T'(q') \in \widehat{\mathscr{Q}}$. Отсюда видно, что если набор из $r+1$ элемента $\widehat{q}_{\alpha_i} \in \widehat{\mathscr{Q}}$, $q'_{\alpha_i} \in \mathscr{Q}'$, $q'_{\alpha_i} \subset \mathrm{N}(q; (\mathscr{Q}')^3)$, то этот набор является хорошим. Отсюда следует, что если $q' \in \mathscr{Q}'$, $q' \cap q \neq \varnothing$, то $\beta'(q') \cap \mathrm{N}(\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}; \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}) = \varnothing$. Следовательно, в силу (4) и только что отмеченного факта имеем $q' \in \mathscr{Q}$ и $q' \in \widehat{\mathscr{Q}}$. Так как $q \notin \widehat{\mathscr{Q}}$, то $q$ и $q'$ – различные элементы $\mathscr{Q}$ и, следовательно, $\dim(q' \cap q) \leqslant k-1$. Мы получили противоречие с тем, что $\dim \mathrm{N}(q; \mathscr{Q}') = k$. Лемма 3.3 доказана.

В силу 2.4(v) и условия (3) имеем

$$\begin{aligned}\bigl\{\beta(f^{-1}(y)) \mid y \in Y\bigr\} &\prec \operatorname{St}\bigl(\{\beta'(f^{-1}(y)) \mid y \in Y\}; \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}}\bigr) \\ &\prec \mathscr{N}_{\mathscr{X}_{\pi(m+1)+1}} \circ \mathscr{N}^2_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \mathscr{N}_{\mathscr{X}_{\pi m+1}},\end{aligned}$$

что завершает доказательство предложения 3.2.

Предложение 3.4. *Для любого $m < p-1$ и для любой $\mathscr{S}_{m+1}$-приемлемой тройки $(\mathscr{Q}',T',\beta')$, в которой $\mathscr{Q}'$ есть $l$-разбиение $X$, где $0 \leqslant l < k$, существует $\mathscr{S}_m$-приемлемая тройка $(\mathscr{Q},T,\beta)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $(l+1)_1$-разбиение $X$.*

Доказательство. Обозначим $\theta \rightleftharpoons \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)+2}}$ и $\eta \rightleftharpoons \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)-3}} \in \operatorname{cov} \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$. Очевидно, что пара вписанных покрытий $\theta^{32} \prec \eta$ удовлетворяет 3-кратному $\mathrm{ANE}_{\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle}(k)$-тесту и $\mathscr{N}^5_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \omega$, где $\omega \rightleftharpoons \mathscr{N}_{\mathscr{X}^\bullet_{\pi(m+1)}}$. Применим теорему о сильной перестройке $l$-разбиения в $(l+1)_1$-разбиение [1; теорема 19.1] к тройке $(\mathscr{Q}',T',\beta')$ и ручному $Z$-множеству $Z_1$. В результате получим тройку $(\mathscr{Q},T,\beta)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $(l+1)_1$-разбиение $X$, $T$ – трансформация разбиений, а $\beta$ – аккомпанемент $T$, такую, что

(i) $\beta$ является $k$-эквивалентностью относительно $\eta^2$ и совпадает с $\beta'$ на $Z_1$;

(ii) $\operatorname{dist}(\beta,\beta') \prec \theta^{32}$;

(iii) если $q' \in \mathscr{Q}'$ и $\beta'(q') \cap \mathrm{N}(\mathscr{N}_{\mathfrak{C}}; \theta^{14}) = \varnothing$, где $\mathfrak{C} \subset \widehat{X}$ есть тело плохого семейства $\bigl\{\widehat{q} \mid q' = (T')^{-1}(\widehat{q})$ не является $l$-связным$\bigr\} \subset \widehat{\mathscr{Q}}$, то $q' \in \mathscr{Q}$ и $T(q') = T'(q')$;

(iv) $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega^8$ для всех $y \in Y$ (так как $\mathscr{N}^5_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \omega$).

Из (i) и 2.4(iv) для $\beta'$ легко следует свойство 2.4(iv) для $\beta$. Из (i) следует, что $\beta$ является $k$-эквивалентностью относительно $\eta^2 \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)-4}} \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}$, что доказывает 2.4(i) для $\beta$. Свойство 2.4(ii) для $\beta$ справедливо, так как в силу (ii) и 2.4(ii) для $\beta'$ имеем

$$\mathrm{dist}(\beta, \widehat{v}) \prec \theta^{32} \circ \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)+1}} \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)-2}} \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi m+1}}.$$

Лемма 3.5. *Для тройки $(\mathscr{Q}, T, \beta)$ справедливо свойство* 2.4(iii).

Доказательство леммы 3.5. Пусть $f(q) \cap \mathrm{N}(\mathscr{V}; \mathscr{Y}_{\pi m}) = \varnothing$ для $q \in \mathscr{Q}$, но $q \notin \widehat{\mathscr{Q}}$. Возьмем любой элемент

$$q' \in \mathscr{P} \rightleftharpoons \bigl\{q' \in \mathscr{Q}' \mid q' \subset \mathrm{N}(q; \mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)} \circ (\mathscr{Q}')^4)\bigr\} \subset \mathscr{Q}'.$$

Аналогично лемме 3.3 имеем $q' = T'(q') \in \widehat{\mathscr{Q}}$. Тем самым, все элементы $T'(\mathscr{P}) = \mathscr{P} \subset \widehat{\mathscr{Q}}$ являются $l$-связными, а стало быть, семейства $T'(\mathscr{P})$ и $\bigl\{\widehat{q} \mid q' = (T')^{-1}(\widehat{q})$ не является $l$-связным$\bigr\} \subset \widehat{\mathscr{Q}}$ не пересекаются. Отсюда и из $\theta = \mathrm{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(m+1)+2}}$ следует, что условие (iii) выполнено, а следовательно, если $q' \cap q \neq \varnothing$ для некоторого $q' \in \mathscr{Q}'$, то $q' \in \mathscr{Q}$ и $q' \in \widehat{\mathscr{Q}}$. Так как $q \notin \widehat{\mathscr{Q}}$, то $q$ и $q'$ – различные элементы $\mathscr{Q}$ и, следовательно, $\dim(q' \cap q) \leqslant k-1$. Мы получили противоречие с тем, что $\dim \mathrm{N}(q; \mathscr{Q}') = k$.

Лемма 3.5 доказана.

Свойство 2.4(v) для $\beta$ справедливо, так как в силу (iv) имеет место вписанность $\{\beta(f^{-1}(y)) \mid y \in Y\} \prec \omega^8 \prec \mathscr{N}_{\mathscr{X}_{\pi m+1}}$.

Предложение 3.4 доказано.

Если теперь $k(k+1)/2$ раз поочередно применять предложения 3.2 и 3.4, то свойство $(-1)$-связности разбиения $\mathscr{Q}'$ в начальной приемлемой тройке можно улучшить до свойства $(k-1)$-связности разбиения $\mathscr{Q}$ в финальной приемлемой тройке. Как результат этого мы получаем более сильное утверждение.

Предложение 3.6. *Для любой $\mathscr{S}_{p-1}$-приемлемой тройки $(\mathscr{Q}', T', \beta')$ существует $\mathscr{S}_0$-приемлемая тройка $(\mathscr{Q}, T, \beta)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $k$-разбиение $X$.*

## § 4. Теорема о ручной незаузленности

Напомним, что $f\colon X \to Y$ есть совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение из $X = \nu^k$ в польское пространство $Y \in \mathrm{AE}(k)$. Пусть фиксированы произвольные покрытие $c \in \operatorname{cov} Y$ и окрестности $\mathscr{V} \Subset \mathscr{U} \subset Y$, а покрытие $\bar{c} \in \operatorname{cov} Y$ выбрано исходя из условий $\mathrm{N}(\mathscr{V}; (\bar{c})^2) \subset \mathscr{U}$ и $(\bar{c})^4 \prec c$ ($\bar{c} = c$, если $c = \{Y\}$, а $\mathscr{V} = \mathscr{U} = Y$). Рассмотрим последовательность $\mathscr{S}_p = \{\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_{\pi p}\}$, $p = k(k+1)/2+1$, из § 2, определяемую покрытием $\bar{c}$ (покрытие $\bar{s}$ берем тривиальным). В результате приведенных построений возникает покрытие $c' \rightleftharpoons \mathscr{Y}_{\pi p} \in \operatorname{cov} Y$. Если $c = \{Y\}$, а $\mathscr{V} = \mathscr{U} = Y$, то полагаем $c' = \{Y\}$.

Теорема 4.1 (о ручной незаузленности). *Если $Z_1, Z_2 \subset X$ – ручные $Z$-множества* (*относительно $\mathscr{C}_X$ и $\widehat{\mathscr{C}}_X$ соответственно*), *совпадающие вне $\mathscr{V}^\bullet \rightleftharpoons f^{-1}(\mathscr{V})$, а $h\colon Z_1 \to Z_2$, $\mathrm{dist}(h, \mathrm{Id}) \prec (c')^\bullet$, – гомеоморфизм, тождественный* *вне* $\mathscr{V}^\bullet$, *то существует такой гомеоморфизм* $\widehat{h}\colon X \to X$, *продолжающий* $h$, *что*

(1) $\operatorname{dist}(\widehat{h}, \mathrm{Id}) \prec c^\bullet$;

(2) $\widehat{h} = \mathrm{Id}_X$ *вне* $\mathscr{U}^\bullet$.

Замечание. Дословно повторяя рассуждения из предыдущего параграфа, мы можем получить результаты о перестройке $\mathscr{S}_m$-приемлемых троек в ситуации, когда нет контроля за сжатием слоев, а $k$-резольвента $f$ не обязательно совершенна. Тем самым, теорема 4.1, как и последующие теоремы о незаузленности, справедлива для (не обязательно совершенных) $k$-резольвент. Однако для наших целей достаточно приводимого ниже более слабого результата.

Теорема 4.1 есть следствие аппроксимативной версии теоремы о незаузленности. Доказательство этой редукции аналогично [6; 3.1.1] и оставляется читателю.

Теорема 4.2 (аппроксимативная теорема о незаузленности). *Если* $Z_1, Z_2 \subset X$ *– ручные* $Z$*-множества* (*относительно* $\mathscr{C}_X$ *и* $\widehat{\mathscr{C}}_X$ *соответственно*), *совпадающие вне* $\mathscr{V}^\bullet \rightleftharpoons f^{-1}(\mathscr{V})$, *а* $h\colon Z_1 \to Z_2$, $\operatorname{dist}(h, \mathrm{Id}) \prec (c')^\bullet$, *– гомеоморфизм, тождественный вне* $\mathscr{V}^\bullet$, *то для любого* $\mu \in \operatorname{cov} X$ *существует такой гомеоморфизм* $\widetilde{h}\colon X \to X$, *что будут выполнены условия* (1), (2) *из теоремы* 4.1 (*с естественной заменой* $\widehat{h}$ *на* $\widetilde{h}$), *а также*

(3) *условие аппроксимативного продолжения*: $\operatorname{dist}(\widetilde{h}\restriction_{Z_1}, h) \prec \mu$;

(4) $\widetilde{h}(Z_1) \subset X$ *есть ручное* $Z$*-множество* (*относительно* $\widehat{\mathscr{C}}_X$).

Доказательство теоремы 4.2. Пусть $k$-разбиение $\widehat{\mathscr{Q}}$ пространства $X$, удовлетворяющее условию (1) из § 2, таково, что $(\widehat{\mathscr{Q}})^4 \prec \mu$. Оценим близость канонического отображения $\widehat{v}\restriction_{Z_1}$ и $\widehat{v} \circ h$.

Лемма 4.3. $\operatorname{dist}\bigl(\widehat{v}\restriction_{Z_1}, \widehat{v} \circ h\bigr) \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi p-1}}$.

Доказательство леммы 4.3. Так как

$$\operatorname{dist}(h, \mathrm{Id}) \prec (c')^\bullet = \mathscr{Y}^\bullet_{\pi p},$$

то $\{x, h(x)\} \subset U^\bullet$, где $U \in \mathscr{Y}_{\pi p}$. Из 1.3($\delta$) следует $\widehat{v}(x) \in \mathrm{N}(\mathscr{N}_{U^\bullet}; \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}})$ и $\widehat{v}(h(x)) \in \mathrm{N}(\mathscr{N}_{U^\bullet}; \mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}})$, что и доказывает принадлежность $\{\widehat{v}(x), \widehat{v}(h(x))\}$ элементу $\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi p-1}}$.

В силу приводимого ниже результата существует $\mathscr{S}_{p-1}$-приемлемая тройка $(\mathscr{Q}', T', \beta')$, которая с помощью предложения 3.6 перестраивается в $\mathscr{S}_0$-приемлемую тройку $(\mathscr{Q}, T, \beta)$ с $k$-разбиением $\mathscr{Q}$. Теперь доказательство теоремы 4.2 следует из предложения 3.1, примененного к $(\mathscr{Q}, T, \beta)$.

Осталось разобрать вопрос о существовании приемлемых троек.

Предложение 4.4. $\mathscr{S}_{p-1}$*-приемлемая тройка* $(\mathscr{Q}, T, \beta)$ *существует в каждом из следующих случаев*:

(i) $\bar{s}_X \in \operatorname{cov} X$ *состоит из одного элемента*;

(ii) $\mathscr{H}_f \subset X$ *является счетным объединением ручных* $Z$*-множеств*, $Z_1 = Z_2 = \varnothing$, *а* $\mathscr{V} = Y$.[5]

[5] Ясно, что условия 2.4(v) (в случае 4.4(i)) и 2.4(iii), (iv) (в случае 4.4(ii)) оказываются тривиально выполненными.

Последний случай важен при доказательстве теоремы 6.2 о совершенном $\sigma Z$-сжатии и устанавливается в § 6. Для упрощения доказательства предложения 4.4 приведем ряд вспомогательных фактов.

Предложение 4.5. *Если отображение $\beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ таково, что $\beta(X)$ пересекается с любым непустым $\bigcap \mathring{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}_i\rangle$, то $\beta$ является аккомпанементом некоторой трансформации $T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}}$.*

Будем называть $T$ из предложения 4.5 *естественной трансформацией, порожденной отображением $\beta$.*

Доказательство предложения 4.5. С помощью аксиомы конфинальности построим разбиение $\mathscr{Q}' = \{q'_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ пространства Небелинга $X$ так, чтобы $\beta(\mathscr{Q}') \prec \{\mathring{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}\rangle \mid \widehat{q} \in \widehat{\mathscr{Q}}\}$. Если дополнительно принять во внимание условие предложения, то возможно наделить $\mathscr{Q}'$ еще одним свойством:

(5) для любого $A' \subset A$, $\widehat{q}_{A'} \neq \varnothing$, существует такая биекция индексных подмножеств $\varphi(A')\colon A' \to \Gamma(A') \subset \Gamma$, $q'_{\Gamma(A')} \neq \varnothing$, что $\beta\bigl(q'_{\varphi(A')(\alpha)}\bigr) \subset \mathring{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}_\alpha\rangle$ для всех $\alpha \in A'$, а также $\Gamma(A') \cap \Gamma(A'') = \varnothing$ для всех $A' \neq A''$.

Легко видеть, что отображение $T'\colon \mathscr{Q}' \to \widehat{\mathscr{Q}}$, заданное правилом

(6) $T'(q')$ есть один из (многих) элементов $\widehat{q} \in \widehat{\mathscr{Q}}$, для которого $\beta(q') \subseteq \mathring{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}\rangle$,

является сюръективным соответствием разбиений, а $\beta$ является его аккомпанементом. С помощью (5) соответствие $T'$ можно подчинить также следующему условию:

(7) для любых $\widehat{q}_i \in \widehat{\mathscr{Q}}$, $\bigcap\{\widehat{q}_i \mid 0 \leqslant i \leqslant t\} \neq \varnothing$, существуют такие элементы $q'_i \in \mathscr{Q}'$, $\bigcap\{q'_i \mid 0 \leqslant i \leqslant t\} \neq \varnothing$, что $T'(q'_i) = \widehat{q}_i$ для $i \leqslant t$.

Очевидно, что существуют (единственные) разбиение $\mathscr{Q}$ пространства $X$, получающееся из $\mathscr{Q}'$ укрупнением, и соответствие $H\colon \mathscr{Q}' \to \mathscr{Q}$, порожденное $\mathscr{Q} \prec \mathscr{Q}'$, такие, что соответствие $T \rightleftharpoons T' \circ H^{-1}\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ является биекцией. Ясно, что $\beta$ также есть аккомпанемент $T$. В силу (7) $T$ является трансформацией разбиений.

Доказательство предложения 4.4(i). Рассмотрим семейства

$$\widehat{\mathscr{Q}}_i \rightleftharpoons \bigl\{\widehat{q} \mid \mathrm{N}(\mathscr{V};\mathscr{Y}_{\pi p-i}) \text{ не пересекается с } f(\widehat{q})\bigr\} \subset \widehat{\mathscr{Q}},$$

где $i = 1, 2$. Ясно, что $\widehat{\mathscr{Q}}_2 \subset \widehat{\mathscr{Q}}_1$. В силу (1), § 2, имеем

(a) $\mathrm{N}(\cup\widehat{\mathscr{Q}}_2; (\mathscr{Y}^\bullet_{\pi p-1})^2) \subset \cup\widehat{\mathscr{Q}}_1$.

Пусть $N \in \widehat{\mathscr{C}}^k_X$, $N \cap Z_1 = \varnothing$, есть объединение $\cup\widehat{\mathscr{Q}}_1$ и некоторого совершенного относительно $\widehat{\mathscr{Q}}$ множества $E$. Рассмотрим замкнутое подмножество $A \rightleftharpoons Z_1 \sqcup N \subset X$ и отображение $\beta'\colon A \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, корректно определенное как $\widehat{v} \circ h$ на $Z_1$ и как $\widehat{v}$ на $N$. Из леммы 1.4, примененной к $h{\restriction}_{Z_1} \sqcup \mathrm{Id}{\restriction}_N$ и $\mathrm{Id}{\restriction}_A$, следует $\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi p-1}}$-близость частичного отображения $X \hookleftarrow A \xrightarrow{\beta'} \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ к $\widehat{v}{\restriction}_A$. Так как метрика $d(y, y')$ на $Y$ удовлетворяет $\mathrm{UV}^{k-1}$-тесту относительно $f$ и $\bar{c}_Y$, то существует продолжение $\beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ отображения $\beta'$, являющееся $\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi p-2}}$-близким к $\widehat{v}$. Принимая во внимание предложение 2.3, приходим к выводу:

(b) отображение $\beta$ является $k$-эквивалентностью относительно $\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(p-1)+1}}$.

Так как $\beta\restriction_N = \widehat{v}\restriction_N$, то отображение $\beta\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ удовлетворяет условию предложения 4.5. Пусть $T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ есть естественная трансформация, порожденная отображением $\beta$. Принимая во внимание, что $N$ содержит $\cup\widehat{\mathscr{Q}}_1$, мы можем дополнительно потребовать, чтобы

(c) $T(q) \supset q$, если $q \subset \cup\widehat{\mathscr{Q}}_1$.

Так как $\operatorname{dist}(\beta, \widehat{v}) \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^{\bullet}_{\pi p-2}}$, то в силу 2.5(3) имеем $q \subset \mathrm{N}(Tq; \mathscr{Y}^{\bullet}_{\pi p-3})$ для любого $q \in \mathscr{Q}$. Отсюда и из (a) несложно вывести, что если $q \in \mathscr{Q}$, а $T(q) \in \widehat{\mathscr{Q}}_2$, то $q \subset \cup\widehat{\mathscr{Q}}_1$. Последнее в силу (c) влечет $q \subset T(q)$. Отсюда несложно вывести, что $q = T(q)$ для всех $T(q) \in \widehat{\mathscr{Q}}_2$. Поэтому $\widehat{\mathscr{Q}}_2$ является частью разбиения $\mathscr{Q}$, а $T\restriction_{\cup\widehat{\mathscr{Q}}_2} = \mathrm{Id}$. В силу 2.5(4) $f(\mathscr{Q}) \prec \mathscr{Y}_{\pi p-3}$ и поэтому $\mathscr{Q}_{\pi(p-1)} = \bigl\{q \in \mathscr{Q} \mid f(q) \cap \mathrm{N}(\mathscr{V}; \mathscr{Y}_{\pi p-3}) = \varnothing\bigr\}$ содержится в $\widehat{\mathscr{Q}}_2$. Ясно, что все условия 2.4(i)–2.4(iv) оказываются выполненными.

Приводимое ниже следствие из теоремы 4.1 является важным элементом редукции общей теоремы о незаузленности к теореме о ручной незаузленности:

Теорема 4.6. *Пусть $\mathscr{V}' \Subset \mathscr{U}'$ – окрестности в $X \cong \nu^k$, $\varphi\colon X \to X$ – гомеоморфизм, тождественный вне $\mathscr{V}'$. Тогда для любого покрытия $\varepsilon \in \operatorname{cov} X$ существует такое покрытие $\delta \in \operatorname{cov} X$, что для любых компактов $Z_1, Z_2' \subset X$ (которые, естественно, будут ручными $Z$-множествами), совпадающих вне $\mathscr{V}'$, и для любого гомеоморфизма $\psi\colon Z_1 \to Z_2'$, $\operatorname{dist}(\psi, \varphi\restriction_{Z_1}) \prec \delta$, тождественного вне $\mathscr{V}'$, существует продолжающий $\psi$ гомеоморфизм $\widehat{\psi}\colon X \to X$, для которого $\operatorname{dist}(\widehat{\psi}, \varphi) \prec \varepsilon$ и $\widehat{\psi} = \mathrm{Id}$ вне $\mathscr{U}'$.*

*Указание.* Применить теорему 4.1 для $X = Y$, $f = \mathrm{Id}$, $\mathscr{V} \rightleftharpoons \varphi^{-1}(\mathscr{V}') \Subset \mathscr{U} \rightleftharpoons \varphi^{-1}(\mathscr{U}')$, а также $c \rightleftharpoons \varphi^{-1}(\varepsilon)$ и частичного гомеоморфизма $h = \varphi^{-1} \circ \psi\colon Z_1 \to Z_2 \rightleftharpoons \varphi^{-1}(Z_2')$.

Наконец, отметим, что из приведенной в этой главе процедуры улучшения связности разбиений легко вывести следующий результат. Доказательство оставляем читателю.

Теорема 4.7. *Пусть $X \cong \nu^k$. Тогда для любых $\varepsilon \in \operatorname{cov} X$ и $H\colon X \to X \in \mathrm{UV}^{k-1}$ существует гомеоморфизм $\widetilde{h}\colon X \to X$, для которого $\operatorname{dist}(H, \widetilde{h}) \prec \varepsilon$.*

## § 5. Общая теорема о незаузленности

Напомним, что отображение $f\colon X \to Y$ есть совершенная $k$-резольвента над польским $\mathrm{AE}(k)$-пространством $Y$.

Теорема 5.1 (общая теорема о незаузленности). *Для любого покрытия $c \in \operatorname{cov} Y$, любых окрестностей $\mathscr{V} \Subset \mathscr{U} \subset Y$ и любых $Z$-множеств $Z_1, Z_2 \subset \mathscr{V}^{\bullet} \rightleftharpoons f^{-1}(\mathscr{V})$ существует такое покрытие $c' \in \operatorname{cov} Y$, что для любого гомеоморфизма $h\colon Z_1 \to Z_2$, $\operatorname{dist}(h, \mathrm{Id}) \prec (c')^{\bullet}$, существует гомеоморфизм $\widehat{h}\colon X \to X$, продолжающий $h$, такой, что*

(1) $\operatorname{dist}(\widehat{h}, \mathrm{Id}) \prec c^{\bullet}$;

(2) $\widehat{h} = \mathrm{Id}_X$ *вне* $\mathscr{U}^{\bullet}$.

Сначала заметим, что из сильной универсальности $X$ легко следует

Лемма 5.2. *Пусть* $F \subset_Z X$, $\mathscr{V} \subset X$ *– открытое множество. Тогда для любого компакта* $A \subset X$ *существует сколь угодно близкий к* $\mathrm{Id}_X$ *частичный гомеоморфизм* $\xi\colon A \to A' = \xi(A)$ *такой, что* $A$ *совпадает с* $A'$ *вне* $\mathscr{U}$ *и* $A' \cap F = \varnothing$.

Из леммы 5.2 с помощью теоремы 4.6 и полноты пространства гомеоморфизмов (с “limitation”-топологией) следует важный факт о связи произвольных и ручных $Z$-множеств в $\nu^k$, позволяющий редуцировать общую теорему о незаузленности к теореме о ручной незаузленности.

Теорема 5.3. *Пусть* $F \subset_Z X \cong \nu^k$. *Тогда для любых окрестностей* $\mathscr{V} \Subset \mathscr{U} \subset X$, $F \subset \mathscr{V}$, *и для любого* $\varepsilon \in \operatorname{cov} X$ *существует гомеоморфизм* $g\colon X \to X$, *для которого* $\operatorname{dist}(g, \mathrm{Id}) \prec \varepsilon$, $g = \mathrm{Id}$ *вне* $\mathscr{U}$, *а* $g(F) \subset X$ *есть ручное* $Z$*-множество.*

Доказательство. Фиксируем универсальный $Z$-детектор $\{X_i\}$, состоящий из компактов (теорема 1.15), а также последовательность $\mathscr{V}_0 \rightleftharpoons \mathscr{V} \Subset \mathscr{V}_1 \Subset \mathscr{V}_2 \Subset \dots \Subset \mathscr{U} \subset X$ окрестностей.

В силу леммы 5.2 существует сколь угодно близкий к $\varphi_0 \rightleftharpoons \mathrm{Id}_X$ частичный гомеоморфизм $\xi_1\colon X_1 \to X_1' = \xi_1(X_1)$ такой, что $X_1$ совпадает с $X_1'$ вне $\mathscr{V}_0$ и $X_1' \cap F = \varnothing$. По теореме 4.6 существует сколь угодно близкий к $\varphi_0$ гомеоморфизм $\varphi_1\colon X \to X$, продолжающий $\xi_1$, такой, что $\varphi_1 = \varphi_0$ вне $\mathscr{V}_1$.

Вновь из леммы 5.2 следует, что существует сколь угодно близкий к $\varphi_1$ частичный гомеоморфизм $\xi_2\colon X_2 \to X_2' = \xi_2(X_2)$ такой, что $X_2$ совпадает с $X_2'$ вне $\mathscr{V}_1$ и $X_2' \cap F = \varnothing$. По теореме 4.6 существует сколь угодно близкий к $\varphi_1$ гомеоморфизм $\varphi_2\colon X \to X$, продолжающий $\xi_2$, такой, что $\varphi_2 = \varphi_1$ вне $\mathscr{V}_2$. При этом выбирается столь близкая аппроксимация, что условия, полученные на предыдущем шаге, не будут нарушены.

Теперь должно быть ясно, как продолжить эти построения, в результате которых мы получим последовательность таких гомеоморфизмов $\{\varphi_i\colon X \to X\}$, что $\varphi_i = \varphi_{i-1}$ вне $\mathscr{V}_i$ и $f(X_i) \cap F = \varnothing$ для всех $i$. Так как пространство гомеоморфизмов с “limitation”-топологией является пространством Choquet, то при условии достаточной близости соседних гомеоморфизмов $\varphi \rightleftharpoons \lim \varphi_i\colon X \to X$ также будет гомеоморфизмом (сколь угодно близким к Id). При этом можно считать, что условия, полученные на индуктивном шаге, не будут нарушены: $\varphi(X_i) \cap F = \varnothing$ для всех $i$.

В качестве искомого гомеоморфизма $g\colon X \to X$ берем $\varphi^{-1}$. Так как

$$g(F) \cap \bigl(\bigcup X_i\bigr) = \varphi^{-1}(F) \cap \bigl(\bigcup X_i\bigr) = \varnothing,$$

то $g(F) \subset X$ есть ручное $Z$-множество. Условие $g = \mathrm{Id}$ вне $\mathscr{U}$ выполнено в силу построения.

Для доказательства теоремы 5.1 сначала применяем к $Z$-множествам $F_1$ и $F_2$ теорему 5.3, в результате чего они будут сколь угодно малым движением (гомеоморфизмом) переведены в ручные $Z$-множества $F_1'$ и $F_2'$. Далее следует воспользоваться теоремой 4.1 о ручной незаузленности. Все детали этого плана оставляем читателю.

## § 6. Теоремы о совершенных сжатиях

Теорема 5.1 о незаузленности и сжимающий критерий (теорема 1.8) влекут следующий факт.

Теорема 6.1 (о совершенном $Z$-сжатии). *Если $X \cong \nu^k$, то любое совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $f\colon X \to Y$, $\mathrm{Cl}\,\mathscr{H}_f \subset_{Z_k} X$, является сильным почти гомеоморфизмом (и, следовательно, $Y$ есть $k$-мерное сильно $k$-универсальное $\mathrm{AE}(k)$-пространство).*

Значительно более сложным является доказательство теоремы о сжатии совершенного $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображения, у которого множество сингулярных точек есть $\sigma Z$-множество.

Теорема 6.2 (о совершенном $\sigma Z$-сжатии). *Пусть $f\colon X \to Y$ – совершенная $k$-резольвента над $k$-мерным польским сильно $k$-универсальным $\mathrm{AE}(k)$-пространством $Y$. Если $\mathscr{H}_f \subset X$ является счетным объединением ручных $Z$-множеств, то $f$ допускает сжатие.*

Доказательство теоремы 6.2. Пусть фиксированы покрытия $c_Y \in \operatorname{cov} Y$ и $c_X \in \operatorname{cov} X$. Полагаем $\bar{s}_X \rightleftharpoons c_X$ и находим такое покрытие $\bar{c}_Y \in \operatorname{cov} Y$, что $(\bar{c}_Y)^4 \prec c_Y$. Для $Z_1 = Z_2 = \varnothing$ и $\mathscr{V} = Y$ рассмотрим быстро убывающую последовательность чисел $\mathscr{S}_p = \{\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots > \varepsilon_{\pi p}\}$, $p = k(k+1)/2 + 1$.

Пусть $\widehat{\mathscr{Q}}$ есть $k$-разбиение пространства $X$ с полным нервом, для которого выполнено условие (1) из § 2: $\widehat{\mathscr{Q}} \prec \mathscr{X}_{\pi p}$ и $f(\widehat{\mathscr{Q}}) \prec \mathscr{Y}_{\pi p}$. В силу 4.4(ii) существует $\mathscr{S}_{p-1}$-приемлемая тройка $(\mathscr{Q}', T', \beta')$, которая с помощью предложения 3.6 перестраивается в $\mathscr{S}_0$-приемлемую тройку $(\mathscr{Q}, T, \beta)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $k$-разбиение $X$. Теперь возможно завершить доказательство теоремы 6.2 применением предложения 3.1.

Таким образом, доказательство теоремы 6.2 сводится к доказательству существования приемлемых троек (предложение 4.4).

Доказательство предложения 4.4(ii). Ясно, что существует дискретное семейство $\mathscr{F} \rightleftharpoons \{x_{A'} \in \widehat{q}_{A'} \mid A' \subset A\} \subset X$ точек, не пересекающееся с $\mathscr{H}_f$. При этом выполнено

(1) $\widehat{v}(x_{A'}) \in \bigcap \{\mathring{\mathrm{St}}\langle \widehat{q}_\alpha \rangle \mid \alpha \in A'\}$ для любого $A' \subset A$.

Так как $f \in \mathrm{UV}^{k-1}$, а $Y$ является сильно $k$-универсальным пространством размерности $k$, то существует аппроксимативное сечение $s\colon Y \to X$ отображения $f$ такое, что

(2) $\cup \mathscr{F} \subset \mathrm{Im}(s)$ и $\mathrm{dist}(f \circ s, \mathrm{Id}_Y) \prec \mathscr{Y}_{\pi p}$.

Последнее влечет свойство 2.4(ii) для композиции $\beta \rightleftharpoons \widehat{v} \circ s \circ f\colon X \to \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle$: $\mathrm{dist}(\beta, \widehat{v}) \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi p-1}}$. Также очевидно, что $\beta(f^{-1}(y)) \prec \mathscr{N}_{\mathscr{X}_{\pi p}}$ для любого $y \in Y$ – свойство 2.4(v) также выполняется.

Так как $\widehat{v}\colon X \to \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle$ является $k$-эквивалентностью относительно $\mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi p}} \in \operatorname{cov} \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle$, то из свойства 2.4(ii) и предложения 2.3 следует $k$-эквивалентность отображения $\beta$ относительно $\mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi p-2}} \prec \mathscr{N}_{\mathscr{Y}^\bullet_{\pi(p-1)+1}}$ – свойство 2.4(i) также выполнено.

В силу (2) отображение $\beta\colon X \to \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle$ удовлетворяет условию предложения 4.5. Следовательно, существует естественная трансформация $T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}}$, порожденная отображением $\beta$ (предложение 4.5).

# Глава 2. Теория разложений

Теория разложений, развиваемая во второй главе, посвящена доказательству следующих теорем:

(a) *о почти гомеоморфности совершенных $k$-резольвент*: любое совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $f\colon \nu^k \to Y$ из $\nu^k$ в польское $k$-мерное сильно $k$-универсальное $\mathrm{AE}(k)$-пространство $Y$ является почти гомеоморфизмом;

(b) *о существовании совершенных $k$-резольвент*: для любого польского $k$-мерного сильно $k$-универсального $\mathrm{AE}(k)$-пространства $Y$ существует совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $f\colon \nu^k \to Y$,

из которых непосредственно получается характеризационная теорема.

## § 7. Теорема об улучшении совершенной резольвенты

Теорема 7.1, являющаяся следствием теоремы 5.1 о незаузленности, совместно с теоремой 6.2 о совершенном $\sigma Z$-сжатии доказывают свойство (a).

Теорема 7.1 (об улучшении совершенной резольвенты). *Если $f\colon \nu^k \to Y$ есть совершенная $k$-резольвента над польским сильно $k$-универсальным $\mathrm{AE}(k)$-пространством $Y$, то для любого $\theta \in \operatorname{cov} Y$ существует совершенная $k$-резольвента $g\colon \nu^k \to Y$, $\theta$-близкая к $f$, для которой $\mathscr{H}_g$ является ручным $\sigma Z_k$-множеством $\nu^k$, а $\mathscr{N}_g$ является $\sigma Z_k$-множеством $Y$.*

Пространство $X$ называется *гибким*, если для любого совершенного $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображения $f\colon X \to Y$ в сильно $k$-универсальное польское пространство $Y$, $\mathscr{N}_f \subset_{\sigma Z_k} Y$, для любого открытого множества $\mathscr{U}$, $\operatorname{Cl}\mathscr{N}_f \subset \mathscr{U} \subset Y$, а также для любых компактов $E_1, E_2 \subset_{Z_k} X$ и $F \subset_{Z_k} Y$ таких, что $E_1 \cap (\mathscr{H}_f \cup E_2) = \varnothing$ и $F \subset \operatorname{Cl}\mathscr{N}_f$, и для любого $\theta \in \operatorname{cov} Y$ существует совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $g\colon X \to Y$ такое, что

($\alpha$) $\operatorname{dist}(f, g) \prec \theta$;

($\beta$) $f = g$ на $\bigl(E_1 \cup (X \setminus \mathscr{U}^\bullet)\bigr)$ (и, следовательно, $f^{-1}(\mathscr{U}) = g^{-1}(\mathscr{U})$);

($\gamma$) $\mathscr{N}_g = \mathscr{N}_f$, а также $g(E_2) \cap (\mathscr{N}_g \cup F) = \varnothing$ (и поэтому $g(E_1), g(E_2) \subset Y \setminus \mathscr{N}_g$ суть дизъюнктные $Z_k$-компакты, естественно гомеоморфные $E_1$ и $E_2$ соответственно).

Важным шагом на пути доказательства теоремы 7.1 является установление гибкости пространства Небелинга.

Предложение 7.2. *Пространство $X \cong \nu^k$ является гибким.*

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $E_2 \subset \mathscr{U}^\bullet$. Из $F \subset_{Z_k} Y$, $\mathscr{N}_f \subset_{\sigma Z_k} Y$ и сильной $k$-универсальности $Y$ легко следует существование вложения $e\colon E_2 \hookrightarrow X \setminus (\mathscr{H}_f \cup f^{-1}F)$ такого, что $\operatorname{dist}(f \circ e, f\restriction_{E_2}) < \delta$. Так как пространство $X$ незаузленно, то существует гомеоморфизм $h\colon X \to X$, продолжающий $e$, такой, что $\operatorname{dist}(f \circ h, f) \prec \varepsilon = \varepsilon(\delta)$ и $h = \mathrm{Id}$ вне окрестности $f^{-1}(N(f(E_2); \varepsilon))$, не пересекающейся с $E_1 \cup (X \setminus \mathscr{U}^\bullet)$. Отображение $g \rightleftharpoons f \circ h$ будет искомым, если покрытие $\varepsilon \in \operatorname{cov} Y$ и константа $\delta$ выбраны достаточно малыми. Действительно, $\mathscr{N}_{f\circ h = g} = \mathscr{N}_f$, $E_2 \cap g^{-1}F = h^{-1}(h(E_2) \cap f^{-1}F) = h^{-1}(e(E_2) \cap f^{-1}F) = \varnothing$ и $E_2 \cap \mathscr{H}_g = h^{-1}(h(E_2) \cap \mathscr{H}_f) = h^{-1}(e(E_2) \cap \mathscr{H}_f) = \varnothing$. Так как $h = \mathrm{Id}$ на $E_1 \cup (X \setminus \mathscr{U}^\bullet)$, то $f = g$ на $E_1 \cup (X \setminus \mathscr{U}^\bullet)$.

Теорема 7.3. *Пусть $X \cong \nu^k$, $Y$ является сильно $k$-универсальным польским пространством, а отображение $f\colon X \to Y \in \mathrm{UV}^{k-1}$ совершенно. Если $\mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_f \subset_{Z_k} Y$, то $f$ есть почти гомеоморфизм.*

Доказательство. Достаточно в силу теоремы 6.1 установить, что существует сколь угодно близко аппроксимирующее $f$ совершенное отображение $g\colon X \to Y \in \mathrm{UV}^{k-1}$ такое, что $\mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_g \subset \mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_f$, а $\mathrm{Cl}\,\mathscr{H}_g \subset X$ есть ручное $Z$-множество.

Пусть $\{\theta_i \in \operatorname{cov} Y\}_{i\geqslant 0}$ – фундаментальная последовательность покрытий, для которой $\theta_0 \circ \theta_1 \circ \theta_2 \circ \dots \prec \theta$, и пусть $\mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_f$ – пересечение убывающей последовательности своих окрестностей $U_{n+1} \Subset U_n$, $n \geqslant 1$.

Пусть $F_X = \bigsqcup\{B_i \mid i \geqslant 1\}$ – универсальный $Z_k$-детектор $X$ (см. теорему 1.15). Обозначим компакт $B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_n \subset_{Z_k} X$ через $B(n)$. Полагаем $f_0 \rightleftharpoons f$ и $B(0) = C(0) = \varnothing$.

Применяя гибкость $X$ (предложение 7.2) к $f_{n-1} \in \mathrm{UV}^{k-1}$, дизъюнктным $Z_k$-компактам $E_1 \rightleftharpoons B(n-1)$, $E_2 \rightleftharpoons B_n \subset X$ и $F \rightleftharpoons \mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_f \subset Y$, легко построить совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $f_n\colon X \to Y$ и число $\delta_n < 1$ такие, что будут выполнены условия $(\mathrm{i})_n$–$(\mathrm{v})_n$ при $n = 1$:

$(\mathrm{i})_n$ $\operatorname{diam} f_{n-1}^{-1}(\mathrm{N}(y; 3\delta_n)) < 2^{-n}$ для всех $y \in C(n-1) \rightleftharpoons f_{n-1}(B(n-1))$;

$(\mathrm{ii})_n$ $\operatorname{dist}(f_n, f_{n-1}) \prec \sigma_{n-1}$, где $\sigma_{n-1} \prec \theta_{n-1}$ и $\operatorname{mesh}\sigma_{n-1} < \delta_n$;

$(\mathrm{iii})_n$ $\mathscr{N}_{f_n} = \mathscr{N}_{f_{n-1}}$, а также $f_n = f_{n-1}$ на $X \setminus U_n^\bullet$ и на $B(n-1)$;

$(\mathrm{iv})_n$ $f_n(B_n)$ не пересекается с $\mathscr{N}_f = \mathscr{N}_{f_0} = \mathscr{N}_{f_1} = \dots = \mathscr{N}_{f_{n-1}}$ и, более того,

$(\mathrm{v})_n$ $f_n(B_n)$ не пересекается с $Z_k$-множеством $F = \mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_f$.

Теперь понятно, как, многократно используя гибкость $X$, построить последовательность $\{f_n\colon X \to Y\}_{n=2}^\infty$ совершенных $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений и последовательность $\{2\delta_{n+1} < \delta_n\}_{n=2}^\infty$ чисел таких, что будут выполнены свойства $(\mathrm{i})_n$–$(\mathrm{v})_n$ при $n \geqslant 2$.

Очевидно, что существует равномерный предел $g = \lim f_n$, и он является $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображением, $\theta$-близким к $f$. Так как пространство гомеоморфизмов с “limitation”-топологией является пространством Choquet, то $g$ будет совершенным отображением при условии более тщательного выбора близости аппроксимаций в $(\mathrm{ii})_n$. В силу теоремы 1.10, примененной к последовательности $\{f_i\}_{i=n}^\infty$, имеем

(vi) $C(n) \cap \mathscr{N}_g = \varnothing$ для любого $n$ и, тем самым, $\bigcup\{C(n) \mid n \geqslant 1\}$ дизъюнктно с $\mathscr{N}_g$.

Используя $(\mathrm{iii})_n$, $n \geqslant 1$, и соотношение $\bigcap U_i = \mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_f$, несложно получить, что

(vii) $\mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_g \subset \mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_f$;

(viii) $g{\restriction}_{B(n)} = f_n{\restriction}_{B(n)}$ и $C(n-1) \subset C(n) = f_n(B(n)) = g(B(n))$ для всех $n$;

(ix) $C(n) \cap \mathscr{N}_{f_n} = \varnothing$ для всех $n$ и, более того, $C(n) \cap \mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_{f_n} = \varnothing$.

Из (vi) и (viii) легко следует, что

(x) $\bigsqcup\{B_i \mid i \geqslant 1\}$ дизъюнктно с $\mathscr{H}_g$, т.е. $\mathscr{H}_g \subset X$ есть ручное $Z$-множество.

Дополнительно принимая во внимание $(\mathrm{v})_n$, $n \geqslant 1$, и (vii), получаем

$$\bigcup\{C(n) \mid n \geqslant 1\} \cap \mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_g = \varnothing \quad \text{и} \quad \bigsqcup\{B_i \mid i \geqslant 1\} \cap \mathrm{Cl}\,\mathscr{H}_g = \varnothing,$$

что влечет требуемое $\mathrm{Cl}\,\mathscr{H}_g \subset X \setminus F_X$.

Дословно повторяя рассуждения из доказательства теоремы 7.3 (формально заменяя $F = \mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_f$ на одноточечное множество, лежащее в $\mathrm{Cl}\,\mathscr{N}_f$), несложно установить следующий факт.

Теорема 7.4. *Пусть $X \cong \nu^k$, $Y$ является сильно $k$-универсальным польским пространством, а отображение $f\colon X \to Y \in \mathrm{UV}^{k-1}$ совершенно. Если $\mathscr{N}_f \subset_{\sigma Z_k} Y$, то $f$ сколь угодно близко аппроксимируется совершенным $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображением $g\colon X \to Y$ с ручным $\sigma Z_k$-множеством $\mathscr{H}_g$.*

Если в теореме 7.1 установлено $\mathscr{H}_g \subset_{\sigma Z_k} \nu^k$, то отсюда следует, что $\mathscr{N}_g \subset_{\sigma Z_k} Y$: композиция $X_0 \hookrightarrow \nu^k \xrightarrow{g} Y$, где $X_0 \rightleftharpoons \nu^k \setminus \mathscr{H}_g$, двух $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений является $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображением, а $g_0 \rightleftharpoons g{\restriction}_{X_0}\colon X_0 \to Y_0 \rightleftharpoons Y \setminus \mathscr{N}_g$ есть гомеоморфизм. С учетом этого замечания доказательство теоремы 7.1 получается как результат последовательного применения приводимой ниже теоремы и теоремы 7.4.

Теорема 7.5. *Пусть $X \cong \nu^k$, $Y$ есть сильно $k$-универсальное польское пространство, а отображение $f\colon X \to Y \in \mathrm{UV}^{k-1}$ совершенно. Тогда $f$ сколь угодно близко аппроксимируется совершенным $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображением $g\colon X \to Y$, для которого $\mathscr{N}_g \subset_{\sigma Z_k} Y$.*

Прежде всего установим вспомогательный факт.

Лемма 7.6. *Пусть выполнены условия теоремы 7.5. Тогда для любых дизъюнктных компактов $F_1 \sqcup F_2 \subset_{Z_k} Y$ таких, что $F_2 \in \mathrm{AE}(k)$ и $F_1 \cap \mathscr{N}_f = \varnothing$, а также для любого $\theta \in \operatorname{cov} Y$ существует совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $g\colon X \to Y$ такое, что*

($\delta$) $\operatorname{dist}(f, g) \prec \theta$;
($\varepsilon$) $\mathscr{N}_g \subset \mathscr{N}_f$;
($\zeta$) $(F_1 \sqcup F_2) \cap \mathscr{N}_g = \varnothing$.

Доказательство. Представим совершенное отображение $f$ в виде композиции $X \xrightarrow{f'} X \cup_f F_2 \xrightarrow{f''} Y$, где $X \cup_f F_2 \in \mathrm{AE}(k)$ есть редуцированная склейка. В силу теоремы 1.16 $f', f'' \in \mathrm{UV}^{k-1}$, компакт $F_2$ естественно лежит в $X \cup_f F_2$ в качестве $Z_k$-множества и содержит $\mathscr{N}_{f'}$. Отображение $f'$, являющееся почти гомеоморфизмом в силу теоремы 7.3, аппроксимируем гомеоморфизмом $h$: $\operatorname{dist}(f', h) \prec \sigma$. Так как $\mathscr{N}_{f'' \circ h} = \mathscr{N}_{f''} = \mathscr{N}_f \setminus (F_1 \sqcup F_2)$, то легко проверить, что отображение $g \rightleftharpoons f'' \circ h$ будет искомым, если покрытие $\sigma \in \operatorname{cov} Y$ выбрано достаточно мелким.

Доказательство теоремы 7.5. Из теоремы 1.15 следует, что существует $Z_k$-детектор $F_Y = \bigsqcup A_i \subset Y$, состоящий из дизъюнктного семейства $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ $\mathrm{AE}(k)$-компактов. Пусть $\{\theta_i \in \operatorname{cov} Y\}_{i \geqslant 0}$ есть фундаментальная последовательность покрытий, для которой $\theta_0 \circ \theta_1 \circ \theta_2 \circ \cdots \prec \theta$. Полагая $f_0 \rightleftharpoons f$ и используя свойства ($\delta$), ($\varepsilon$) и ($\zeta$) из леммы 7.6, построим совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $f_1\colon X \to Y$ и число $\delta_1 < 1$ такие, что будут выполнены свойства $(1)_n$–$(4)_n$ при $n = 1$:

$(1)_n$ $\operatorname{dist}(f_n, f_{n-1}) \prec \sigma_{n-1}$, где $\sigma_{n-1} \prec \theta_{n-1}$ и $\operatorname{mesh} \sigma_{n-1} < \delta_n$;
$(2)_n$ $(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n) \cap \mathscr{N}_{f_n} = \varnothing$;
$(3)_n$ $\mathscr{N}_{f_n} \subset \mathscr{N}_{f_{n-1}}$;
$(4)_n$ $\operatorname{diam} f_{n-1}^{-1}(\mathrm{N}(a; 3\delta_n)) < 2^{-n}$ для всех $a \in A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_{n-1}$.

Многократно используя свойства ($\delta$), ($\varepsilon$) и ($\zeta$) из леммы 7.6, построим последовательность $\{f_n\colon X \to Y\}_{n=2}^{\infty}$ совершенных $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений и последовательность $\{2\delta_{n+1} < \delta_n\}_{n=2}^{\infty}$ чисел таких, что будут выполнены свойства $(1)_n$–$(4)_n$ при $n \geqslant 2$.

Очевидно, что существует равномерный предел $g = \lim f_n \in \mathrm{UV}^{k-1}$, который $\theta$-близок к $f$. По той же причине, что и в доказательстве теоремы 7.3,

$g$ можно считать совершенным отображением. В силу теоремы 1.10, примененной к последовательности $\{f_n\}_{n=m}^{\infty}$, имеем $(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_m) \cap \mathscr{N}_g = \varnothing$ для любого $m$. Следовательно, $(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots) \cap \mathscr{N}_g = F_Y \cap \mathscr{N}_g = \varnothing$. Так как $F_Y$ есть $Z_k$-детектор, то отсюда следует требуемое $\mathscr{N}_g \subset_{\sigma Z_k} Y$.

## § 8. Переопределение совершенных $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений

Теорема 8.1 (о переопределении совершенных $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений). *Если $f\colon X \to Y$ есть совершенная $k$-резольвента над польским $k$-мерным сильно $k$-универсальным $\mathrm{AE}(k)$-пространством $Y$, то $f$ допускает совершенное переопределение, т.е. для любого совершенного отображения $g\colon F \to Y$ $Z$-множества $F \subset X$ существует совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $\widehat{g}\colon X \to Y$, $\widehat{g}{\restriction}_F = g$.*

Если всюду опустить совершенность, то теорема будет доказываться в духе рассуждений из [6; 5.1.2]. Однако имеющаяся ситуация сложнее и требует либо усиления этих рассуждений, либо привлечения резольвенты Дранишникова. Мы избираем вторую возможность.

Лемма 8.2. *Для любого компактного полиэдра $P$ существует совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $f\colon M \to P$ из менгеровского многообразия $M$ такое, что*

$(1)_k$ *$f$ является послойно $k$-универсальным отображением;*[6]

$(2)_k$ *$f^{-1}(F) \subset_Z M$ для любого $F \subset_{Z_k} P$.*

При доказательстве леммы 8.2 следует совместить [9; 1.3] и [10; 3.1] с известным фактом, что любое отображение $k$-мерного сепарабельного пространства в компакт допускает продолжение на компакт той же размерности $k$.

Применяя слегка модифицированное рассуждение из [10; 7.1] к лемме 8.2, можно получить следующий факт.

Лемма 8.3. *Существуют совершенные $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображения $f\colon \nu^k \to \nu^k$ и $g\colon \nu^k \to \nu^{k+1}$, обладающие свойствами $(1)_k$, $(2)_k$.*

Из $(1)_k$ легко следует, что отображение $f$ в лемме 8.3 есть совершенная $\mathrm{UV}^{k-1}$-ретракция. Так как совершенное отображение $g \rightleftharpoons f \sqcup f\colon \nu^k \sqcup \nu^k \to \nu^k$ может быть послойно $Z$-вложено в $f$, то справедлива

Лемма 8.4. *В пространстве $\nu^k$ существуют дизъюнктные $Z$-множества $K$ и $L$, гомеоморфные $\nu^k$, для которых существует совершенная $\mathrm{UV}^{k-1}$-ретракция $r\colon \nu^k \to K$ такая, что $r{\restriction}_L\colon L \to K$ есть гомеоморфизм.*

Предложение 8.5. *Пусть $g\colon F \to Y \subset \nu^k$ есть совершенное отображение $k$-мерного польского пространства $F$, а $f$ есть совершенная $\mathrm{UV}^{k-1}$-ретракция из леммы 8.3. Тогда существует $Z$-вложение $h\colon F \to \widehat{F}$ в $k$-мерное польское пространство $\widehat{F} \rightleftharpoons f^{-1}(Y)$ такое, что $\widehat{g} \circ h = g$, где $\widehat{g} = f{\restriction}\colon \widehat{F} \to Y$ есть совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение.*

Доказательство теоремы 8.1. Так как $f$ совершенно, а $X$ сильно $k$-универсально, то $Y$ является локально конечно $D^k$-аппроксимируемым, а в силу замечания, сделанного после определения 1.12, и дискретно $D^k$-аппроксимируемым. Из полноты $Y \in \mathrm{AE}(k)$ следует сильная $k$-универсальность $Y$. Тогда

[6]То есть для любого совершенного отображения $g\colon Z \to g(Z) \subset P$ польского пространства $Z$, $\dim Z \leqslant k$, существует такое замкнутое вложение $h\colon Z \hookrightarrow g^{-1}(g(Z))$, что $f \circ h = f \circ g$ и $h(Z)$ есть послойное $Z$-множество.

из теоремы о почти гомеоморфности совершенных $k$-резольвент (п. (a), см. начало гл. 2) следует, что $f$ есть почти гомеоморфизм, а $Y \cong \nu^k$.

В силу леммы 8.4 существует такая совершенная $\mathrm{UV}^{k-1}$-ретракция $r\colon \widehat{Y} \to Y$, что $\widehat{Y} \cong \nu^k$ и $Y \subset_Z \widehat{Y}$. Поскольку $X = \nu^k$ сильно $k$-универсально, то в силу предложения 8.5 можно считать, что $g$ является совершенным $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображением.

Как легко видеть, фактор-отображение $p\colon X \to X \cup_g g(F)$ является совершенным $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображением, а склейка $X \cup_g g(F)$ есть польское $k$-мерное сильно $k$-универсальное $\mathrm{AE}(k)$-пространство. Поэтому в силу теоремы о почти гомеоморфности совершенных $k$-резольвент $p$ есть почти гомеоморфизм и $X \cup_g g(F) \cong \nu^k$. Ясно также, что $p(F) = g(F)$ естественно лежит в $X \cup_g g(F)$ как $Z$-множество.

По теореме 5.1 о незаузленности, примененной к частичному гомеоморфизму $h = \mathrm{Id}\colon p(F) = g(F) \to g(F)$, существует гомеоморфизм $\widehat{h}\colon X \cup_g g(F) \to \widehat{Y}$, продолжающий $h$. Легко видеть, что искомым совершенным $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображением $\widehat{g}\colon X \to Y$ является композиция $r \circ \widehat{h} \circ p$.

## § 9. Теорема о существовании совершенной резольвенты

Пусть $0 \leqslant s \leqslant k$. Под *$s$-резольвентой* понимается любое $\mathrm{UV}^{s-1}$-отображение из пространства Небелинга $\nu^k$ в $Y$. Будем говорить, что $Y$ *допускает $s$-резольвенту.* Целью этого параграфа будет следующая

Теорема 9.1 (о существовании совершенной резольвенты). *Если $Y$ есть $k$-мерное польское сильно $k$-универсальное* $\mathrm{AE}(k)$*-пространство, то существует совершенная $k$-резольвента $f\colon \nu^k \to Y$.*

Доказательство теоремы отложим до конца параграфа, а сначала приведем ряд вспомогательных фактов, среди которых следующий широко известен.

(i) Пусть $A$, $B$ и $C$ – компакты, лежащие в одном пространстве, и $s < k$. Тогда $A \cup B \in \mathrm{UV}^s$, если $A, B \in \mathrm{UV}^s$, а $A \cap B \in \mathrm{UV}^{s-1}$; $A \cup B \cup C \in \mathrm{UV}^s$, если $A, B, C \in \mathrm{UV}^s$, $A \cap B$, $B \cap C \in \mathrm{UV}^{s-1}$, а $A \cap C = \varnothing$.

Теорема 8.1 о переопределении совершенных $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений влечет ряд утверждений о допустимости совершенных резольвент.

Предложение 9.2. *Пусть пространство $N$ есть объединение своих замкнутых подмножеств $N_i$, $i = 1, 2$, причем $N_1$, $N_2$ и $N_0 \rightleftharpoons N_1 \cap N_2$ гомеоморфны $\nu^k$. Тогда пространство $N = N_1 \cup N_2$ допускает совершенную $k$-резольвенту.*

Доказательство. Пусть $\Delta^N$ есть симплекс размерности $N = 2k + 3$. Так как $U \rightleftharpoons \nu^{k-1}_{\mathfrak{L}}(\Delta^{N-1} \times \{1\})$ и $V \rightleftharpoons \nu^{k-1}_{\mathfrak{L}}(\Delta^{N-1} \times \{2\})$ гомеоморфны $\nu^{k-1}$, то в силу леммы 8.3 существуют совершенные $\mathrm{UV}^{k-2}$-сюръекции $g_U\colon U \to N_0$ и $g_V\colon V \to N_0$. Так как $U \sqcup V \subset_Z \nu^k_{\mathfrak{L}}(\Delta^{N-1} \times [1, 2]) \cong \nu^k$, то в силу теоремы 8.1 существует совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $\widehat{g}\colon \nu^k_{\mathfrak{L}}(\Delta^{N-1} \times [1, 2]) \to N_0$ такое, что $\widehat{g}\restriction_U = g_U$ и $\widehat{g}\restriction_V = g_V$.

Так как $U \subset_Z \nu^k_{\mathfrak{L}}(\Delta^N \times \{1\})$, то в силу теоремы 8.1 существует совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $f_1\colon \nu^k_{\mathfrak{L}}(\Delta^N \times \{1\}) \to N_1$ такое, что $f_1\restriction_U = g_U\restriction_U$. Аналогично строится совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $f_2\colon \nu^k_{\mathfrak{L}}(\Delta^N \times \{2\}) \to N_2$, $f_2\restriction_V = g_V\restriction_U$.

В силу (i) отображение $f\colon \nu^k_{\mathfrak{L}}\bigl(\Delta^N \times \{1\} \cup \Delta^{N-1} \times [1,2] \cup \Delta^N \times \{2\}\bigr) \to N_1 \cup N_2$, определяемое формулами $f\restriction_{\nu^k_{\mathfrak{L}}(\Delta^N\times\{1\})} = f_1$, $f\restriction_{\nu^k_{\mathfrak{L}}(\Delta^{N-1}\times[1,2])} = \widehat{g}$ и $f\restriction_{\nu^k_{\mathfrak{L}}(\Delta^N\times\{2\})} = f_2$, есть $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение. Ясно, что $f$ совершенно.

Предложение 9.3 (об улучшении $s$-резольвент). *Пусть $A$, $B$ и $A\cap B$ являются $\mathrm{AE}(k)$-пространствами, при этом $A$ и $B$ допускают совершенную $k$-резольвенту, а $A\cap B$ – совершенную $s$-резольвенту. Тогда $A\cup B$ допускает совершенную $\min(s+1,k)$-резольвенту.*

Доказательство. Пусть $N_0 \cong \nu^k$ лежит в $N_1 \cong \nu^k$ и $N_2 \cong \nu^k$ как $Z$-множество; $f_1\colon N_1 \to A$ и $f_2\colon N_2 \to B$ являются совершенными $k$-резольвентами, а $f_0\colon N_0 \to A\cap B$ – совершенной $s$-резольвентой. В силу теоремы 8.1 существуют совершенные $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображения $f_1'\colon N_1 \to A$ и $f_2'\colon N_2 \to B$ такие, что $f_1'\restriction_{N_0} = f_0$ и $f_2'\restriction_{N_0} = f_0$. Тем самым корректно определено совершенное отображение $h\colon N_1\cup N_2 \to A\cup B$, $h\restriction_{N_0} = f_0$, $h\restriction_{N_1} = f_1'$ и $h\restriction_{N_2} = f_2'$. В силу (i) отображение $h$ является совершенным $\mathrm{UV}^{\min(s,k-1)}$-отображением. В силу предложения 9.2 существует совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $\varphi\colon \nu^k \to N_1\cup N_2$. Легко видеть, что композиция $h\circ\varphi$ является искомым совершенным $\mathrm{UV}^{\min(s,k-1)}$-отображением.

В качестве легкого применения предложений 9.2 и 9.3 получается способ построения резольвенты замкнутого $\mathrm{AE}(k)$-подпространства $\nu^k$, который в случае $k=\infty$ содержится в [11].

Предложение 9.4. *Пусть строго $k$-универсальное $\mathrm{AE}(k)$-пространство $Y$ замкнуто вложено в пространства $L_1$ и $L_2$, гомеоморфные $\nu^k$. Предположим также, что $L_1\cup L_2$ является замкнутым подпространством в $\mathrm{AE}(k)$-пространствах $S_1$ и $S_2$, допускающих совершенную $k$-резольвенту. Если существует совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $\lambda\colon S_1\cup S_2 \to Y$, то $Y$ допускает совершенную $k$-резольвенту.*

Доказательство. Так как $Y \in \mathrm{AE}(k)$, то $Y$ является ретрактом $L_1 \cong \nu^k$. Ввиду сильной $k$-универсальности $Y$ существует такая замкнутая ретракция $r\colon L_1 \to Y$, что $r\restriction_{L_1\setminus Y}\colon L_1\setminus Y \to Y$ есть вложение. Поэтому $Y$ является совершенным ретрактом $L_1 \cong \nu^k$, т.е. $Y$ допускает совершенную $(-1)$-резольвенту. Поэтому $L_1\cup L_2 = S_1\cap S_2$ допускает совершенную 0-резольвенту. В силу предложения 9.3 $S_1\cup S_2$ допускает совершенную 1-резольвенту. Так как $\lambda\colon S_1\cup S_2 \to Y \in \mathrm{UV}^{k-1}$, то $Y$ тоже допускает совершенную 1-резольвенту. Далее, повторяя многократно ($k$ раз) предыдущее рассуждение, мы приходим к выводу, что $S_1\cap S_2$ допускает совершенную 2-резольвенту, $S_1\cup S_2$ допускает совершенную 3-резольвенту, $Y$ допускает совершенную 3-резольвенту и т.д., $Y$ допускает совершенную $\min(k, 2k+1)$-резольвенту. В итоге пространство $Y$ допускает совершенную $k$-резольвенту.

Доказательство теоремы 9.1. Пусть $M$ и $N$ гомеоморфны $\nu^k$, $K \cong \nu^k$ замкнуто лежит в $M$ и $N$ и является там $Z$-множеством. В силу предложения 9.2 $M\cup_K N$ допускает совершенную $k$-резольвенту. Пусть $L_1 \cong \nu^k$ является $Z$-множеством в $M$, и пусть $L_1\cap K = \varnothing$. В силу леммы 8.4 существует совершенная $\mathrm{UV}^{k-1}$-ретракция $c\colon M \to K$ такая, что $c\restriction_{L_1}\colon L_1 \to K$ есть гомеоморфизм. Будем рассматривать $L_1$ и $K$ как "верхнее" и "нижнее основания" "произведения", которое задается ретракцией $c$.

Не теряя общности, можно считать, что $Y \in \mathrm{AE}(k)$ замкнуто лежит в $K$. Из сильной $k$-универсальности $Y$ следует, что существует совершенная ретракция

$r\colon K \to Y$, $r^2 = r$. Через $c_1$ обозначим ретракцию $c{\restriction}_{c^{-1}(Y)}\colon c^{-1}(Y) \to Y$. Тогда редуцированную склейку $P \rightleftharpoons M \cup_{c_1} Y$, порожденную $c$, можно рассматривать как замену редуцированного произведения в $M$. Отметим, что $L_1$ и $K$ естественно лежат в $P$ и $L_1 \cap K = Y$. В силу теоремы 1.16 $P \in \mathrm{AE}(k)$, а ретракция $c$ разлагается в композицию $M \xrightarrow{c'} P \xrightarrow{c''} K$ совершенных $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений $c'$ и $c''$.

В результате аналогичных рассуждений, проведенных для $N$ и $K \subset N$, будут построены совершенная $\mathrm{UV}^{k-1}$-ретракция $d\colon N \to K$, $Z$-множество $L_2 \cong \nu^k$ в $N$ такие, что $L_2 \cap K = Y$, $d(L_2) = K$ и $d{\restriction}_{L_2}\colon L_2 \to K$ является гомеоморфизмом. Отображение $d$ задает структуру “произведения” в пространстве Небелинга $N$, при этом $K$ и $L_2$ рассматриваются как “верхнее” и “нижнее основания” $N$. Пусть $d_1 \rightleftharpoons d{\restriction}_{d^{-1}(Y)}\colon d^{-1}(Y) \to Y$. Редуцированная склейка $Q \rightleftharpoons N \cup_{d_1} Y$, порожденная $d$, рассматривается как “редуцированное произведение” в $N$. Отметим, что $K$ и $L_2$ естественно лежат в $Q \in \mathrm{AE}(k)$ и $K \cap L_2 = Y$, а $d$ разлагается в композицию $N \xrightarrow{d'} Q \xrightarrow{d''} K$ совершенных $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений $d'$ и $d''$.

Далее рассмотрим склейку $T \rightleftharpoons P \cup_K N$, которая в силу предложения 9.3 допускает совершенную $k$-резольвенту.

Лемма 9.5. *Существует совершенное* $\mathrm{UV}^{k-1}$*-отображение* $F\colon T \to L_2$ *такое, что*

(1) $f \rightleftharpoons F{\restriction}_N\colon N \to L_2$ *есть совершенное* $\mathrm{UV}^{k-1}$*-отображение*;
(2) $F{\restriction}_K$ *совпадает с ретракцией* $r\colon K \to Y$.

Доказательство леммы 9.5. Так как $N \cong L_2 \cong \nu^k$, а $K$ есть $Z$-множество в $N$, то в силу теоремы 8.1 существует такое совершенное отображение $f\colon N \to L_2 \in \mathrm{UV}^{k-1}$, что $f{\restriction}_K = r\colon K \to Y$. Зададим искомое совершенное отображение $F\colon T \to L_2$ формулами $F{\restriction}_N = f$ и $F{\restriction}_P = r \circ c'$. Ясно, что $F$ корректно определено. Отображение $F$ допускает представление в виде композиции $T \xrightarrow{\tilde{c}} N \xrightarrow{f} L_2$, где $\tilde{c}\colon P \to K$, задаваемое формулами $\tilde{c}{\restriction}_P = c''$ и $\tilde{c}{\restriction}_N = \mathrm{Id}$, как легко проверить, является совершенным $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображением. Как композиция $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений $F \in \mathrm{UV}^{k-1}$. Лемма 9.5 доказана.

В силу теоремы 1.21 склейка $S_1 \rightleftharpoons T \cup_f L_2 \in \mathrm{AE}(k)$, а $F$ разлагается в композицию совершенных $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений $T \xrightarrow{\mathscr{F}} S_1 \xrightarrow{\mathscr{G}} L_2$. Несложно проверить, что $L_1$ и $L_2$ естественно лежат в $S_1$ и $L_1 \cap L_2 = Y$.

Проведем аналогичные построения для $R \rightleftharpoons M \cup_K Q$. Тогда существует совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $\Phi\colon R \to L_1$ такое, что $\varphi \rightleftharpoons \Phi{\restriction}_M\colon M \to L_1$ есть совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение и $\Phi{\restriction}_K$ совпадает с ретракцией $r\colon K \to Y$. В силу теоремы 1.21 склейка $S_2 \rightleftharpoons R \cup_\varphi L_1 \in \mathrm{AE}(k)$, а $\Phi$ разлагается в композицию совершенных $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображений $R \xrightarrow{\Delta} S_2 \xrightarrow{\Upsilon} L_1$, при этом $L_1$ и $L_2$ естественно лежат в $S_2$ и $L_1 \cap L_2 = Y$.

Так как $S_1$ и $S_2$ допускают совершенную $k$-резольвенту, то в силу предложения 9.4 для завершения доказательства нам осталось построить совершенное $\mathrm{UV}^{k-1}$-отображение $\lambda\colon S_1 \cup S_2 \to Y$.

Лемма 9.6. *Рассмотрим естественно вложенные в* $S_1$ *подпространства* $Y \subset L_2$. *Тогда* $W_1 \rightleftharpoons S_1 \setminus (L_2 \setminus Y) \subset S_1$ *является* $\mathrm{AE}(k)$*-пространством*, $\mathscr{G}(W_1) = Y$ *и* $\mathscr{G}{\restriction}_{W_1}\colon W_1 \to Y$ *является совершенной* $\mathrm{UV}^{k-1}$*-ретракцией*.

Доказательство леммы 9.6. Так как $L_2 \setminus Y$ открыто в $S_1$, то $W_1$ замкнуто в $S_1$. Так как $S_1 \in \mathrm{AE}(k)$ и $Y = L_2 \cap W_1 \in \mathrm{AE}(k)$, то из предложения 1.18

следует $W_1 \in \mathrm{AE}(k)$. Равенства $\mathscr{G}(W_1) = Y$ и $\mathscr{G}(L_2 \setminus Y) = L_2 \setminus Y$ следуют из очевидных соотношений $r \circ c''(P) = Y$ и $\mathscr{G}\restriction_{L_2} = \mathrm{Id}$. Из $\mathscr{G}(L_2 \setminus Y) = L_2 \setminus Y$, $Y \in \mathrm{AE}(k)$ и $W_1 \in \mathrm{AE}(k)$ легко следует $\mathscr{G}\restriction_{W_1} \in \mathrm{UV}^{k-1}$. Лемма 9.6 доказана.

Аналогичные рассуждения верны и для $S_2$. Замкнутое подпространство $W_2 \rightleftharpoons S_2 \setminus (L_1 \setminus Y) \subset S_2$ есть $\mathrm{AE}(k)$, $\Upsilon(W_2) = Y$ и $\Upsilon\restriction_{W_2} \colon W_2 \to Y$ является совершенной $\mathrm{UV}^{k-1}$-ретракцией. Рассмотрим склейку $S_1 \cup_Y S_2$. Очевидно, что $S_1 \cap S_2 = L_1 \cup L_2$, $S_1 \cup_Y S_2 = W_1 \cup_Y W_2$ и $W_1 \cap W_2 = Y$. Отображение $\lambda \colon S_1 \cup_Y S_2 \to Y$ зададим как $\mathscr{G}$ на $W_1$ и как $\Upsilon$ на $W_2$. Из (i) легко следует $\lambda \in \mathrm{UV}^{k-1}$. Теорема 9.1 доказана.

## Глава 3. Зависимость постулатов

В заключительном разделе, посвященном доказательству зависимости постулатов от системы аксиом, предполагаются заданными абстрактное $\nu^k$-конструктивное $\mathrm{AE}(k)$-пространство $X$, $k$-разбиение $\widehat{\mathscr{Q}} = \{\widehat{q}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ абстрактного $\nu^k$-конструктивного $\mathrm{AE}(k)$-пространства $\widehat{X}$ с полным нервом. Ранее доказывалось, что $\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ есть $\mathrm{AE}(k)$-пространство.

### § 10. Доказательство постулата Бествины

Как было сказано в первой части работы [1], доказательство постулата Бествины сводится к доказательству существования 0-приемлемой тройки $(\mathscr{Q}, T, \beta)$. Напомним ее определение.

Пусть $\mathscr{Q}_0$ есть разбиение $F \in \mathscr{C}_X$, $F \subset_Z X$, $\widehat{\mathscr{Q}}$ – $k$-разбиение $\widehat{X} \in \mathrm{AE}(k)$ с полным нервом, а $T_0 \colon \mathscr{Q}_0 \to \widehat{\mathscr{Q}}$ – инъективное соответствие. Пусть также фиксировано отображение $\gamma \colon X_0 \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, заданное на ручном $Z$-множестве $X_0 \subset X$, $F \subset X_0$, такое, что $\gamma\restriction_F$ есть аккомпанемент $T_0$. Тройка $(\mathscr{Q}, T, \beta)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть 0-разбиение $X$, $T$ – трансформация $\mathscr{Q}$ и $\widehat{\mathscr{Q}}$, а $\beta \colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ – аккомпанемент $T$, называется 0-*приемлемой*, если

(1) $\mathscr{Q}\restriction_F = \mathscr{Q}_0$, а естественное соответствие $\mathscr{Q}_0 \hookrightarrow \mathscr{Q}$ является инъективным;
(2) $T\restriction_F = T_0$;
(3) $\beta$ есть $k$-эквивалентность и $\beta = \gamma$ на $X_0$.

Теорема 10.1. *Существует 0-приемлемая тройка $(\mathscr{Q}, T, \beta)$.*

Доказательство. Так как $X$ является сильно $k$-универсальным польским пространством [1; аксиома $(\mathscr{C})_3$], то существует замкнутое вложение

$$s \colon \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle \hookrightarrow X, \qquad \mathrm{Im}(s) \cap X_0 = \varnothing.$$

Пусть $\beta \colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle \in \mathrm{AE}(k)$ есть продолжение $\gamma$ и $s^{-1}$, удовлетворяющее условию предложения 4.5. Поскольку $X$ и $\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ суть $\mathrm{AE}(k)$-пространства, то $\beta$ есть $k$-эквивалентность.

В силу аксиомы воротников существует такое разбиение $\mathscr{Q}'$ пространства $X$, что

(4) $\mathscr{Q}'\restriction_F = \mathscr{Q}_0$, а естественное соответствие $\mathscr{Q}_0 \hookrightarrow \mathscr{Q}'$ является инъективным;
(5) $\mathscr{Q}' \prec (\beta')^{-1}\bigl(\{\mathring{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}\rangle \mid \widehat{q} \in \widehat{\mathscr{Q}}\}\bigr)$.

Пусть $T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ есть *естественная трансформация, порожденная* $\beta$, аккомпанементом которой является $\beta$. Принимая во внимание (1), (2), мы можем дополнительно потребовать, чтобы $\mathscr{Q}\restriction_F = \mathscr{Q}_0$ и $T\restriction_F = T_0$.

## § 11. Трансверсальность семейств

Определение 11.1. Пусть $s \leqslant k$, а $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$ есть разбиение $X$. Пусть для любого $p_{A'} \neq \varnothing$, $|A'| \geqslant k+1-s$, фиксировано $(k+1-|A'|)$-разбиение $\mathscr{Q}_{A'}$, имеющее полный нерв. Семейство разбиений $\bigl\{\mathscr{Q}_{A'} \bigm| |p_{A'}| \geqslant k+1-s\bigr\}$ называется *трансверсальным к остову* $\mathscr{P}^{(s)}$, если

$(\mathscr{T})_{\mathrm{i}}$ $\mathscr{Q}_{\partial A'} \rightleftharpoons \mathscr{Q}_{A'}\restriction_{\mathscr{B}\partial p_{A'}}$ есть $(k-|A'|)$-разбиение относительной границы $\mathscr{B}\partial p_{A'}$, а соответствие $\mathscr{Q}_{\partial A'} \hookrightarrow \mathscr{Q}_{A'}$ является инъективным;

$(\mathscr{T})_{\mathrm{ii}}$ если $A'' \supset A'$ и $p_{A''} \neq \varnothing$, то $\mathscr{Q}_{A'}\restriction_{p_{A''}} = \mathscr{Q}_{A''}$ и $\mathscr{Q}_{\partial A'}\restriction_{p_{A''}} = \mathscr{Q}_{A''}$, а соответствия $\mathscr{Q}_{A''} \hookrightarrow \mathscr{Q}_{A'}$ и $\mathscr{Q}_{A''} \hookrightarrow \mathscr{Q}_{\partial A'}$ являются инъективными;

$(\mathscr{T})_{\mathrm{iii}}$ для любого $q \in \mathscr{Q}_{A'}$, $p_{A'} \neq \varnothing$, семейство $\{A'' \supset A' \mid q \cap p_{A''} \neq \varnothing\}$ конечных подмножеств имеет наибольший элемент, который мы будем называть *терминальным индексным подмножеством* и обозначать через $A_q$;

$(\mathscr{T})_{\mathrm{iv}}$ если $q_1 \cap q_2 \neq \varnothing$ для $q_1 \in \mathscr{Q}_{A_1}$, $q_2 \in \mathscr{Q}_{A_2}$, то $A_{q_1} \subset A_{q_2}$ либо $A_{q_2} \subset A_{q_1}$.

Мы будем использовать обозначение $\{\mathscr{Q}_{A'}\} \looparrowright \mathscr{P}^{(s)}$. Если $s = k$, то говорят о *трансверсальном семействе к разбиению* $\mathscr{P}$, $\{\mathscr{Q}_{A'}\} \looparrowright \mathscr{P}$.

Из $(\mathscr{T})_{\mathrm{ii}}$ следует, что если $A'' \supset A'$ и $q_1, q_2 \in \mathscr{Q}_{A'}$, то

(1) из $q_1 \cap p_{A''} = q_2 \cap p_{A''} \neq \varnothing$ следует, что $q_1 = q_2$;

(2) из $q_1 \cap p_{A''}, q_2 \cap p_{A''} \neq \varnothing$ и $q_1 \cap q_2 \neq \varnothing$ следует, что $q_1 \cap q_2 \cap p_{A''} \neq \varnothing$.

Лемма 11.2. *Если $q_1 \cap p_{A_3} = q_2 \cap p_{A_3}$, где $q_i \in \mathscr{Q}_{A_i}$ и $A_1 \cup A_2 \subset A_3$, то $q_1 \cap p_{\bar{A}} = q_2 \cap p_{\bar{A}}$ для всех $\bar{A}$ таких, что $A_1 \cup A_2 \subset \bar{A} \subset A_3$.*

Следующий факт вытекает из условия $(\mathscr{T})_{\mathrm{iv}}$.

Лемма 11.3. *Если $q_i \in \mathscr{Q}_{A_i}$, $i = 1, 2, \dots, t$, и $q_i \cap q_j \neq \varnothing$ для любых $i \neq j$, то $A_{q_1} \subset A_{q_2} \subset \dots \subset A_{q_t}$ после некоторой перестановки терминальных индексных подмножеств.*

Отметим, что $\mathscr{Q}$ трансверсально к $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q} \looparrowright \mathscr{P}$ (см. [1]), тогда и только тогда, когда семейство $\{\mathscr{Q}_{A'} \rightleftharpoons \mathscr{Q}\restriction_{p_{A'}} \mid A' \subset A\}$ трансверсально к $\mathscr{P}$. Установим обратную теорему.

Теорема 11.4. *Если семейство $\{\mathscr{Q}_{A'}\}$ трансверсально к $\mathscr{P}$, то существует единственное разбиение $\mathscr{Q}$ пространства $X$, трансверсальное к $\mathscr{P}$, такое, что $\mathscr{Q}\restriction_{p_{A'}} = \mathscr{Q}_{A'}$ для всех $A' \subset A$, $p_{A'} \neq \varnothing$. При этом $\mathscr{Q}$ будет $k$-разбиением с полным нервом.*

Будем говорить, что разбиение $\mathscr{Q}$, описанное в теореме, *порождено трансверсальным к разбиению $\mathscr{P}$ семейством* $\{\mathscr{Q}_{A'}\}$. Предпошлем доказательству теоремы ряд вспомогательных фактов. Рассмотрим отношение между элементами разбиений $\{\mathscr{Q}_{A'}\}_{A' \subset A}$:

$$\mathscr{Q}_{A'} \ni q' \sim q'' \in \mathscr{Q}_{A''} \quad \Longleftrightarrow \quad q' \cap p_{A' \cup A''} = q'' \cap p_{A' \cup A''}.$$

Пусть $q_1 \in \mathscr{Q}_{A_1}$ и $A_{q_1} \subset A$ – его терминальное индексное подмножество. *Терминальным элементом для* $q_1$ называется пересечение $q_1 \cap p_{A_{q_1}}$, которое в силу $(\mathscr{T})_{\mathrm{ii}}$ есть элемент $\mathscr{Q}_{A_{q_1}}$.

Из леммы 11.2 несложно вывести факт, характеризующий введенное отношение.

Лемма 11.5. *$q_1 \sim q_2$ тогда и только тогда, когда совпадают их терминальные индексные подмножества, а также совпадают их терминальные элементы.*

Отсюда следует, что $q' \sim q''$ является отношением эквивалентности. Если $\mathscr{Q}_{A_1} \ni q_1 \sim q_2 \in \mathscr{Q}_{A_2}$, то $q \cap q' \subset q \cap p_{A_1 \cup A_2} = q' \cap p_{A_1 \cup A_2} \subset q \cap q'$. Тем самым нами установлено, что

(3) если $\mathscr{Q}_{A_1} \ni q_1 \sim q_2 \in \mathscr{Q}_{A_2}$, то $\varnothing \neq q \cap q' \in \mathscr{Q}_{A_1 \cup A_2}$.

Обозначим через $[q']$ класс эквивалентности элемента $q' \in \mathscr{Q}_{A'}$. Через $B[q']$ обозначим $\bigcup\{q'' \mid q'' \in \mathscr{Q}_{A''},\, q'' \sim q'\}$. Из условия $(\mathscr{T})_{\mathrm{iv}}$ следует, что если $B[q_i] \cap B[q_j] \neq \varnothing$, то либо $A_{q_i} \subset A_{q_j}$, либо $A_{q_j} \subset A_{q_i}$. Поэтому справедлив следующий факт.

Лемма 11.6. *Если $B[q_i] \cap B[q_j] \neq \varnothing$ для всех $1 \leqslant i \neq j \leqslant t$, то*

$$A_{q_1} \subset A_{q_2} \subset \cdots \subset A_{q_t}$$

*после некоторой перестановки терминальных индексных подмножеств.*

Покажем, что из условия леммы 11.6 можно извлечь дополнительную информацию.

Предложение 11.7. *Если $B[q_i] \cap B[q_j] \neq \varnothing$ для всех $i \neq j$, то*

$$\bigcap\{B[q_i] \mid 1 \leqslant i \leqslant s\} \neq \varnothing.$$

Доказательство предложения 11.7 непосредственно следует из леммы 11.6 и формулируемых ниже лемм.

Лемма 11.8. *Если $q \in \mathscr{Q}_{A'}$ и $A'' \subset A$, то $B[q] \cap p_{A''}$ либо пусто, либо есть элемент $q' \in \mathscr{Q}_{A''}$, эквивалентный $q$.*

Доказательство. Предположим, что $B[q] \cap p_{A''} \neq \varnothing$. Тогда $A'' \subset A_q$. Из леммы 11.5 следует, что $q_0 \rightleftharpoons B[q] \cap p_{A_q} \in \mathscr{Q}_{A_q}$. Пусть $q'$ есть тот единственный элемент $\mathscr{Q}_{A''}$, ограничение которого на $\mathscr{Q}_{A_q}$ дает $q_0$. Легко проверить, что $q' \sim q$ и $B[q] \cap p_{A''} = q'$.

Лемма 11.9. *Если $B[q_1] \cap B[q_2] \neq \varnothing$ и $C \subset A_{q_1} \subset A_{q_2}$, то*

$$B[q_1] \cap B[q_2] \cap p_C \neq \varnothing.$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что $q' \cap q'' \neq \varnothing$, где $q_1 \sim q' \in \mathscr{Q}_{A'}$ и $q_2 \sim q'' \in \mathscr{Q}_{A''}$. Отсюда, из леммы 11.8 и из (3) следует, что $B[q_1] \cap p_{A'} = q'$, $B[q_2] \cap p_{A''} = q''$ и $\varnothing \neq q' \cap q'' \in \mathscr{Q}_{A' \cup A''}$. Так как $q' \cap p_{A_{q_1}} \neq \varnothing$ и $q'' \cap p_{A_{q_1}} \neq \varnothing$, то в силу (2) имеем $\varnothing \neq q' \cap q'' \cap p_{A_{q_1}} \subset B[q_1] \cap B[q_2] \cap p_C$.

Доказательство теоремы 11.4. Поскольку единственность разбиения $\mathscr{Q}$ очевидна, то оставшаяся часть доказательства посвящена его существованию.

Полагаем в качестве искомого разбиения $\mathscr{Q} \rightleftharpoons \{B[q] \mid q \in \mathscr{Q}_{A'},\, A' \subset A\}$. Из предложения 11.7 следует полнота его нерва. Из леммы 11.8 следует, что $\mathscr{Q}$ порождает исходное трансверсальное семейство. Проверим, что $B[q]$ является абстрактным $\mathrm{AE}(k)$-множеством. Для этого заметим, что семейство $\{F_{A'} \rightleftharpoons B[q] \cap p_{A'} \in \mathscr{C}_{p_{A'}} \mid A' \subset A_q\}$ удовлетворяет условию следующей леммы.

Лемма 11.10. *Если $F_i \in \mathrm{AE}(k) \cap \mathscr{C}_X^k$, $1 \leqslant i \leqslant t$, и $\bigcap\{F_i \mid i = 1, \ldots, t\} \neq \varnothing$, а также всегда $F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_s} \subset_Z F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_{s-1}} \in \mathrm{AE}(k+2-s) \cap \mathscr{C}_X^{k+2-s}$, то $\bigcup\{F_i \mid i = 1, \ldots, t\} \in \mathrm{AE}(k) \cap \mathscr{C}_X^k$.*

Доказательство леммы 11.10 осуществляется индукцией по $t$ с использованием аксиомы $(\mathscr{C})_6$ [1] и теоремы 1.19 о склейке AE($k$)-множеств.

Из леммы 11.10 следует, что $B[q] = \bigcup\{F_{A'} \mid A' \subset A_q\} \in \mathrm{AE}(k) \cap \mathscr{C}^k_X$. Следовательно, для завершения доказательства теоремы 11.4 осталось проверить, что $B[q_1] \cap \dots \cap B[q_t]$ является абстрактным конструктивным AE($k+1-t$)-множеством. Поскольку этот вопрос решается аналогично случаю $t=1$, то его обоснование мы оставляем читателю.

Предложение 11.11. *Пусть разбиение $\mathscr{Q} \looparrowright \mathscr{P}$ порождено семейством $\{\mathscr{Q}_{A'} \mid A' \subset A\}$, трансверсальным к $\mathscr{P}$. Тогда разбиение $\mathscr{Q}_{\partial A_0}$ границы $\mathscr{B}\partial p_{A_0} \neq \varnothing$ порождено семейством $\{\mathscr{Q}_{A'} \mid A' \supset A_0, |A'| > |A_0|, p_{A'} \neq \varnothing\}$, трансверсальным к $\mathscr{P}\restriction_{\mathscr{B}\partial p_{A_0}}$.*

Доказательство непосредственно следует из явных формул для разбиений.

Следующее утверждение, доказываемое непосредственной проверкой, мы также оставляем на рассмотрение читателю.

Предложение 11.12 (о продолжении трансверсальных семейств). *Пусть семейство $\mathscr{F}_s = \{\mathscr{Q}_{A'} \mid A' \subset A, p_{A'} \neq \varnothing, |A'| \geqslant k+1-s\}$ трансверсально к $s$-остову $\mathscr{P}^{(s)}$, где $s < k$. Если для любого $A_0 \subset A$, $|A_0| = k-s$, задано $(s+1)$-разбиение $\mathscr{Q}_{A_0}$ множества $p_{A_0}$ с полным нервом такое, что*

- ($\alpha$) *$\mathscr{Q}_{A_0}\restriction_{\mathscr{B}\partial p_{A_0}}$ совпадает с $\mathscr{Q}_{\partial A_0}$ – $s$-разбиением границы $\mathscr{B}\partial p_{A_0}$, порожденным семейством $\{\mathscr{Q}_{A'} \mid A' \supset A_0, |A'| > |A_0|, p_{A'} \neq \varnothing\} \looparrowright \mathscr{P}\restriction_{\mathscr{B}\partial p_{A_0}}$;*
- ($\beta$) *естественное соответствие разбиений $\mathscr{Q}_{\partial A_0} \hookrightarrow \mathscr{Q}_{A_0}$ является инъективным,*

*то $\mathscr{F}_{s+1} \rightleftharpoons \mathscr{F}_s \cup \{\mathscr{Q}_{A'} \mid A' \subset A, p_{A'} \neq \varnothing, |A'| = k-s\} \looparrowright \mathscr{P}^{(s+1)}$.*

## § 12. Доказательство постулата о гомеоморфизме

Зависимость постулата о гомеоморфизме состоит в следующем:

Теорема 12.1. *Если справедливы аксиома трансверсальности и постулат Бествины, то постулат о гомеоморфизме также справедлив.*

Далее рассмотрим частный случай постулата о гомеоморфизме ($\widehat{X} = X$), который только и будет использоваться. Пусть заданы $k$-разбиения $\mathscr{P} = \{p_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и $\widehat{\mathscr{P}} = \{\widehat{p}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ пространства $X$, семейство $\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{P} \cap \widehat{\mathscr{P}}$, трансформация $T\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{P}}$, $T\restriction_{\mathscr{P}_0} = \mathrm{Id}$, а также ручное $Z$-подмножество $X_0 \subset X$, не пересекающееся с $E \rightleftharpoons \cup\mathscr{P}_0 \in \mathscr{C}^k_X$. Постулат о гомеоморфизме состоит в построении такого гомеоморфизма $f\colon X \to X$, что

(1) $f(p) \subseteq \mathrm{N}(Tp; \widehat{\mathscr{P}})$ для всех $p \in \mathscr{P}$;
(2) $f(X_0) \subset X$ есть ручное $Z$-подмножество;
(3) $f = \mathrm{Id}$ на $E$.

Следующее утверждение является ядром доказательства теоремы 12.1.

Предложение 12.2. *Пусть $\widehat{\mathscr{R}}$ есть такое разбиение $X$, трансверсальное к $\widehat{\mathscr{P}}$, что $\widehat{\mathscr{R}}\restriction_E$ есть разбиение $E$. Тогда для любого сильного аккомпанемента $\alpha\colon X \to X$ соответствия $T$ существуют разбиение $\mathscr{R} \looparrowright \mathscr{P}$ пространства $X$*

*и такая трансверсальная к* $T$ *трансформация* $T'\colon \mathscr{R}\to\widehat{\mathscr{R}}$,[7] *что* $\mathscr{R}\restriction_E=\widehat{\mathscr{R}}\restriction_E$, $T'\restriction_{\mathscr{R}\restriction_E}=\mathrm{Id}$, *а* $\widehat{\upsilon}\circ\alpha\restriction_{X_0}\colon X_0\to\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{R}}\rangle$ *есть частичный аккомпанемент* $T'$ (*здесь* $\widehat{\upsilon}\colon X\to\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{R}}\rangle$ *– каноническое отображение*).

Доказательство. Ясно, что $\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{R}}_{A'}\rangle\subset\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{R}}\rangle$, где $\widehat{\mathscr{R}}_{A'}\rightleftharpoons\widehat{\mathscr{R}}\restriction_{\widehat{p}_{A'}}$. Для каждого $p_{A'}\neq\varnothing$ построим тройку

$$\mathscr{T}_{A'}=\big(\mathscr{R}_{A'},\ T_{A'}\colon\mathscr{R}_{A'}\to\widehat{\mathscr{R}}_{A'},\ \beta_{A'}\colon p_{A'}\to\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{R}}_{A'}\rangle\big),$$

в которой $\mathscr{R}_{A'}$ есть разбиение $p_{A'}$, $T_{A'}$ – трансформация разбиений, а $\beta_{A'}$ – аккомпанемент $T_{A'}$, такую, что для всех $A'\subset A''\subset A$ будет справедливо

(a) $\mathscr{R}_{A'}\restriction_{p_{A''}}=\mathscr{R}_{A''}$, $T_{A'}\restriction_{p_{A''}}=T_{A''}$ и $\beta_{A'}\restriction_{p_{A''}}=\beta_{A''}$;
(b) $\beta\restriction_{X_0\cap p_{A'}}=\widehat{\upsilon}\circ\alpha\restriction_{X_0\cap p_{A'}}$;
(c) если $p_{A'}\subset E$, то $\mathscr{R}_{A'}\restriction_{p_{A'}}=\mathscr{Q}\restriction_{p_{A'}}$, $T_{A'}=\mathrm{Id}$ и $\beta_{A'}=\widehat{\upsilon}\restriction_{p_{A'}}$.

Построение троек $\mathscr{T}_{A'}$ будет вестись индукцией по $s=k+1-|A'|$, начиная с $s=0$ и заканчивая $s=k$. При этом будем следить за тем, чтобы

(d)$_s$ $\big\{\mathscr{R}_{A'}\bigm| |A'|\geqslant k+1-s\big\}\pitchfork\mathscr{P}^{(s)}$.

Если тройки $\mathscr{T}_{A'}$ уже построены с соблюдением свойств (a)–(c) и (d)$_k$, то трансверсальное семейство $\{\mathscr{R}_{A'}\}\pitchfork\mathscr{P}$ в силу теоремы 11.4 порождает $k$-разбиение $\mathscr{R}\pitchfork\mathscr{P}$, $\mathscr{R}\restriction_{p_{A'}}=\mathscr{R}_{A'}$. В силу явного задания $\mathscr{R}=\{B[r]\mid r\in\mathscr{R}_{A'}\}$ и свойства (c) имеем $\mathscr{R}\restriction_E=\widehat{\mathscr{R}}\restriction_E$. Искомая трансформация $T'\colon\mathscr{R}\to\widehat{\mathscr{R}}$ задается формулой $T'(B[r])=B[T_{A'}(r)]$, где $r\in\mathscr{R}_{A'}$.

Все оставшееся доказательство теоремы разбивается на следующие части.

*База индукции* основывается на том, что 0-остов $\mathscr{P}^{(0)}$ есть дискретное семейство нульмерных конструктивных множеств.

*Индуктивный переход.* В предположении, что тройки $\mathscr{T}_{A'}$ с соблюдением свойств (a)–(c) и (d)$_s$ уже построены, построим тройки $\mathscr{T}_B$, $B\subset A$, $|B|=k-s$, с соблюдением свойств (a)–(c) и (d)$_{s+1}$. Не теряя общности, можно считать, что $p_B$ пересекается с $E$ разве что по границе $\mathscr{B}\partial p_B$.

В силу теоремы 11.4 существует $s$-разбиение $\mathscr{R}_{\partial B}$ на $\mathscr{B}\partial p_B$, порождающее трансверсальное к $\mathscr{P}\restriction_{\mathscr{B}\partial p_B}$ семейство $\{\mathscr{R}_{A'}\mid B\subsetneqq A'\subset A\}$. Так как $\mathscr{R}_{\partial B}$ явно задается как $\{B[r']\mid r'\in\mathscr{R}_{A'},\ B\subsetneqq A'\subset A\}$, то $\mathscr{R}_{\partial B}\restriction_E=\widehat{\mathscr{R}}_{\partial B}$, а формулами $T_{\partial B}(B[r'])=B[T_{A'}(r')]$ и $\beta_{\partial B}\restriction_{p_{A'}}=\beta_{A'}$ корректно определяются трансформация $T_{\partial B}\colon\mathscr{R}_{\partial B}\to\widehat{\mathscr{R}}_{\partial B}$ и ее аккомпанемент $\beta_{\partial B}\colon\mathscr{B}\partial p_B\to\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{R}}_{\partial B}\rangle$. Так как $\beta_{\partial B}$ и $\alpha$ совпадают на $X_0\cap\partial Bp_B$, то на $X_0'=\mathscr{B}\partial p_B\cup(X_0\cap p_B)$ корректно определено отображение $\gamma\rightleftharpoons\beta_{\partial B}\cup\alpha\restriction_{X_0\cap p_B}$.

Завершает доказательство индуктивного перехода применение постулата Бествины к $\mathrm{Bd}_{\partial B}$, к инъективному соответствию $\mathscr{R}_{\partial B}\xrightarrow{T_{\partial B}}\widehat{\mathscr{R}}_{\partial B}\hookrightarrow\widehat{\mathscr{R}}_B$ и отображению $\gamma\colon X_0'\to\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{R}}_B\rangle$. В результате получим искомые $(s+1)$-разбиение $\mathscr{R}_B$ на $p_B$, трансформацию $T_B\colon\mathscr{R}_B\to\widehat{\mathscr{R}}_B$ и ее аккомпанемент $\beta_B\colon p_B\to\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{R}}_B\rangle$. Необходимую проверку оставляем читателю, отметив лишь, что условие (d)$_{s+1}$ следует из предложения 11.12.

[7] Будем говорить, что *трансформация* $T'$ *трансверсальна к* $T$, если $\bigcap r_i\cap p_{A'}\neq\varnothing$ тогда и только тогда, когда $\bigcap T'(r_i)\cap\widehat{p}_{A'}\neq\varnothing$ для всех $r_i\in\mathscr{R}$ и $A'\subset A$. Кратко это записывается так: $T'\pitchfork T$.

Доказательство теоремы 12.1. Пусть $\{\epsilon_i\}$ и $\{\hat\epsilon_i\}$ суть фундаментальные последовательности открытых покрытий $X$, через $F_X = \bigsqcup\{B_{2i-1} \mid i \geqslant 1\}$ обозначим универсальный $Z$-детектор $X$. Положим $\mathscr{P}_1 \rightleftharpoons \mathscr{P}$, $\widehat{\mathscr{P}_1} \rightleftharpoons \widehat{\mathscr{P}}$, $T_1 \rightleftharpoons T\colon \mathscr{P} \to \widehat{\mathscr{P}}$ и выберем $\alpha_1\colon X \to X$ – сильный аккомпанемент $T_1$, $\alpha_1(X_0) \cap B_1 = \varnothing$.

Нашей ближайшей целью будет построение последовательностей $k$-разбиений $\mathscr{P}_{i+1} \looparrowright \mathscr{P}_i$ и $\widehat{\mathscr{P}}_{i+1} \looparrowright \widehat{\mathscr{P}}_i$ пространства $X$, трансформаций $T_i\colon \mathscr{P}_i \to \widehat{\mathscr{P}}_i$, сильных аккомпанементов $\alpha_{2i+1}\colon X \to X$ трансформаций $T_{2i+1}$, а также аккомпанементов $\beta_{2i}\colon X \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{P}}_{2i}\rangle$ трансформаций $T_{2i}$, так чтобы при этом были выполнены условия

$(\alpha)_{i\geqslant 1}$ $\widehat{\mathscr{P}}_{2i} \prec \hat\epsilon_{2i}$, а $\mathscr{P}_{2i+1} \prec \epsilon_{2i+1}$;

$(\beta)_{i\geqslant 1}$ трансформация $T_{i+1}$ трансверсальна к $T_i$, $T_{i+1} \looparrowright T_i$;

$(\gamma)_{i\geqslant 1}$ $\mathscr{P}_{2i}\restriction_E = \widehat{\mathscr{P}}_{2i}\restriction_E$ и $\mathscr{P}_{2i+1}\restriction_E = \widehat{\mathscr{P}}_{2i+1}\restriction_E$, а также $T_{2i}\restriction_E = T_{2i+1}\restriction_E = \mathrm{Id}$;

$(\delta)_{i\geqslant 1}$ $\mathrm{N}\big(\alpha_{2i-1}(X_0); \widehat{\mathscr{P}}^3_{2i}\big) \cap B_{2i-1} = \varnothing$.

За счет перехода к еще более мелким покрытиям $\{\epsilon_i\}$ и $\{\hat\epsilon_i\}$ добьемся того, что

(i) если $\widehat{p}, \widehat{p}\,' \in \widehat{\mathscr{P}}_{2i-1}$ и $\widehat{p} \cap \widehat{p}\,' = \varnothing$, то $\mathrm{N}(\widehat{p}; \hat\epsilon^6_{2i}) \cap \mathrm{N}(\widehat{p}\,'; \hat\epsilon^6_{2i}) = \varnothing$;

(ii) если $p, p' \in \mathscr{P}_{2i}$ и $p \cap p' = \varnothing$, то $\mathrm{N}(p; \epsilon^6_{2i+1}) \cap \mathrm{N}(p'; \epsilon^6_{2i+1}) = \varnothing$.

Скажем, что последовательность $\{p_i\}$ ($\{\widehat{p}_i\}$) элементов разбиений $\mathscr{P}_i$ ($\widehat{\mathscr{P}}_i$) образует *цепочку*, если $p_i \cap p_{i+1} \neq \varnothing$ ($\widehat{p}_i \cap \widehat{p}_{i+1} \neq \varnothing$) для всех $i$. Ясно, что $\{p_i\}$ является цепочкой в том и только том случае, когда $\{T_i(p_i)\}$ является цепочкой.

При изложении аксиомы трансверсальности [1] было показано, что

(iii) если $\mathscr{R}' \looparrowright \mathscr{R}$, то $\mathrm{N}(r'; \mathscr{R}') \subset \mathrm{Int}(\mathrm{N}(r; \mathscr{R}))$ для любых $r \in \mathscr{R}$, $r' \in \mathscr{R}'$, $r \cap r' \neq \varnothing$;

(iv) если $\{p_i\} \in \mathscr{P}_i$ ($\{\widehat{p}_i\} \in \widehat{\mathscr{P}}_i$) образует цепочку, то $\bigcup\{p_i \mid i \geqslant n\} \subset \mathrm{Int}\,\mathrm{N}(p_n; \mathscr{P}_n)$ $\big(\bigcup\{\widehat{p}_i \mid i \geqslant n\} \subset \mathrm{Int}\,\mathrm{N}(\widehat{p}_n; \widehat{\mathscr{P}}_n)\big)$ для любого $n$.

Отсюда легко следует, что

(v) любая цепочка $\{p_i\} \in \mathscr{P}_i$ ($\{\widehat{p}_i\} \in \widehat{\mathscr{P}}_i$) имеет предел в $X$; если $x$ есть предел двух цепочек $\{p_i \in \mathscr{P}_i\}$ и $\{p'_i \in \mathscr{P}_i\}$, то $p_n \subset \mathrm{N}(p'_n; \mathscr{P}^3_n)$, а $p'_n \subset \mathrm{N}(p_n; \mathscr{P}^3_n)$.

Если все вышеперечисленные условия $(\alpha)_{i\geqslant 1}$–$(\delta)_{i\geqslant 1}$ удастся реализовать, то искомый гомеоморфизм $f\colon X \to X$ будет задаваться следующим правилом: если $x \in X$ есть предел цепочки $\{p_i\} \in \mathscr{P}_i$, то $f(x)$ есть предел цепочки $\{T_i(p_i)\} \in \widehat{\mathscr{P}}_i$.

Из (iv) следует $f(p_1) \subset \mathrm{N}\big(T_1(p_1); \widehat{\mathscr{P}}_1\big)$, из $(\gamma)_{i\geqslant 1}$ следует $f_E = \mathrm{Id}_E$, а из $(\delta)_{i\geqslant 1}$ имеем $f(X_0) \cap F_X = \varnothing$, т.е. $f(X_0)$ есть ручное $Z$-множество. Установление корректности определения, биективности, а также непрерывности $f$ и $f^{-1}$ несложно, и его мы оставляем читателю.

Построим для $r$ требуемые объекты, предполагая выполненными условия $(\alpha)_{r-1}$–$(\delta)_{r-1}$. Сначала возьмем $r = 2i$. В силу аксиомы трансверсальности существует $k$-разбиение $\widehat{\mathscr{P}}_r \prec \hat\epsilon_r$, трансверсальное $\widehat{\mathscr{P}}_{r-1}$, для которого выполнено $(\delta)_r$. Для построения искомых $k$-разбиения $\mathscr{P}_r \looparrowright \mathscr{P}_{r-1}$, трансформации $T_r\colon \mathscr{P}_r \to \widehat{\mathscr{P}}_r \looparrowright T_{r-1}$ и аккомпанемента $\beta_{2r}$ следует прибегнуть к помощи предложения 12.2.

Пусть теперь $r=2i+1$. Выберем у $T_{r-1}$ какой-либо сильный аккомпанемент. В силу аксиомы трансверсальности существует $k$-разбиение $\mathscr{P}_r \prec \epsilon_r$, трансверсальное $\mathscr{P}_{r-1}$. Для построения искомых $k$-разбиения $\widehat{\mathscr{P}_r} \looparrowright \widehat{\mathscr{P}_{r-1}}$, трансформации $T_r \looparrowright T_{r-1}$ вновь прибегнем к помощи предложения 12.2. Далее следует выбрать такой сильный аккомпанемент $\alpha_r\colon X \to X$ трансформации $T_r$, чтобы $\alpha_r(X_0) \cap B_r = \varnothing$ (что возможно, так как $X_0$ есть ручное $Z$-множество).

## Список литературы


[1] С. М. Агеев, "Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. I. Улучшение связности разбиений", *Матем. сб.*, **198**:3 (2007), 3–50; англ. пер.: S. M. Ageev, "Axiomatic method of partitions in the theory of Nöbeling spaces. I. Improvement of partition connectivity", *Sb. Math.*, **198**:3 (2007), 299–342.

[2] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., **156**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] R. D. Edwards, "Characterzing infinite dimensional manifolds topologically [after Henryk Toruńczyk]", *Séminaire Bourbaki*, vol. 1978/79, Exposés 525–542, Lecture Notes in Math., **770**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1980, 278–302.

[4] T. Banakh, "Characterization of spaces admitting a homotopy dense embedding into a Hilbert manifold", *Topology Appl.*, **86**:2 (1998), 123–131.

[5] P. L. Bowers, "Dense embeddings of sigma-compact, nowhere locally compact metric spaces", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **95**:1 (1985), 123–130.

[6] M. Bestvina, *Characterizing $k$-dimensional universal Menger compacta*, Mem. Amer. Math. Soc., **71**, № 380, 1988.

[7] S.-T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, MI, 1965.

[8] С. М. Агеев, С. А. Богатый, "О склейках некоторых классов метрических пространств", *Вестн. Моск. ун-та. Сер.* 1. *Матем., мех.*, 1994, № 6, 19–23; англ. пер.: S. M. Ageev, S. A. Bogatyi, "Sewing in some classes of spaces", *Moscow Univ. Math. Bull.*, **49**:6 (1994), 18–21.

[9] A. Chigogidze, "UV$^n$-equivalence and $n$-equivalence", *Topology Appl.*, **45**:3 (1992), 283–291.

[10] A. Chigogidze, K. Kawamura, E. D. Tymchatyn, "Nöbeling spaces and the pseudo-interiors of Menger compacta", *Topology Appl.*, **68**:1 (1996), 33–65.

[11] J. E. West, "Mapping Hilbert cube manifolds to ANR's: A solution of a conjecture of Borsuk", *Ann. of Math.* (2), **106**:1 (1977), 1–18.



**С. М. Агеев (S. M. Ageev)**
Белорусский государственный университет,
г. Минск, Беларусь
*E-mail*: ageev_sergei@yahoo.com, ageev@bsu.by



Поступила в редакцию
09.12.2005 и 19.02.2007