УДК 515.124.62+515.125

С. М. Агеев

Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. III. Непротиворечивость системы аксиом

Устанавливается непротиворечивость системы аксиом пространств Небелинга.

Библиография: 8 названий.

Характеризационная теорема пространства Небелинга [1] утверждает, что k-мерное сильно k-универсальное польское $\mathrm{AE}(k)$-пространство X гомеоморфно пространству Небелинга $\nu^k = N_k^{2k+1}$ для всех $0 \leqslant k < \infty$. В первых двух частях работы (см. [1], [2]) эта теорема была редуцирована к доказательству непротиворечивости системы аксиом пространств Небелинга. Третья часть работы посвящена установлению того, что ядро Небелинга $X = \nu^k_{\mathfrak{L}}(P)$ конструктивного многообразия P вместе с семейством $\mathscr{C}_X$ ядер Небелинга конструктивных подмногообразий $Q \subset P$ будет моделью системы аксиом, что будет вести к завершению доказательства характеризационной теоремы. В главе 1, играющей ключевую роль, устанавливается взаимосвязь конструктивных PL-многообразий и их ядер Небелинга, на основе которой все аксиомы сводятся к их кусочно линейным аналогам. Проверке каждой из введенных аксиом для модели системы аксиом посвящена глава 2.

Обращаем внимание читателя на один важный момент. Чтобы не отягощать восприятие и без того сложно структурированного текста, в работе рассматривалась более простая проблема характеризации пространств Небелинга. Однако если сделать в проведенных рассуждениях естественные поправки, то можно получить более сильный результат – характеризационную теорему для *многообразий Небелинга*, или *ν^k-многообразий*, т.е. польских пространств, имеющих базу открытых множеств, гомеоморфных ν^k.

Теорема 0.1. *Для всех $0 \leqslant k < \infty$ k-мерное сильно k-универсальное польское $\mathrm{ANE}(k)$-пространство X есть ν^k-многообразие.*

Теорема 0.2. *Если $f\colon X \to Y$ – отображение ν^k-многообразий, индуцирующее изоморфизм гомотопических групп π_i, $i < k$, то $X \cong Y$.*

Эти и ряд других следствий предложенного аксиоматического метода будут изложены в других публикациях автора.

В [1; § 6] в определение $\mathscr{C}_X$-разбиения вкралась неточность. Везде в настоящей работе под *$\mathscr{C}_X$-разбиением $\mathscr{P} = \{p_\alpha\}$ абстрактного конструктивного пространства X* (или *удобным разбиением X*, если при этом не будет возникать недоразумений) следует понимать такое разбиение X, что:

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS (грант № 96-0712) и гранта Министерства образования Республики Беларусь. Автор также признателен за поддержку, оказанную NSERC № OGP 005616 во время визита в Университет Саскатчеван.

(a) все его элементы вместе с их пересечениями принадлежат $\mathscr{C}_X$;
(b) $p_{A'\cup\{\alpha\}}$ есть Z-множество $p_{A'}$ для всех $A' \subset A$, $\alpha \notin A'$.

Поскольку это понятие более сильное (дополнительно требуется выполнение (b)), то на содержании первых двух частей работы произведенное изменение почти никак не отражается. Следует лишь в определении допустимого вложения [1; определение 11.2] условие (3) заменить на то, которое сразу следует за (4). Кроме того, в предложении 15.2 [1] следует потребовать, чтобы дискретное семейство $\{N_\gamma\}$ состояло из совершенных относительно $\mathscr{Q}'$ множеств. Все рассуждения из работ [1] и [2] не претерпевают изменений. Наконец, при установлении непротиворечивости системы аксиом нам дополнительно нужно будет следить за выполнением условия (b), что, как будет видно, не составляет труда.

§ 1. Предварительные сведения и факты

1.1. Модифицированная теорема Борсука о продолжении гомотопии. Скажем, что семейство $\{B_\gamma \subset W \setminus D\}$ *примыкает к* $D \subset W$, если

(a) для любого $z \in D$ и для любой окрестности $\mathscr{O}(z) \subset W$ существует окрестность $\mathscr{O}_1(z) \subset W$ такая, что $B_\gamma \subset \mathscr{O}(z)$, как только $B_\gamma \cap \mathscr{O}_1(z) \neq \varnothing$.

Из определения, в частности, следует, что для любого $a > 0$ и для любого замкнутого подмножества $F \subset W$

(b) $W \setminus \bigcup\{B_\gamma \mid B_\gamma \cap F \neq \varnothing \text{ или } \operatorname{diam} B_\gamma \geqslant a\}$ является (не обязательно открытой) окрестностью $D \setminus F$ в $W \setminus F$.

Теорема 1.1 (о равностепенном продолжении гомотопии). *Пусть заданы компактное подмножество $D \subset W$, замкнутое подмножество $T \subset W$, а также отображение $h\colon W \to Y \in \mathrm{ANE}$ и θ-гомотопия $F\colon (D \cup T) \times I \to Y$, $\theta \in \operatorname{cov} Y$, такие, что*

(c) *$F_0 = h\restriction_{D\cup T}$ и $F(z,s) = h(z)$ для всех $(z,s) \in T \times I$.*

Тогда для любого семейства $\{B_\gamma \subset W \setminus D\}$, примыкающего к D, и для любого покрытия $\omega \in \operatorname{cov} Y$ существует θ-гомотопия $K\colon W \times I \to Y$, являющаяся продолжением F, такая, что $K_0 = h$, а также:

(d) *если $B_\gamma \cap T \neq \varnothing$, то $K(z,s) = h(z)$ для всех $(z,s) \in B_\gamma \times I$;*
(e) *если $B_\gamma \cap T = \varnothing$, то множество $K_1(B_\gamma)$ содержится в $U \in \omega$.*

Доказательство. Рассмотрим какую-либо θ-гомотопию $H\colon W \times I \to Y$, являющуюся продолжением гомотопии F, с условием $H_0 = h$. Так как D компактно, то существует такое $m \in \mathbb{N}$, что

$$\left\{ H\left(\mathrm{N}\left(a; \frac{1}{m}\right) \times \left[\frac{i-1}{m}; \frac{i}{m}\right]\right) \;\Big|\; a \in D \right\} \prec \omega$$

для любого $1 \leqslant i \leqslant m$.

Пусть $D_0 \rightleftharpoons D \cap T$. Так как $T \subset W$ замкнуто и не пересекается с $D \setminus D_0$, то, многократно используя (b), возможно индуктивно построить убывающую последовательность окрестностей $\mathscr{O}_1 \Supset \mathscr{O}_2 \Supset \cdots$ множества $D \setminus D_0 \subset W \setminus D_0$, $\bigcap \mathscr{O}_i = D \setminus D_0$, для которой:

(f) $\mathscr{O}_1 \subset W \setminus \bigcup\{B_\gamma \mid B_\gamma \cap T \neq \varnothing \text{ или } \operatorname{diam} B_\gamma \geqslant 1/m\}$;

(g) если $B_\gamma \cap (W \setminus \mathscr{O}_1) \neq \varnothing$, то $B_\gamma \subset W \setminus \mathscr{O}_2$;

(h) если $B_\gamma \subset \mathscr{O}_n$ и $B_\gamma \cap (\mathscr{O}_n \setminus \mathscr{O}_{n+1}) \neq \varnothing$ для $n \geqslant 1$, то $B_\gamma \subset \mathscr{O}_n \setminus \mathscr{O}_{n+2}$.

Введем в рассмотрение непрерывную функцию $\lambda\colon W \setminus D_0 \to [0,1]$, для которой $\lambda = 0$ на $W \setminus \mathscr{O}_2$, $(i-1)/(3m) \leqslant \lambda \leqslant i/(3m)$ на $\mathscr{O}_{i+1} \setminus \mathscr{O}_{i+2}$ при $1 \leqslant i \leqslant 3m$ и $\lambda = 1$ на $\mathscr{O}_{3m+2}$.

Тогда искомая θ-гомотопия $K\colon W \times I \to Y$ задается формулами $K(z,s) = H(z, s\cdot\lambda(z))$ при $z \in W \setminus D_0$ и $K(z,s) = h(z)$ при $(z,s) \in D_0 \times I$. Непосредственно осуществляется проверка непрерывности K и остальных ее свойств.

1.2. Аппроксимативное продолжение отображений. Канонические отображения образуют открытое множество в следующем смысле.

Предложение 1.2. *Пусть $\omega \in \operatorname{cov} Z$, а $\beta\colon Z \to \mathscr{N}\langle\omega\rangle$ – каноническое отображение. Тогда существует такое отображение $\varepsilon\colon Z \to (0,1)$, что $\beta'\colon Z \to \mathscr{N}\langle\omega\rangle$ является каноническим отображением, если $\operatorname{dist}(\beta(z), \beta'(z)) < \varepsilon(z)$ для любого $z \in Z$.*

Пусть $Y \in \mathrm{ANE}(k)$, $k \leqslant \infty$, а $f\colon A \to Y$ есть отображение, заданное на (не обязательно замкнутом) подмножестве $A \subset Z$, $\dim Z \leqslant k$. Тогда:

(a) для любого отображения $\delta\colon Y \to (0,1)$ существует такое отображение $\tilde f\colon \mathscr{O}(A) \to Y$, заданное на окрестности $A \subset \mathscr{O}(A) \subset Z$, что
$$\operatorname{dist}(f(a), \tilde f(a)) < \delta(f(a))$$
для любого $a \in A$;

(b) для любого $\varepsilon\colon A \to (0,1)$ существует такое отображение $\tilde f\colon \mathscr{O}(A) \to Y$, заданное на окрестности $A \subset \mathscr{O}(A) \subset Z$, что
$$\operatorname{dist}(f(a), \tilde f(a)) < \varepsilon(a)$$
для любого $a \in A$.

Отображение $\tilde f$ в (a) ищется в виде композиции канонического отображения и отображения нерва подходящего покрытия (см., например, [3]). Если теперь применить (a) для $f' \rightleftharpoons f \times \varepsilon\colon A \to Y' \rightleftharpoons Y \times (0,1) \in \mathrm{ANE}(k)$ и $\delta \rightleftharpoons \mathrm{pr}_2\colon Y' \to (0,1)$, то легко получить доказательство (b).

Известно, что локально конечное семейство замкнутых множеств допускает *раздутие*, состоящее из открытых множеств [4; 7.1.G(c)]. Отсюда, из (b) и предложения 1.2 с помощью техники канонических отображений доказывается более общий факт.

Теорема 1.3. *Для любого замкнутого локально конечного покрытия $\{p_\alpha \mid \alpha \in A\}$ (не обязательно замкнутого) подмножества $A \subset Z$, $\dim Z < \infty$, конечной кратности существует такое семейство $\{\mathscr{O}(p_\alpha) \mid \alpha \in A\}$, состоящее из открытых в Z множеств, что $\mathscr{O}(p_\alpha) \supset p_\alpha$ и $\bigcap\{\mathscr{O}(p_\alpha) \mid \alpha \in A'\} \neq \varnothing \Leftrightarrow \bigcap\{p_\alpha \mid \alpha \in A'\} \neq \varnothing$.*

Пусть ограничение $\{P_\alpha\}$ на $B \subset Z$ обладает некоторым свойством. Найдем достаточные условия, гарантирующие, что ограничение $\{P_\alpha\}$ на некоторую окрестность V, $B \subset V \subset Z$, также обладает этим свойством.

Предложение 1.4. *Пусть семейство множеств $\{P_\alpha\}$ пространства Z и плотное подмножество $B \subset Z$ таковы, что $P_\alpha \cap B$ плотно в P_α для каждого α. Тогда*:

(a) *если $\{P_\alpha \cap B\}$ – локально конечное покрытие B, то существует такая окрестность V, $B \subset V \subset Z$, что $\{P_\alpha \cap V\}$ – локально конечное семейство V;*

(b) *если $\{P_\alpha\}$ локально конечно, $\{P_\alpha \cap B\}$ – замкнутое покрытие B и каждое P_α локально замкнуто, то существует такая окрестность V, $B \subset V \subset Z$, что $\{P_\alpha \cap V\}$ – замкнутое покрытие V;*

(c) *если семейство $\{P_\alpha \subset Z\}$ замкнуто и локально конечно, а семейство $\{P_\alpha \cap B\}$ дискретно в B, то существует такая окрестность V, $B \subset V \subset Z$, что семейство $\{P_\alpha \cap V\}$ дискретно в V.*

Этот факт доказывается с помощью теоремы 1.3 и свойства (b) об аппроксимативном продолжении. Из предложения 1.2 и (b) следует

Предложение 1.5. *Пусть замкнутое локально конечное покрытие $\{P_\alpha\}$ конечномерного пространства Z и плотное подмножество $B \subset Z$ таковы, что $P_{A'} \cap B \neq \varnothing$ плотно в $P_{A'}$ для любого $A' \subset A$. Тогда для любого аккомпанемента $\beta'\colon B \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ некоторой трансформации $T'\colon \{P_\alpha \cap B\} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ и для любого $\lambda \in \operatorname{cov}\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ существуют открытое множество $V \subset P$, $B \subset V \subset Z$, и отображение $\beta\colon V \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, $\operatorname{dist}(\beta', \beta\restriction_B) \prec \lambda$, такие, что $\mathscr{S}\colon \{P_\alpha \cap V\} \to \{P_\alpha \cap B\}$, $S(P_\alpha \cap V) = P_\alpha \cap B$, является трансформацией, а β является аккомпанементом композиции $T' \circ S\colon \{P_\alpha \cap V\} \to \widehat{\mathscr{Q}}$ трансформаций.*

Глава 1. Разбиения конструктивных многообразий

§ 2. Конструктивные многообразия

Пусть фиксированы $\kappa \geqslant 0$, PL-многообразие M^m размерности $\geqslant 2\kappa + 3$, заданное в триангуляции L, и нуль-последовательность $\mathfrak{L} = \{L, \delta L, \delta^2 L, \dots\}$ многократных производных подразделений триангуляции L. Назовем *κ-псевдограницей $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$ многообразия M^m относительно* $\mathfrak{L}$ следующее множество:

$$\bigcup\{|(\delta^r L)^{(m-\kappa-1)}| \mid 0 \leqslant r < \infty\}.$$

Напомним, что $P \subset M^m$ называется *$\mathfrak{L}$-конструктивным полиэдром*, если его можно представить в виде тела локально конечного в P семейства $\mathscr{L}$ симплексов, лежащих в $\bigcup\{\delta^r L \mid 0 \leqslant r < \infty\}$. Так как P локально компактно, то P является локально замкнутым в M. Семейство $\mathscr{L}$ называется *смешанной триангуляцией P относительно* $\mathfrak{L}$, если $P = \bigsqcup\{\operatorname{rint}\Delta \mid \Delta \in \mathscr{L}\}$. Смешанная триангуляция $\mathscr{L}$ полиэдра P имеет *естественную стратификацию* $\mathscr{L}_n \coloneqq \{\Delta \in \mathscr{L} \mid \Delta \in \delta^n L\}$, $n \geqslant 0$. Легко видеть, что если $\Delta \in \mathscr{L}_n$ и $\Delta' \in \mathscr{L}_m$, где $n < m$, то $\operatorname{rint}\Delta \cap \Delta' = \varnothing$. Поэтому

(1) если $\Delta \in \mathscr{L}_n$, $\Delta' \in \mathscr{L}_m$ и $\operatorname{rint}\Delta \cap \Delta' \neq \varnothing$, то $m \leqslant n$.

Оказывается, в смешанную триангуляцию $\mathscr{L}$ можно вписать обычную триангуляцию, плохо взаимодействующую с $\mathfrak{L}$. Доказательство соответствующего факта оставляется читателю.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathscr{L}$ – смешанная триангуляция $\mathfrak{L}$-конструктивного полиэдра P. Тогда существует триангуляция K полиэдра P, вписанная в $\mathscr{L}$.*

Пусть $P \subset M^m$ есть $\mathfrak{L}$-конструктивное многообразие, причем $0 \leqslant \dim M - \dim P \leqslant \kappa$ (или $0 \leqslant k \rightleftharpoons \kappa - (\dim M - \dim P) \leqslant \kappa$). Назовем $P \setminus \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$ *k-ядром Небелинга $\nu_{\mathfrak{L}}^k P$ многообразия P*. Назовем P *$\nu_{\mathfrak{L}}^k$-конструктивным*, если

(2) $\nu_{\mathfrak{L}}^k P$ есть замкнутое подмножество в $\nu_{\mathfrak{L}}^\kappa M$.

Будем называть PL-многообразие P *$\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивным*, если оно является $\nu_{\mathfrak{L}}^k$-конструктивным для соответствующего $k = \kappa - (\dim M - \dim P)$. Если Q и P являются $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивными многообразиями, а Q является PL-подмногообразием P, то будем говорить, что Q *является $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивным подмногообразием P*.

Пусть $X = \nu_{\mathfrak{L}}^k P$ есть ядро Небелинга $\nu_{\mathfrak{L}}^s$-конструктивного многообразия $P \subset M$. Через $\mathscr{C}_X^s$, $0 \leqslant s \leqslant k$, обозначим семейство

$$\bigl\{\nu_{\mathfrak{L}}^s Q \mid Q \text{ есть } \nu_{\mathfrak{L}}^s\text{-конструктивное подмногообразие } P\bigr\},$$

а через $\mathscr{C}_X$ – семейство $\{\mathscr{C}_X^s \mid 0 \leqslant s \leqslant k\}$. Важным фактом является то, что $\mathscr{C}_X$ не зависит от представления X в виде $\nu_{\mathfrak{L}}^k P$.

Предложение 2.2. *Если $X = \nu_{\mathfrak{L}}^k P = \nu_{\mathfrak{L}}^k P'$, где $P' \subset M$ – другое $\nu_{\mathfrak{L}}^k$-конструктивное многообразие, то семейство*

$$\bigl\{\nu_{\mathfrak{L}}^s Q \mid Q \textit{ есть } \nu_{\mathfrak{L}}^s\textit{-конструктивное подмногообразие } P,\ 0 \leqslant s \leqslant k\bigr\}$$

совпадает с семейством

$$\bigl\{\nu_{\mathfrak{L}}^s Q \mid Q \textit{ есть } \nu_{\mathfrak{L}}^s\textit{-конструктивное подмногообразие } P',\ 0 \leqslant s \leqslant k\bigr\}.$$

Предваряя доказательство предложения, введем важное понятие, отслеживающее взаимоотношения между $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивными многообразиями в M и ν-конструктивными подмножествами в $\nu_{\mathfrak{L}}^\kappa M$.

Определение 2.3. Пусть $Q \subset M$ есть $\nu_{\mathfrak{L}}^s$-конструктивное многообразие, совпадающее с телом $|\mathscr{L}_Q|$ смешанной триангуляции $\mathscr{L}_Q$ относительно $\mathfrak{L}$.[1] Замыкание $\mathrm{Cl}_M |\mathscr{L}_Q^{(q-s-1)}|$, где $q = \dim Q$, обозначаемое через $\mathscr{D}(Q) = \mathscr{D}(Q; \mathscr{L}_Q)$, назовем *дискриминантом* Q. Ясно, что $\mathscr{D}(Q) = (\mathrm{Cl}_M Q \setminus Q) \cup |\mathscr{L}_Q^{(q-s-1)}|$.

Предложение 2.4. *$\mathscr{D}(Q)$ содержится в псевдогранице $\mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$.*

Доказательство. Предположим противное: $x \in \mathscr{D}(Q) \cap \nu_{\mathfrak{L}}^\kappa M$. Тогда из определения дискриминанта следует $x \in \mathrm{Cl}_M Q \setminus Q$. Следовательно, $x = \lim x_n$, где $x_n \in \nu_{\mathfrak{L}}^s Q$. Так как $\nu_{\mathfrak{L}}^s Q$ замкнуто в $\nu_{\mathfrak{L}}^\kappa M$, то $x \in \nu_{\mathfrak{L}}^s Q$, что противоречит $x \notin Q$.

[1] Будем далее для тела семейства ω, состоящего из симплексов, использовать обозначение $|\omega|$.

Приведем еще ряд свойств дискриминанта. Пусть $x \in \mathrm{Cl}_M Q$, но $x \notin \mathscr{D}(Q)$. Тогда

(3) $x \in Q$; если $x \in \operatorname{rint} \Delta$, где $\Delta \in \mathscr{L}_Q$, то $\dim \Delta \geqslant q - s = m - \kappa$.

Доказательство предложения 2.2. Пусть $P = |\mathscr{L}_P|$ и $P' = |\mathscr{L}_{P'}|$, где $\mathscr{L}_P$ и $\mathscr{L}_{P'}$ – смешанные триангуляции P и P', а $\mathscr{D} \rightleftharpoons \mathscr{D}(P; \mathscr{L}_P) \cup \mathscr{D}(P'; \mathscr{L}_{P'}) \subset \mathfrak{S}_{\mathfrak{L}}$ – замкнутое подмножество M.

Для доказательства достаточно установить, что симметрическая разность $P \vartriangle P' \subset \mathscr{D}$. Предположим противное: например, существует $x \in P'$, но $x \notin P \cup \mathscr{D}$. Для определенности пусть $x \in \operatorname{rint} \Delta$, где $\Delta \in \mathscr{L}_{P'}$. В силу свойства (3) для любой окрестности $\mathscr{O}(x)$ имеем $\varnothing \neq \Delta \cap \nu^k_{\mathfrak{L}} P' \cap \mathscr{O}(x) \subset \nu^k_{\mathfrak{L}} P' = \nu^k_{\mathfrak{L}} P \subset P$, т.е. $x \in \mathrm{Cl}_M P$. В силу (3) имеем $x \in P$, что находится в противоречии со сделанным предположением.

Пусть $X = \nu^k_{\mathfrak{L}} P$ есть ядро Небелинга $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивного многообразия $P \subset M$. Пользуясь соображениями общего положения, легко показать, что

(4) вложение $X \hookrightarrow P$ является одновременно UV^{k-1}-отображением и k-эквивалентностью.

Остановимся на взаимоотношениях связностных свойств и свойств Z-множеств пространств P и X. Следующее свойство, очевидно, вытекает из (4).

Предложение 2.5. *Если $F \subset_Z X$, то $\mathrm{Cl}_P F \subset_{Z_k} P$.*

Пусть Q есть $\nu^s_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие P, причем $\nu^s_{\mathfrak{L}} Q = X \cap Q \in \mathscr{C}^s_X$ является Z-подмножеством X. В силу предложения 2.5 $Q \subset \mathrm{Cl}_P\, \nu^s_{\mathfrak{L}} Q \subset_{Z_k} P$, что в свою очередь влечет $Q \subset \partial P$ (поскольку $\dim P - \dim Q \leqslant k$). В итоге нами доказано

Предложение 2.6. $Q \subset \partial P$.

Из (4) легко следует $X \in \mathrm{ANE}(k)$, а также $X \in \mathrm{C}^a$, $a < k$, $\Leftrightarrow P \in \mathrm{C}^a$. Аналогично устанавливается

Предложение 2.7. *Пусть $s \leqslant k$, а Q – $\nu^s_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие P. Если $\nu^s_{\mathfrak{L}}(Q) \hookrightarrow X$ есть s-эквивалентность, то и $Q \hookrightarrow P$ таково. Обратно, если $Q \hookrightarrow P$ есть s-эквивалентность, то $\nu^s_{\mathfrak{L}}(Q) \hookrightarrow X$ индуцирует изоморфизм групп π_i, $i < s$.*

Пусть далее $P \subset M^m$ будет $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивным многообразием, где $k = \kappa - (m - \dim P)$. Скажем, что замкнутое локально конечное покрытие

$$\mathscr{P} = \{P_\alpha \mid \alpha \in A\}$$

многообразия P кратности $\leqslant k + 1$, состоящее из $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивных подмногообразий P, является *$\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивным разбиением* P, если для любых $P_{A'} \neq \varnothing$, $A' \subset A$, и $\alpha \notin A'$:

(i) $P_{A'}$ есть $\nu^{k+1-|A'|}_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие P;
(ii) $P_{A' \cup \{\alpha\}} \subset \partial P_{A'}$.

Пусть $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное разбиение P. Ясно, что $\mathscr{P}\restriction_X = \{P_\alpha \cap X\}$ есть $\mathscr{C}_X$-разбиение $X \rightleftharpoons \nu^k_{\mathfrak{L}} P$. Из [5; 1.1.9(c)] следует также, что

(iii) $P_{A'} \cap \partial P \subset \partial P_{A'}$.

Говорят, что $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное разбиение $\{P_\alpha\}$ многообразия P есть *k-разбиение*, если $P_{A'} \in \mathrm{AE}(k+1-|A'|)$ для любого $A' \subset A$. Обычным образом определяется понятие l_r-разбиения, $0 \leqslant l \leqslant k$, $l+r \leqslant k+1$ (см. [1; определение 8.2]).

Пусть N^p есть замкнутое $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие P. Скажем, что N является *k-допустимым в P*, если:

(a) вложение $\operatorname{Bd} N \hookrightarrow (P \setminus \operatorname{Int} N)$ является $(k-1)$-эквивалентностью;

(b) вложение $N \hookrightarrow P$ является k-эквивалентностью.

Скажем, что N является *k-допустимым относительно* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивного разбиения $\mathscr{P}$, если для всех $P_{A'} \neq \varnothing$, $A' \subset A$:

(c) ограничения $\mathscr{P}{\restriction}_N$, $\mathscr{P}{\restriction}_{P\setminus \operatorname{Int} N}$ и $\mathscr{P}{\restriction}_{\operatorname{Bd} N}$ являются $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивными разбиениями N, $P \setminus \operatorname{Int} N$ и $\operatorname{Bd} N$ соответственно, а естественное вложение $\mathscr{P}{\restriction}_N \hookrightarrow \mathscr{P}$ является трансформацией разбиений;

(d) $P_{A'} \cap N$ является допустимым подмногообразием в $P_{A'}$.

Заметим, что условие (c) влечет, что $P_{A'} \cap N$, $P_{A'} \cap (X \setminus \operatorname{Int} N)$ являются $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивными подмногообразиями размерности $\dim P - |A'| + 1$, а $P_{A'} \cap \operatorname{Bd} N$ является $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивным подмногообразием размерности $\dim P - |A'|$.

Скажем, что подмногообразие N является *k-совершенным относительно* $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивного разбиения $\mathscr{P}$ многообразия P, если N и $P\setminus \operatorname{Int} N$ являются k-допустимыми относительно $\mathscr{P}$. Несложно установить, используя предложение 2.7, что

(e) если $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие N является k-допустимым (k-совершенным) относительно $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивного разбиения $\mathscr{P}$, то $\nu^k_{\mathfrak{L}} N$ является k-допустимым (k-совершенным) относительно $\mathscr{C}_X$-разбиения $\mathscr{P}{\restriction}_{\nu^k P}$.

Доказательство следующего утверждения оставляется читателю.

Предложение 2.8. *Если $N \subset P$ k-допустимо относительно разбиения $\mathscr{P}$, а $G \Subset N$ k-совершенно относительно $\mathscr{P}{\restriction}_N$, то G k-совершенно относительно $\mathscr{P}$.*

§ 3. Взаимосвязь конструктивных многообразий и их ядер Небелинга

Этот параграф играет ключевую роль при редуцировании вопросов, связанных с пространствами Небелинга, к их соответствующим кусочно линейным аналогам.

Пусть $\{P_i \subset P\}$ есть счетное локально конечное семейство $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивных подмногообразий P, $\mathscr{L}_i$ есть смешанная триангуляция P_i, а $\{\mathscr{L}_{in} \mid n \geqslant 0\}$ – естественная стратификация $\mathscr{L}_i$. Обозначим $\bigcup\{\operatorname{rint}\Delta \mid \Delta \in \mathscr{L}_{in}\} \subset P_i$ через P_{in}. Легко видеть, что $\{P_{in} \mid n \geqslant 0\}$ дизъюнктно покрывает P_i. Следовательно, любой точке $x \in P_i$ соответствует единственное целое число $n(i,x) \geqslant 0$ такое, что $x \in P_{in(i,x)}$.

Через $\mathscr{D} \subset M$ обозначим объединение всех дискриминантов $\mathscr{D}(P_i;\mathscr{L}_i)$ подмногообразий P_i, являющееся замкнутым и в силу предложения 2.4 не пересекающимся с $\nu^\kappa_{\mathfrak{L}} M$. Поэтому $P_i \cap U$ является $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивным подмногообразием $U \rightleftharpoons P \setminus \mathscr{D}$.

Пусть $x_0 \in \left(\bigcup P_i\right) \cap U$. Так как $x_0 \notin \mathscr{D} \supset \mathscr{D}(P_i)$, то $x_0 \notin |\mathscr{L}_i^{(p-k-1)}|$. Поэтому верна

Лемма 3.1. *Пусть $\Delta_i \in \mathscr{L}_{in(i,x_0)}$ есть (единственный) симплекс такой, что $x_0 \in \operatorname{rint} \Delta_i$. Тогда $\dim \Delta_i \geqslant p - k$.*

Так как $\{i \mid x_0 \in P_i\}$ конечно, то число $a \rightleftharpoons \max\{n(i, x_0) \mid x_0 \in P_i\}$ совпадает с $n(i_0, x_0)$ для некоторого индекса i_0. Обозначим через $\Delta(x_0)$ симплекс Δ_{i_0} из леммы 3.1.

Лемма 3.2. *$\Delta(x_0) \subset P_i$ для любого индекса i, $x_0 \in P_i$.*

Доказательство. Так как $n(i_0, x_0) \geqslant n(i, x_0)$ и $x_0 \in \operatorname{rint} \Delta_i \cap \operatorname{rint} \Delta_{i_0}$, где $\Delta_i \in \delta^{n(i,x_0)} L$, а $\Delta_{i_0} \in \delta^{n(i_0,x_0)} L$, то $\operatorname{rint} \Delta_{i_0} \subset \operatorname{rint} \Delta_i$. Поэтому $\Delta(x_0) = \Delta_{i_0} \subset \Delta_i \subset P_i$.

Так как $\mathscr{L}_i$ локально конечно, то справедлива

Лемма 3.3. *Существует окрестность $\mathscr{V}_i \subset U$ точки x_0 такая, что если некоторый симплекс $\Delta' \in \mathscr{L}_i$ имеет непустое пересечение с $\mathscr{V}_i$, то $x_0 \in \Delta'$, а $\Delta' \in \mathscr{L}_{in}$, где $n \leqslant a$.*

Доказательство. Пусть $\Delta_i \in \mathscr{L}_i$ есть симплекс из леммы 3.1. Так как $x_0 \in \operatorname{rint} \Delta_i$ и $x_0 \in \Delta' \in \mathscr{L}_i$, то $\operatorname{rint} \Delta_i \cap \Delta' \neq \varnothing$. Поскольку $\Delta_i \in \delta^{n(i,x_0)} L$ и $\Delta' \in \delta^n L$, то свойство (1) из § 2 влечет $n \leqslant n(i, x_0)$. Следовательно, $n \leqslant a = \max\{n(i, x_0) \mid x_0 \in P_i\}$.

Для последующих ссылок выделим важное свойство окрестности $\mathscr{V}(x_0) \rightleftharpoons \bigcap\{\mathscr{V}_i \mid x_0 \in P_i\} \subset U$ точки x_0, являющееся следствием леммы 3.3:

(1) если $\mathscr{V}(x_0) \cap \Delta' \neq \varnothing$ для симплекса $\Delta' \in \mathscr{L}_i$, то $x_0 \in \Delta'$, а $\Delta' \in \mathscr{L}_{in}$, где $n \leqslant a$.

Лемма 3.4. *Пусть $x_0 \in P_i$. Если $x_0 \in \sigma \in \delta^a L$, а $\operatorname{rint} \sigma \cap P_i \neq \varnothing$, то $\operatorname{rint} \sigma \cap \mathscr{V}(x_0) \subset P_i \cap U$.*

Доказательство. Предположим, что заключение леммы не выполняется. Тогда

(2) существует симплекс $\sigma \in \delta^a L$ с $x_0 \in \sigma$ такой, что $\operatorname{rint} \sigma \cap \operatorname{rint} \Delta' \neq \varnothing$ для некоторого симплекса $\Delta' \in \mathscr{L}_i$, но $\operatorname{rint} \sigma \cap \mathscr{V}(x_0)$ не лежит в $P_i \cap U$.

Из свойства (1) следует, что $x_0 \in \Delta' \in \delta^{n_i} L$ и $n_i \leqslant a$. Так как (в силу свойства (2)) $x_0 \in \sigma \in \delta^a L$ и $\operatorname{rint} \sigma \cap \operatorname{rint} \Delta' \neq \varnothing$, то, как легко видеть, $\operatorname{rint} \sigma \subset \operatorname{rint} \Delta'$. Поэтому $\operatorname{rint} \sigma \cap \mathscr{V}(x_0) \subset \operatorname{rint} \Delta' \cap \mathscr{V}(x_0) \subset P_i$. Так как $\mathscr{V}(x_0) \subset U$, то, стало быть, $\operatorname{rint} \sigma \cap \mathscr{V}(x_0) \subset P_i \cap U$. Последнее противоречит сделанному предположению.

Через X далее обозначим $\nu^k_{\mathfrak{L}} P$. Следующий результат является ключевым.

Теорема 3.5. *Если $\{P_i \cap X\}$ является $\mathscr{C}_X$-разбиением X, то существует такая окрестность V, $X \subset V \subset P$, что $\{P_i \cap V\}$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное разбиение V.*

Доказательство. С учетом теоремы 1.3 с самого начала можно считать, что $\{P_i\}$ есть локально конечное замкнутое покрытие P кратности $\leqslant k+1$.

В качестве искомой окрестности V можно взять U, определенную выше. Нам необходимо проверить условия (i), (ii) из § 2:

(i)′ $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивный полиэдр $U \cap P_{A'}$ является подмногообразием U;

(ii)′ $U \cap P_{A' \cup \{\alpha\}} \subset \partial(U \cap P_{A'})$.

Сначала установим (ii)′, предполагая, что $U \cap P_{A'}$ и $U \cap P_{A' \cup \{\alpha\}}$ являются $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивными подмногообразиями U. По определению $\mathscr{C}_X$-разбиения имеем $X \cap P_{A'}$, $X \cap P_{A' \cup \{\alpha\}} \in \mathscr{C}_X$ и $X \cap P_{A' \cup \{\alpha\}} \subset_Z X \cap P_{A'}$. Тогда из предложения 2.6, очевидно, следует (ii)′.

Наконец, установим (i)′ методом от противного. Предположим, что существует точка $x_0 \in T \rightleftharpoons U \cap P_{A'}$, в которой $\mathfrak{L}$-конструктивный полиэдр T не является локально плоским в U [6; гл. 4]. Для простоты обозначений будем считать, что $A' = \{i \leqslant t\}$. Из леммы 3.4 легко следует, что

(3) если $x_0 \in \sigma \in \delta^a L$, а $\operatorname{rint} \sigma \cap P_i \neq \varnothing$ для всех $i \leqslant t$, то $\operatorname{rint} \sigma \cap \mathscr{V}(x_0) \subset T$.

Пусть $W' \rightleftharpoons \bigcup \{\operatorname{rint} \sigma \mid x_0 \in \sigma \in \delta^a L$ и $\operatorname{rint} \sigma \cap P_i \neq \varnothing$ для всех $i \leqslant t\}$. Из (3) следует, что

(4) $W \rightleftharpoons \mathscr{V}(x_0) \cap W' \subset T$ есть окрестность x_0.

Легко видеть, что W в окрестности точки x_0 устроено, как произведение некоторого открытого подмножества $\operatorname{rint} \Delta(x_0)$ на полиэдр. Это влечет однородность пары (U, T) в окрестности x_0 в следующем смысле:

(5) существует такая окрестность $\mathscr{O}$ точки x_0 в U, что любые две точки из $\mathscr{O} \cap \Delta(x_0)$ переходят одна в другую при помощи кусочно линейного автогомеоморфизма пары (U, T), тождественного вне $\mathscr{O}$.

Поскольку $\dim \Delta(x_0) \geqslant p - k$, то $x_0 \in \operatorname{rint} \Delta(x_0)$ является предельной точкой $\operatorname{rint} \Delta(x_0) \cap X$. Так как в силу (5) локальное строение T одинаково в близких к x_0 точках из $\operatorname{rint} \Delta(x_0)$, то существует точка $x' \in T \cap X$, в которой T также не локально плоско в U. Последнее противоречит приведенному ниже предложению.

Предложение 3.6. *Пусть $E \cap X \in \mathscr{C}_X$, где $E \subset P$ есть $\mathfrak{L}$-конструктивный полиэдр. Тогда существует такое открытое подмножество O, $E \cap X \subset O \subset P$, что $E \cap O$ есть $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие O.*

Доказательство. Так как $E \cap X \in \mathscr{C}_X$, то существует такое $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие $W \subset P$, что $W \cap X = E \cap X$. За счет перехода к окрестности X в P (см. теорему 1.3, (b)) можно без потери общности считать, что E и W замкнуты в P. Поскольку $(E \setminus W) \cap X = \varnothing$, то

(6) $E \setminus W$ открыто в E и $\dim(E \setminus W) < p - k$.

Из приведенного ниже факта, несложное доказательство которого опускается, следует, что в некоторой окрестности $E \cap X$ все точки из W содержатся в E.

Лемма 3.7. *Если $R \cap X \subset Q \cap X$, где R есть $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие, а $Q \subset P$ локально компактно, то $R \subset Q$ в некоторой окрестности $R \cap X$.*

Доказательство предложения 3.6 будет завершено, если мы покажем, что E и W совпадают в некоторой окрестности V множества $E \cap X$. Установим это методом от противного: пусть $E \cap X$ и $\operatorname{Cl}_P(E \setminus W)$ имеют общую точку x. Рассмотрим такое подразделение $\delta^a L$, что W и E в окрестности x являются подполиэдрами относительно $\delta^a L$. Пусть $x \in \operatorname{rint} \Delta_0$, где $\Delta_0 \in \delta^a L$. Так как $\dim \Delta_0 \geqslant p - k$ и $\Delta_0 \subset E$, то любое открытое подмножество E, лежащее рядом с x, имеет $\dim \geqslant p-k$. Сопоставляя это со свойством (6), получаем противоречие.

Доказанная теорема 3.5 вместе с предложениями 1.4, 1.5, 2.6 и 2.7, а также теоремой об открытости класса k-эквивалентностей [1; теорема 10.6] позволяют без труда получить принципиально важную теорему о взаимоотношении между $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивными разбиениями и удобными разбиениями ядра Небелинга.

Теорема 3.8. *Пусть $\{P_\alpha\}_{\alpha\in A}$ есть такое семейство $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивных подмногообразий P, что $\mathscr{P} \rightleftharpoons \{P_\alpha\cap X\}_{\alpha\in A}$ есть удобное l_r-разбиение X при $l\leqslant k$, $l+r\leqslant k+1$. Пусть также фиксированы счетное семейство $\{R_i\}$ $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивных подмногообразий P, для которых $\{E_i \rightleftharpoons R_i\cap X\in\mathscr{C}_X\}$ есть дискретное в X семейство Z-множеств. Пусть также заданы $\omega\in\operatorname{cov}X$ и аккомпанемент $\beta'\colon X\to\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ трансформации $T'\colon\mathscr{P}\to\widehat{\mathscr{Q}}$, являющийся k-эквивалентностью относительно $\theta\in\operatorname{cov}\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$. Тогда для любого $\lambda\in\operatorname{cov}\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ существуют такие открытое подмножество U, $X\subset U\subset P$, отображение $\beta\colon U\to\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, $\operatorname{dist}(\beta',\beta\restriction_X)\prec\lambda$, и $\widehat{\omega}\in\operatorname{cov}U$, $\widehat{\omega}\restriction_X=\omega$, что:*

(α) *$\{P_\alpha\cap U\}$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное l_r-разбиение U;*
(β) *$\{R_i\cap U\}$ является дискретным в U семейством Z-множеств;*
(γ) *$\mathscr{S}\colon\{P_\alpha\cap U\}\to\mathscr{P}$, $S(P_\alpha\cap U)=P_\alpha\cap X$, является трансформацией, а β является аккомпанементом композиции $T'\circ S\colon\{P_\alpha\cap U\}\to\widehat{\mathscr{Q}}$ трансформаций;*
(δ) *β является k-эквивалентностью относительно $\theta\circ\lambda$.*

В качестве следствия теоремы 3.8 и предложения 2.5 приведем критерий ручных Z-множеств.

Следствие 3.9. *$F\subset X$ есть трансверсальное (поглощаемое) Z-множество в том и только том случае, когда для любого открытого подмножества U, $X\subset U\subset P$, и для любого его $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивного разбиения $\{Q_\alpha\}$ существует открытое подмножество V, $X\subset V\subset U$ (существуют открытое подмножество $X\subset V\subset U$ и k-совершенное относительно $\{Q_\alpha\cap V\}$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие $N\subset V$), для которого имеем*

$$\operatorname{Cl}_V(Q_{A'}\cap F)\subset_{Z_{k+1-|A'|}} Q_{A'}\cap V$$

всякий раз, как только $Q_{A'}\neq\varnothing$ (для которого имеем $\operatorname{Cl}_V F\subset\operatorname{Int}N$).

§ 4. Теорема об изотопическом движении

Пусть $P\subset M^m$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное многообразие. В дальнейшем встретится ситуация, когда некоторые PL-подмногообразия P не будут являться $\mathfrak{L}$-конструктивными. Преодолеть это неудобство помогает следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathscr{L}$ есть смешанная триангуляция P. Тогда для любого счетного числа PL-подмногообразий $\{P_i\}_{i=1}^\infty$ в P существует изотопия $\Phi\colon P\times I\to P$, сохраняющая $\mathscr{L}$, такая, что $\Phi_1(P_i)$ является $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивным подмногообразием P для всех $i\geqslant 1$.*

Доказательство легко следует из двух приведенных ниже лемм, которые устанавливаются аналогично [5; 2.2].

Лемма 4.2. *Пусть* $\{\mathscr{L}_n\}$ *есть естественная стратификация* $\mathscr{L}$, *а* $L, \theta L, \theta^2 L, \dots, \theta^r L$ *есть такая последовательность многократных производных подразделений триангуляции* L *многообразия* M, *что для всех* $i = 0, 1, \dots, r$ *справедливо*

(a)$_i$ $\theta^i L$ *совпадает с* $\delta^i L$ *на подполиэдре* $\operatorname{St}\bigl(|\mathscr{L}_i \cup \mathscr{L}_{i+1} \cup \cdots|; \delta^i L\bigr) \subset M$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *и любого компактного подполиэдра* $Q \subset M$ *существует такое продолжение* $L, \theta L, \theta^2 L, \dots, \theta^r L, \dots, \theta^R L$ *последовательности производных подразделений* L, *что* $\operatorname{mesh} \theta^R L < \varepsilon$, Q *является подполиэдром относительно* $\theta^R L$, *а также выполнены свойства* (a)$_i$ *для всех* $i = 0, 1, \dots, r, r+1, \dots, R$.

Лемма 4.3. *Пусть* $\mathfrak{T} = \{\theta^r L\}$ *есть альтернативная нуль-последовательность многократных производных подразделений* M. *Тогда существует изотопия* $\Phi\colon M \times I \to M$ *такая, что*:

(a) $\Phi_1(\delta^r L) = \theta^r L$ *для всех* $r \geqslant 0$;
(b) *если* $\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \cdots \supset \Delta_r$, *где* $\Delta_i \in \delta^i L \cap \theta^i L$, *то* $\Phi_t(\Delta_r) = \Delta_r$ *для всех* $t \in I$ (*и, стало быть,* $\Phi_t(P \times I) = P$ *для всех* $t \in I$).

§ 5. Структура джойна на многообразиях

Напомним, что *джойном* $X * Y$ компактных пространств X и Y называется факторпространство произведения $X \times Y \times [0,1]$ по разбиению, нетривиальными элементами которого являются лишь $X \times \{y\} \times \{0\}$ и $\{x\} \times Y \times \{1\}$. Проверка аксиом уединения и Z-множеств во многом основывается на понятии геометрического джойна, являющегося вариацией джойна.

Предложение 5.1. *Пусть непересекающиеся подмножества* S *и* T *полиэдра* $V \subset \mathbb{R}^m$ *являются подполиэдрами относительно триангуляции* K. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(1) $V = \bigl\{(1-t)\cdot x + t \cdot y \mid 0 \leqslant t \leqslant 1,\ x \in S$ *и* $y \in T$ *лежат в одном симплексе* $K\bigr\}$;
(2) *существует такое отображение* $\mathfrak{J}\colon V \to [0,1]$, *являющееся кусочно линейным относительно* K *и стандартной триангуляции* $[0,1]$, *что* $S = \mathfrak{J}^{-1}(0)$ *и* $T = \mathfrak{J}^{-1}(1)$.

Ясно, что отображение $\mathfrak{J}$ из условия (2) задается формулой

$$\mathfrak{J}\bigl((1-t)\cdot x + t\cdot y\bigr) = t,$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$, $x \in S$ и $y \in T$ лежат в одном симплексе K.

Определение 5.2. Полиэдр $V \subset \mathbb{R}^m$ называется *геометрическим джойном* непересекающихся подполиэдров $S, T \subset V$ относительно триангуляции K, если выполнено одно из двух эквивалентных условий (1), (2).

Назовем $\mathfrak{J}$ *отображением геометрического джойна на* V, а V – *геометрическим джойном, порожденным* $\mathfrak{J}$. Будем использовать запись $V = S *_K T$

(поскольку отображение J однозначно восстанавливается по S, T и K, в записи оно опущено).

Приведем примеры и свойства геометрических джойнов:

(i) если триангуляция K одноэлементна, то $S *_K T$ есть обычный джойн;

(ii) замкнутая симплициальная окрестность $R = \mathrm{N}(Q, K)$, где K есть барицентрическое подразделение K', полиэдра Q в V [6] (являющаяся регулярной окрестностью Q в V) есть геометрический джойн, порожденный естественным симплициальным отображением $\mathfrak{J}\colon R \to [0,1]$, для которого $\mathfrak{J}^{-1}(0) = Q$ и $\mathfrak{J}^{-1}(1) = \dot{\mathrm{N}}(Q, K)$;

(iii) пусть кусочно линейное отображение $\mathfrak{J}\colon V \to [0,1]$ относительно K и стандартной триангуляции $[0,1]$ есть отображение геометрического джойна, а $R \subset V$ есть подполиэдр относительно K такой, что $\mathfrak{J}(R) = [0,1]$; тогда $\mathfrak{J}{\restriction}_R\colon R \to [0,1]$ есть отображение геометрического джойна на R, которое называется *индуцированным*.

Пусть $V = S *_K T$ есть геометрический джойн, порожденный $\mathfrak{J}$. Рассмотрим прообразы $V[E]$ произвольных подмножеств $E \subset [0,\infty]$ относительно композиции $V \xrightarrow{\mathfrak{J}} [0,1] \xrightarrow{\varphi} [0,\infty]$, где $\varphi(x) \rightleftharpoons -\lg_2(1-x)$ есть гомеоморфизм. Очевидно, что:

(a) $V[0] = S, V[\infty] = T$ и $P(0,\infty) \cong V[1] \times (0,\infty)$;

(b) $V[0,1]$ есть регулярная окрестность S, а $V[1,\infty]$ – регулярная окрестность T;

(c) $V[E] = \bigl\{(1-t)\cdot x + t\cdot y \mid x \in V[0]$ и $y \in V[\infty]$ лежат в одном симплексе K, а $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\varphi(t) \in E\bigr\}$.

В дальнейшем в целях упрощения терминологии будем говорить, что отображение $\mathfrak{J}\colon V \to [0,1]$ геометрического джойна на V *задает структуру* $\mathfrak{J} = \{V[E] \mid E \subset [0,\infty]\}$ *геометрического джойна*. Если не будет возникать путаницы, то будем отождествлять геометрический джойн и его структуру. Заметим, что структура индуцированного геометрического джойна на $R \subset V$ совпадает с $\{V[E] \cap R \mid E \subset [0,\infty]\}$.

Далее мы будем иметь дело с геометрическими джойнами на многообразии P относительно триангуляции K' и на его подмногообразиях. Так как $P[0,s]$ и $P[s,\infty]$ являются регулярными окрестностями соответственно $P[0]$ и $P[\infty]$, то из [6; 3.10] следует, что для отображения $\mathfrak{J}\colon P \to [0,1]$ геометрического джойна

(iv) $P[0,s]$, $P[s]$ и $P[s,\infty]$ являются подмногообразиями для любого $0 < s < \infty$.

Важную роль будет играть подмногообразие $P[1]$, которое назовем *серединой геометрического джойна*. В силу свойства (c) проекция $\mathfrak{R}\colon P(0,\infty) \to P[1]$, $\mathfrak{R}(t\cdot x + (1-t)\cdot y) = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}\cdot y$, на середину геометрического джойна корректно определена и является ретракцией. Отображения $\mathfrak{R}$ и $\varphi \circ \mathfrak{J}{\restriction}\colon P(0,\infty) \to (0,\infty)$ задают естественную структуру произведения на $P(0,\infty)$: отображение $\Phi \rightleftharpoons \mathfrak{R} \times (\varphi \circ \mathfrak{J})\colon P(0,\infty) \to P[1] \times (0,\infty)$ является гомеоморфизмом. Отметим также, что

(d) отображения $\mathfrak{R}$ и Φ сохраняют триангуляцию K, а следовательно, эта структура произведения наследственна относительно триангуляции K.

Предъявим достаточно общий способ представления многообразий в виде джойна. Пусть P есть многообразие размерности $p \geqslant 2k+1$ относительно триангуляции K', а $R \subset P$ есть подмногообразие относительно K' размерности $(p-k)+s$, где $0 \leqslant s \leqslant k$. Каноническим образом построим отображение $\mathfrak{J}_{R,s}\colon R \to [0,1]$ геометрического джойна на R относительно барицентрического подразделения $K = \beta K'$. Пусть $S = S_R$ есть подполиэдр $\bigl(R \cap |(K')^{(t)}|\bigr) \cup \partial R$, где $t = \dim R - (s+1)$. Так как $\partial R \subset S$ и $s+t+1 \leqslant \dim R$, то

(3) $S \subset_{Z_s} R$.

Так как S – подполиэдр относительно $K = \beta K'$, то $\Delta \cap S$ является гранью симплекса $\Delta \cap R$ для любого симплекса $\Delta \in K$. Обозначим через $T_\Delta \subset \Delta \cap R$ дополнительную грань $\Delta \cap S$, а через $T = T_R$ – полиэдр $\bigcup \{T_\Delta \mid \Delta \in K\}$ относительно K. Так как $\dim T_\Delta \leqslant s$, то

(4) $\dim T \leqslant s$.

Легко проверить, что полиэдры S и T удовлетворяют условию (1) предложения 5.1 и, следовательно, существует отображение $\mathfrak{J}_{R,s}\colon R \to [0,1]$ геометрического джойна относительно K, для которого $S = \mathfrak{J}_{R,s}^{-1}(0)$ и $T = \mathfrak{J}_{R,s}^{-1}(1)$. Так как $s + \dim T + 1 \leqslant \dim R$, то

(5) $T \subset_{Z_s} R$.

Непосредственно из построения отображения $\mathfrak{J}_{P,k}$ и явной формулы для полиэдров S, T следует

Теорема 5.3. *Если $R \cap \partial P \subset \partial R$, то $\mathfrak{J}_{P,k}(R) = [0,1]$, а отображение $\mathfrak{J}_{R,s}$ геометрического джойна на R и отображение $\mathfrak{J}_{P,k}{\restriction}_R$ индуцированного геометрического джойна на R связаны соотношением $\mathfrak{J}_{R,s} = \mathfrak{J}_{P,k}{\restriction}_R$.*

Пусть $\{Q_\alpha\}$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное разбиение многообразия P, элементы которого являются подполиэдрами относительно K. Тогда структура $\mathfrak{J}_{P,k} = \{P[E] \mid E \subset [0,\infty]\}$ геометрического джойна на P порождает допустимые и совершенные относительно $\{Q_\alpha\}$ подмногообразия:

(e) для всех $0 < s < t < \infty$ $P[s,t]$ является k-допустимым подмногообразием относительно $\{Q_\alpha\}$, а $P[0,s]$ и $P[s,\infty]$ являются k-совершенными подмногообразиями относительно $\{Q_\alpha\}$.

Структура

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{P,k} = \{P[E]\}$$

геометрического джойна обладает существенным изъяном: полиэдры $P[s,t]$, вообще говоря, не являются $\mathfrak{L}$-конструктивными. Однако если допустить к рассмотрению “криволинейные” джойны, то эта сложность становится преодолимой. Произвольный гомеоморфизм $h\colon P \to P$ порождает композицию

$$\mathfrak{J}^h\colon P \xrightarrow{h^{-1}} P \xrightarrow{\varphi\circ\mathfrak{J}} [0,\infty],$$

и семейство $\mathfrak{J}^h = \{P^h(E) \rightleftharpoons h(P[E])\}$ – образ структуры $\{P[E]\}$ геометрического джойна $\mathfrak{J}$. Таким образом, на P возникает “топологическая” копия исходного геометрического джойна.

Пусть $P \subset M^m$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное многообразие размерности $p \geqslant 2k+1$, а $\mathscr{L}$ есть его смешанная триангуляция. В силу леммы 2.1 существует триангуляция K' многообразия P, вписанная в $\mathscr{L}$. Рассмотрим каноническое отображение $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{P,k}\colon P \to [0,1]$ геометрического джойна на P относительно барицентрического подразделения $K = \beta K'$.

Теорема 5.4. *Для любого счетного семейства подполиэдров* $\{T_i \mid i \geqslant 1\}$ *из середины* $P[1] = \mathfrak{J}^{-1}(1)$ *геометрического джойна* $\mathfrak{J}$ *существует такой гомеоморфизм* $h\colon P \to P$, *сохраняющий смешанную триангуляцию* $\mathscr{L}$, *для которого*:

(f) *для рациональных* $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant \infty$ (*включая* $t = \infty$) *множества* $P^h[s,t] \subset P$ *и* $P^h[s,t] \cap h(\mathfrak{R}^{-1}(T_i)) \subset P$ *являются* $\mathfrak{L}$-*конструктивными подполиэдрами*;

(g) $P^h[0] \sqcup P^h[\infty] \subset_{Z_k} P$ *и* $\partial P \subset P^h[0]$, *а также* $\dim P^h[\infty] \leqslant k$ *и* $P^h[\infty] \cap \nu^k_{\mathfrak{L}}(P) = \varnothing$.

Доказательство этой теоремы является несложным следствием условий (3)–(5) и теоремы 4.1 об изотопическом движении, и его мы оставляем читателю.

Глава 2. Непротиворечивость системы аксиом

На протяжении всей главы фиксируем $\kappa \geqslant 0$, PL-многообразие M^m размерности $\geqslant 2\kappa + 3$, заданное в триангуляции L, и нуль-последовательность $\mathfrak{L} = \{L, \delta L, \delta^2 L, \dots\}$ многократных производных подразделений триангуляции L. Пусть $X = \nu^k_{\mathfrak{L}} P$ есть ядро Небелинга $\nu^s_{\mathfrak{L}}$-конструктивного многообразия $P \subset M$. Через $\mathscr{C}^s_X$, $0 \leqslant s \leqslant k$, обозначим семейство

$$\bigl\{\nu^s_{\mathfrak{L}} Q \mid Q \text{ есть } \nu^s_{\mathfrak{L}}\text{-конструктивное подмногообразие } P\bigr\},$$

а через $\mathscr{C}_X$ – семейство $\{\mathscr{C}^s_X \mid 0 \leqslant s \leqslant k\}$. Как показано в предложении 2.2, $\mathscr{C}_X$ не зависит от представления X в виде $\nu^k_{\mathfrak{L}} P$. Покажем, что ядро Небелинга X вместе с семейством $\mathscr{C}_X$ абстрактных конструктивных множеств будет моделью системы аксиом. В силу теоремы 3.8 и предложения 2.6 аксиомы редуцируются к своим кусочно линейным аналогам, которые и будут доказываться в соответствующих параграфах.

Всюду далее $\widehat{\mathscr{Q}}$ есть удобное k-разбиение абстрактного ν^k-конструктивного AE(k)-пространства $\widehat{X} \in \mathrm{AE}$ с полным нервом.

§ 6. Проверка аксиом конструктивных множеств

Пусть $\mathscr{C}^s_P$ есть семейство всех $\nu^s_{\mathfrak{L}}$-конструктивных подмногообразий P, $0 \leqslant s \leqslant k$, $\mathscr{C}_P \rightleftharpoons \bigcup\{\mathscr{C}^s_P \mid 0 \leqslant s \leqslant k\}$. Ясно, что семейство $\grave{\mathscr{C}}_P$ всех компактных $Q \in \mathscr{C}_P$ счетно.

Аксиомы конструктивных множеств (кусочно линейный вариант).

$(\mathscr{C})_1$ Аксиома базы: *Множество всех* $Q \in \mathscr{C}^k_P$ *образует замкнутую базу* P.

$(\mathscr{C})_2$ Аксиома двухэлементных разбиений: *Если* $Q \in \mathscr{C}^k_P$ *является замкнутым, то* $\{Q, P \setminus \operatorname{Int} Q\}$ *есть* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-*конструктивное разбиение* P.

$(\mathscr{C})_3$ Аксиома образующих гомотопических групп: $P \in \mathrm{ANE}$ *и* $\pi_l(P)$ *имеет счетное число образующих при* $l < k$.

$(\mathscr{C})_4$ Аксиома дискретности: *Если* $\{Q_\alpha \in \mathscr{C}^s_P\}$ *есть дискретное семейство, где* $0 \leqslant s \leqslant k$, *то* $\bigsqcup\{Q_\alpha \mid \alpha \in A\} \in \mathscr{C}^s_P$.

$(\mathscr{C})_5$ Аксиома укрупнения: *Если* $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}$ *есть* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-*конструктивное разбиение* P, *то любое укрупнение* $\mathscr{P}$ *есть снова* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-*конструктивное разбиение*.

$(\mathscr{C})_6$ Аксиома аддитивности: *Если* $Q, Q' \in \mathscr{C}_P^s$ *замкнуты, а* $Q \cap Q' \in \mathscr{C}_P^{s-1}$ *лежит в* ∂Q *и* $\partial Q'$, *то* $Q \cup Q' \in \mathscr{C}_P^s$.

$(\mathscr{C})_7$ Аксиома Z-множеств в разбиениях: *Для любого* $\nu_{\mathfrak{L}}^k$*-конструктивного разбиения* $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *многообразия* P *и для любого* $P_{A'} \neq \varnothing$, $A' \subset A$, *относительная граница* $\mathscr{B}\partial p_{A'} \in \mathscr{C}_P$ *и* $\mathscr{B}\partial P_{A'} \subset \partial P_{A'}$.

$(\mathscr{C})_8$ Аксиома универсальности: *Ядро Небелинга* $X = \nu_{\mathfrak{L}}^k(P)$ *является* k*-мерным сильно* k*-универсальным польским пространством.*

$(\mathscr{C})_9$ Аксиома счетной порожденности: *Для любого* $\nu_{\mathfrak{L}}^k$*-конструктивного разбиения* $\mathscr{P}$ *многообразия* P *существует* $\nu_{\mathfrak{L}}^k$*-конструктивное разбиение* P, *вписанное в* $\mathscr{P}$, *пересечения элементов которого принадлежат* $\grave{\mathscr{C}}_P$.

$(\mathscr{C})_{10}$ Аксиома наследственности: *Для любого* $Q \in \mathscr{C}_P$ $\grave{\mathscr{C}}_Q \subset \grave{\mathscr{C}}_P$ *и* $\mathscr{C}_Q \subset \mathscr{C}_P$; *для* Q *справедливы аксиомы* $(\mathscr{C})_1$–$(\mathscr{C})_9$, *если заменить в них* P *на* Q.

Проверка большинства аксиом представляет собой легкие упражнения из кусочно линейной теории (см., например, [5; 1.1]). Доказательство аксиомы универсальности изложено в [7]. В аксиоме $(\mathscr{C})_9$ следует взять в качестве искомого $\nu_{\mathfrak{L}}^k$-конструктивного разбиения разложение на ручки (см. проверку аксиомы конфинальности, § 7).

§ 7. Проверка аксиом трансверсальности, конфинальности, воротников и раздутия

Аксиома трансверсальности (кусочно линейный вариант). *Для любого* $\nu_{\mathfrak{L}}^k$*-конструктивного разбиения* $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}$ *многообразия* P, *а также для любого его покрытия* $\varepsilon = \{W_\gamma\} \in \operatorname{cov} P$ *существует* $\nu_{\mathfrak{L}}^k$*-конструктивное* k*-разбиение* $\mathscr{Q}$ *многообразия* P, *трансверсальное* $\mathscr{P}$ *и вписанное в* ε.

Аксиома конфинальности (кусочно линейный вариант). *Для любого* $\nu_{\mathfrak{L}}^k$*-конструктивного разбиения* $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}$ *многообразия* P, *а также для любого его покрытия* $\varepsilon = \{W_\gamma\} \in \operatorname{cov} P$ *существует* $\nu_{\mathfrak{L}}^k$*-конструктивное* k*-разбиение* $\mathscr{Q}$ *многообразия* P, *вписанное в* $\mathscr{P}$ *и* ε.

Замечание 7.1. Из доказательства будет видно, что все непустые пересечения элементов разбиения $\mathscr{Q}$ являются клетками соответствующих размерностей.

Проверка аксиом. Пусть $\mathscr{L} \prec \{W_\gamma\}$ есть такая смешанная триангуляция P (относительно $\mathfrak{L}$), что любой элемент $P_\alpha \in \mathscr{P}$ является подполиэдром относительно $\mathscr{L}$. В силу леммы 2.1 существует триангуляция $L' \prec \mathscr{L}$. Рассмотрим последовательность $\{\beta^r L'\}$ барицентрических подразделений L', а также перенумеруем элементы $\mathscr{P}$ различными натуральными числами $\{c_\alpha\}$.

Для проверки первой аксиомы следует взять разложение $\mathscr{Q}'$ многообразия P на ручки, ассоциированное с L' [1; § 3]. Для проверки второй аксиомы следует взять сначала разложение $\mathscr{Q}_\alpha$ элемента $P_\alpha \in \mathscr{P}$ на ручки, ассоциированное с $\beta^{c_\alpha}(L')$, затем семейство $\mathscr{Q}' \rightleftharpoons \{\mathscr{Q}_\alpha\}$ (которое, как видно из [5; 1.1.8], является разбиением P). В обоих случаях к элементам $\mathscr{Q}'$ следует применить теорему 4.1 об изотопическом движении. В результате получим сохраняющую $\mathscr{L}$ изотопию $\Phi\colon P \times I \to P$, переводящую элементы разбиения $\mathscr{Q}'$ в $\nu_{\mathfrak{L}}^k$-конструктивные многообразия. Легко проверить, что $\mathscr{Q} \rightleftharpoons \Phi_1(\mathscr{Q}')$ есть искомое разбиение P как для первой, так и для второй аксиомы.

Аксиома воротников (кусочно линейный вариант). *Пусть* $\mathscr{Q}_0$ *есть* $\nu^{k-1}_{\mathfrak{L}}$-*конструктивное разбиение* $\nu^{k-1}_{\mathfrak{L}}$-*конструктивного подмногообразия* $N \subset \partial P$, *а* $\omega \in \operatorname{cov} P$. *Если* $\mathscr{Q}_0 \prec \omega$, *то существует* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-*конструктивное разбиение* $\mathscr{Q}$, $\mathscr{Q} \prec \omega$, *многообразия* P *такое, что* $\mathscr{Q}{\restriction}_N = \mathscr{Q}_0$, *а естественное соответствие* $\mathscr{Q}_0 \hookrightarrow \mathscr{Q}$ *является инъективным.*

Для проверки этой аксиомы следует воспользоваться теоремой о воротнике для многообразий и теоремой 4.1 об изотопическом движении.

Аксиома раздутия (кусочно линейный вариант). *Для любого* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-*конструктивного разбиения* $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}$ *многообразия* P *существует раздутие* $\{\mathscr{O}(P_\alpha)\} \in \operatorname{cov} P$ *такое, что для всех* $A' \subset A$ *вложение*

$$P_{A'} \hookrightarrow \bigcap \{\mathscr{O}(P_\alpha) \mid \alpha \in A'\}$$

есть $(k+1-|A'|)$-*эквивалентность.*

Доказательство аксиомы оставляем читателю, заметив лишь, что в качестве $\mathscr{O}(P_\alpha)$ следует взять регулярную окрестность P_α относительно достаточно мелкой триангуляции.

§ 8. Проверка аксиомы уединения

Пусть $\mathscr{Q} = \{Q_\alpha\}$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное разбиение P, а $\{H_i\}_{i=1}^\infty$ – дискретное в P семейство $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивных подмногообразий, лежащих в ∂P.

Аксиома уединения (кусочно линейный вариант). *Существует такое семейство* $\{N_i \mid i \geqslant 1\}$ k-*совершенных относительно* $\mathscr{Q}$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-*конструктивных подмногообразий, что* $\{N_i \cap X \mid i \geqslant 1\}$ *есть дискретное в* $X = \nu^k_{\mathfrak{L}} P$ *семейство и* $H_i \subset \operatorname{Int} N_i$ *для всех* i.

В свою очередь это утверждение редуцируется к проверке более простого факта.

Предложение 8.1. *Существуют*:

(a) *семейство* $\{N_i \mid 1 \leqslant i\}$ k-*допустимых относительно* $\mathscr{Q}$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-*конструктивных подмногообразий таких, что* $\{N_i \cap X \subset X \mid i \geqslant 1\}$ *дискретно, а также* $H_i \subset N_i$ *для всех* i;

(b) k-*совершенное относительно* $\mathscr{Q}$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-*конструктивное подмногообразие* G *такое, что* $H_1 \subset G$ *и* $H_2 \cap G = \varnothing$.

Редукция аксиомы уединения к предложению 8.1. Пусть $\{H_i'\}$ и $\{H_i''\}$ – дискретные семейства $\nu^{k-1}_{\mathfrak{L}}$-конструктивных подмногообразий таких, что $H_i \Subset H_i' \Subset H_i'' \subset \partial P$ для всех i. В силу (a) существует семейство $\{N_i\}_{i \geqslant 1}$ k-допустимых относительно $\mathscr{Q}$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивных подмногообразий таких, что $\{N_i \cap X \subset X \mid i \geqslant 1\}$ дискретно, а также $H_i'' \subset N_i$ для всех i. Для разбиения $\mathscr{Q}{\restriction}_{N_i}$ подмногообразия N_i и двухэлементного дискретного семейства $\{H_i', \operatorname{Bd}_P N_i\}$, лежащего в ∂N_i, приме́ним (b): существует такое семейство $\{G_i\}$ k-совершенных относительно $\mathscr{Q}{\restriction}_{N_i}$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивных подмногообразий N_i, что $H_i' \subset G_i$ и $\operatorname{Bd}_P N_i \cap G_i = \varnothing$. Так как $H_i \Subset G_i$, то из предложения 2.8 следует, что G_i является k-совершенным относительно $\mathscr{Q}$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивным подмногообразием P.

Доказательство предложения 8.1. В силу [1; лемма 5.2] существует такая смешанная триангуляция $\mathscr{L}$, что:

(c) все Q_α и H_i являются подполиэдрами относительно $\mathscr{L}$;

(d) семейство $\{\mathrm{N}(H_i;\mathscr{L}) \mid 1 \leqslant i\}$ замкнутых симплициальных окрестностей является дискретным в P.

Воспользуемся леммой 2.1 и введем в рассмотрение триангуляцию K' многообразия P, вписанную в $\mathscr{L}$. Переходя, если надо, к $\beta^2 K'$, будем считать, что замкнутая симплициальная окрестность $R_i \rightleftharpoons \mathrm{N}(H_i;K')$ является регулярной окрестностью H_i в P, а $R_i \cap Q_{A'}$ есть регулярная окрестность $H_i \cap Q_{A'}$ в $Q_{A'}$ для всех $A' \subset A$. Отсюда в силу [6; 3.10] следует

(e) $R_i \cap \partial P \subset \partial R_i$ и $R_i \cap \partial Q_{A'} = (R_i \cap Q_{A'}) \cap \partial Q_{A'} \subset \partial(R_i \cap Q_{A'})$.

Из (d) следует, что семейство $\{R_i \mid 1 \leqslant i\}$ дискретно в P и $H_i \subset \partial P \cap \operatorname{Int} R_i$. Обозначим через $\mathscr{S}$ семейство $\{P, R_i, Q_{A'}, R_i \cap Q_{A'} \mid i \geqslant 1,\ A' \subset A\}$, которое является, как несложно видеть, локально конечным и состоит из счетного числа подмногообразий (относительно триангуляции K').

Лемма 8.2. *Для любого $R \in \mathscr{S}$ справедливо $R \cap \partial P \subset \partial R$.*

Доказательство. Вложение $Q_{A'} \cap \partial P \subset \partial Q_{A'}$ следует из [5; 1.1.9(c)]. Поэтому $R_i \cap (Q_{A'} \cap \partial P) \subset R_i \cap \partial Q_{A'}$. Отсюда с учетом (e) имеем

$$(R_i \cap Q_{A'}) \cap \partial P = R_i \cap (Q_{A'} \cap \partial P) \subset R_i \cap \partial Q_{A'} \subset \partial(R_i \cap Q_{A'}).$$

Для $\varnothing \neq R \in \mathscr{S}$ имеем $\dim R = p + s - k$, где $0 \leqslant s \leqslant k$. В § 5 определены отображение $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_{P,k}\colon P \to [0,1]$ геометрического джойна на P относительно барицентрического подразделения $K = \beta K' \prec \mathscr{L}$ и отображение $\mathfrak{J}_R = \mathfrak{J}_{R,s}\colon R \to [0,1]$ геометрического джойна на R относительно K. В силу леммы 8.2 и теоремы 5.3 имеем

(f) $\mathfrak{J}{\restriction}_R = \mathfrak{J}_{R,s}$.

Через $\{R[E] \mid E \subset [0,\infty]\}$, $R \in \mathscr{S}$, обозначим структуру геометрического джойна $\mathfrak{J}_R$. В силу свойств (iv) и (3)–(5) из § 5 имеем

(g) $R[1]$ и $R[0,1]$ являются многообразиями, а также

$$R[0] \subset_{Z_{\dim R - \dim P + k}} R[0,1]$$

для любого $R \in \mathscr{S}$.

Более подробно исследуем *середину* $P[1]$ *геометрического джойна* $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_P$, которую для краткости обозначим через Π. Так как $P[0,1] \subset P$ есть регулярная окрестность полиэдра $P[0]$, то Π является подмногообразием. Заметим, что границей $\partial\Pi$ является $\partial P \cap \Pi$. Так как $\partial P \subset P[0]$ (свойство (4) из § 5) и $\partial\Pi \subset P[1]$, то $\partial\Pi = \varnothing$.

Так как семейство $\mathscr{S}{\restriction}_\Pi$ локально конечно, то в силу [1; лемма 5.2] и леммы 2.1 существует триангуляция T' многообразия Π, вписанная в K, относительно которой все элементы этого семейства являются полиэдрами. Поскольку $m \geqslant 2\kappa + 3$ и $k = \kappa + p - m$, то $p \geqslant 2k + 3$ и $\dim\Pi = p - 1 \geqslant 2k + 1$. Так как $\mathscr{S}{\restriction}_\Pi$ есть семейство подмногообразий относительно триангуляции T' и для любого $\varnothing \neq R \in \mathscr{S}{\restriction}_\Pi$ имеем $\dim R = \dim\Pi + s - k$, где $0 \leqslant s \leqslant k$, то можно рассмотреть отображение $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{\Pi,k}\colon \Pi \to [0,1]$ геометрического джойна на Π

относительно барицентрического подразделения $T \rightleftharpoons \beta T' \prec K \prec \mathscr{L}$ и отображение $\mathfrak{D}_R = \mathfrak{D}_{R,s}\colon R \to [0,1]$ геометрического джойна на R относительно T, введенные в § 5. В силу $\partial\Pi = \varnothing$ и теоремы 5.3 имеем

(h) $\mathfrak{D}\restriction_R = \mathfrak{D}_{R,s}$.

Пусть $\mathfrak{R}\colon P(0,\infty) \to \Pi$ есть ретракция на середину Π геометрического джойна, порожденная $\mathfrak{J}$. Как правило, прообразы $\mathfrak{R}^{-1}(T)$ подполиэдров $T \subset \Pi$ не являются $\mathfrak{L}$-конструктивными подполиэдрами. Чтобы обойти это обстоятельство, применим теорему 5.4. Для любого счетного семейства подполиэдров P существует гомеоморфизм $h\colon P \to P$, сохраняющий $\mathscr{L}$ и переводящий это семейство в семейство $\mathfrak{L}$-конструктивных подмногообразий и подполиэдров, при этом $h(P[\infty])$ лежит вне ядра Небелинга $\nu^k_{\mathfrak{L}}P$. Так как мы используем лишь топологические свойства джойнов (а не их линейную структуру), то ради упрощения обозначений элементы преобразованного и исходного семейств отождествляются. С учетом этого замечания, а также имея в виду, что семейство встречающихся далее полиэдров счетно, мы будем предполагать, что все эти полиэдры исходно являлись $\mathfrak{L}$-конструктивными.

Обозначим середину $R_j \cap \Pi$ геометрического джойна $\mathfrak{J}_{R_j}$ через Π_j, а

$$\mathfrak{D}^{-1}_{\Pi_j}[s,t] = \Pi_j \cap \mathfrak{D}^{-1}[s,t]$$

обозначим через $\Pi_j[s,t]$. Так как $\Pi_j[0] \sqcup \Pi_j[\infty] \subset_{Z_k} \Pi_j$ и $\Pi_j(0,\infty) \cong \Pi_j[1] \times (0,\infty)$, то имеем

(1) $\Pi_j[0,1] \hookrightarrow \Pi_j$, $\Pi_j[1,\infty] \hookrightarrow \Pi_j$ и $\Pi_j[i] \hookrightarrow \Pi_j[i,\infty]$ являются k-эквивалентностями.

Пусть $\Phi = \mathfrak{R} \times (\varphi \circ \mathfrak{J})\colon P(0,\infty) \to \Pi \times (0,\infty)$ есть гомеоморфизм из § 5. Так как $\mathfrak{R}$ сохраняет триангуляцию K, а R_j есть полиэдр относительно K, то $W_{i,j} \rightleftharpoons \mathfrak{R}^{-1}(\Pi_j[i,\infty])$ лежит в R_j и гомеоморфен $\Pi_j[i,\infty] \times (0,\infty)$. Ясно, что

$$A_i \rightleftharpoons W_{i,i} \cap P[i,2i]$$

естественно гомеоморфен $\Pi_i[i,\infty] \times [i,2i]$, а

$$B_j \rightleftharpoons P[2i,2i+1] \setminus \bigsqcup \{\operatorname{Int} W_{i,j} \mid j > i\}$$

естественно гомеоморфен $\bigl(\Pi \setminus \bigsqcup\{\operatorname{Int}_\Pi \Pi_j[i,\infty] \mid j > i\}\bigr) \times [2i,2i+1]$.

Теперь мы в состоянии определить требуемые в предложении 8.1, (a), (b) многообразия N_i и G:

$$N_i \rightleftharpoons R_i[0,1] \cup A_i \cup B_i, \quad i \geqslant 1, \qquad G \rightleftharpoons R_1[0,1] \cup A_1 \cup P[2,\infty].$$

Из $B_i \cap A_j = \varnothing$ для $i < j$ легко следует, что $\{N_i\}$ есть дискретное семейство в $P \setminus P[\infty]$, и, следовательно, в силу $P[\infty] \cap \nu^k_{\mathfrak{L}}P = \varnothing$ семейство $\{N_i \cap X\}$ является дискретным в $X = \nu^k_{\mathfrak{L}}P$. Поскольку все полиэдры в определении N_i и G являются $\mathfrak{L}$-конструктивными подмногообразиями и подполиэдрами, то, как легко видеть, N_i и G являются $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивными подмногообразиями. Легко видеть, что $H_1 \subset G$ и $H_2 \cap G = \varnothing$, а также $H_i \subset N_i$ для любого $i \geqslant 1$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что для любого $A' \subset A$:

(2) $N_i \cap Q_{A'} \hookrightarrow Q_{A'}$ является $\dim Q_{A'}$-эквивалентностью;

(3) $\operatorname{Bd} N_i \cap Q_{A'} \hookrightarrow (P \setminus \operatorname{Int} N_i) \cap Q_{A'}$ является $(\dim Q_{A'} - 1)$-эквивалентностью;
(4) $G \cap Q_{A'} \hookrightarrow Q_{A'}$ и $(P \setminus \operatorname{Int} G) \cap Q_{A'} \hookrightarrow Q_{A'}$ являются $\dim Q_{A'}$-эквивалентностями;
(5) $\operatorname{Bd} G \cap Q_{A'} \hookrightarrow G \cap Q_{A'}$ и $\operatorname{Bd} G \cap Q_{A'} \hookrightarrow (P \setminus \operatorname{Int} G) \cap Q_{A'}$ являются $(\dim Q_{A'} - 1)$-эквивалентностями.

Поскольку все принципиальные сложности этой проверки реализуются уже при установлении k-эквивалентности вложений $\upsilon\colon N_1 \hookrightarrow P$ и $\eta\colon P \setminus \operatorname{Int} G \hookrightarrow P$, мы займемся именно этим, оставив проверку остального читателю.

$\upsilon\colon N_1 \hookrightarrow P$ есть k-эквивалентность. В силу (g) для установления k-эквивалентности υ достаточно показать, что естественное вложение $\widetilde{\upsilon}\colon N_1 \setminus P[0] \hookrightarrow P \setminus (P[0] \sqcup P[\infty])$ является k-эквивалентностью. В свою очередь, разобьем эту задачу на ряд простых. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму, порожденную естественными вложениями:

$$\begin{tikzcd}
& \Pi \times (0,3) & \Pi_1 \times (0,2] \cup \Pi \times [2,3] \arrow[l, hook', "\zeta"'] \\
\begin{matrix}\Pi \times (0,\infty) \\ \cong P \setminus (P[0] \sqcup P[\infty])\end{matrix} & P[0,3] \setminus P[0] \arrow[u, "\cong"] \arrow[l, hook', "\xi"'] & \Pi_1 \times (0,2] \cup P[2,3] \arrow[u, "\cong"] \arrow[l, hook', "\beta"'] \\
& N_1 \setminus P[0] \arrow[ul, "\widetilde{\upsilon}"] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, hook, "\delta"] & \Pi_1 \times (0,1] \cup (\Pi_1[1,\infty] \times [1,2]) \cup P[2,3] \arrow[u, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

Так как очевидно, что ξ и ζ, а также β являются гомотопическими эквивалентностями, то требуемая проверка сводится к установлению k-эквивалентности вложений γ и δ.

Следующий факт, по-видимому, является известным.

Лемма 8.3. *Если вложение $N \hookrightarrow M$ полиэдров является k-эквивалентностью, то вложения*

$$N \times [-1,1] \cup M \times \{-1,1\} \hookrightarrow M \times [-1,1] \quad \text{и} \quad N \times [-1,1) \cup M \times \{-1\} \hookrightarrow M \times [-1,1)$$

также являются k-эквивалентностями.

Из леммы 8.3 и свойства (1) легко следует, что вложение

$$\gamma_1\colon \Pi_1[1,\infty] \times [1,2] \cup \Pi_1 \times \{1,2\} \hookrightarrow \Pi_1 \times [1,2]$$

является k-эквивалентностью. Отсюда легко следует k-эквивалентность вложения γ. Проверка k-эквивалентности δ легко сводится к проверке k-эквивалентности вложения $\delta_1\colon \bigl(\Pi \setminus \bigsqcup \{\operatorname{Int} \Pi_j[1,\infty] \mid j > 1\}\bigr) \times [2,3] \hookrightarrow \Pi \times [2,3]$, которая очевидна в силу (1) и приведенного ниже достаточного условия эквивалентности (см. [1; теорема 2.11]).

Лемма 8.4. *Если X есть объединение $X_0 \cup X_1$ замкнутых подмножеств $X_i \subset X$, $X_i \in \mathrm{ANE}(r+1)$, $X_0 \cap X_1 \in \mathrm{ANE}(r)$ и вложение $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow X_1$ является r-эквивалентностью, то вложение $i\colon X_0 \hookrightarrow X$ также есть r-эквивалентность.*

$\eta\colon P\setminus\operatorname{Int}G\hookrightarrow P$ *есть k-эквивалентность.* Чтобы установить k-эквивалентность η, достаточно в силу (g) показать, что

$$\theta\colon P\setminus(P[0]\cup\operatorname{Int}G)\hookrightarrow P\setminus(P[0]\sqcup P[\infty])$$

является k-эквивалентностью. В свою очередь, разобьем эту задачу на ряд простых. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму, порожденную естественными вложениями:

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{l}\Pi\times(0,\infty)\\ \quad\cong P\setminus(P[0]\cup P[\infty])\end{array} & P[0,2]\setminus P[0] \arrow[l, hook', "\pi"'] & \\
& P\setminus(P[0]\cup\operatorname{Int}G) \arrow[ul, "\theta"] \arrow[u] \arrow[r, hook, "i"] & (\Pi\setminus\operatorname{Int}\Pi_1[1,\infty])\times(0,2]\cup P[2] \arrow[ul, "j"']
\end{tikzcd}$$

Из свойства (g) легко следует, что π является гомотопической эквивалентностью. Поэтому требуемая проверка сводится к установлению k-эквивалентности вложений i и j.

Проверка k-эквивалентности i с помощью (1) и леммы 8.4 легко сводится к установлению k-эквивалентности вложения

$$(\Pi\setminus\operatorname{Int}\Pi_1)\times(0,1]\cup\Pi_1[0,1]\times\{1\}\hookrightarrow(\Pi\setminus\operatorname{Int}\Pi_1[1,\infty])\times(0,1].$$

Последнее вновь с помощью леммы 8.4 легко сводится к установлению k-эквивалентности вложения

$$\Pi_i[0]\times(0,1]\cup\Pi_1[0,1]\times\{1\}\hookrightarrow\Pi_1[0,1]\times(0,1],$$

что является следствием (1) и леммы 8.3.

Вложение j совпадает с естественным вложением

$$(\Pi\setminus\operatorname{Int}\Pi_1[1,\infty])\times(0,2]\cup\Pi\times\{2\}\hookrightarrow\Pi\times(0,2],$$

чья k-эквивалентность следует из леммы 8.3, примененной к k-эквивалентности $l\colon\Pi\setminus\operatorname{Int}\Pi_1[1,\infty]\hookrightarrow\Pi$. В свою очередь, k-эквивалентность вложения l следует из (1) и леммы 8.4.

§ 9. Проверка глобальной аксиомы

Пусть $0\leqslant l<k$, $\bigl(\mathscr{Q}',\ T'\colon\mathscr{Q}'\to\widehat{\mathscr{Q}},\ \beta'\colon P\to\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\bigr)$ есть тройка, в которой $\mathscr{Q}'=\{Q'_\alpha\}_{\alpha\in A}$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное l-разбиение P, T' есть трансформация разбиений, а β' есть аккомпанемент T', являющийся k-эквивалентностью относительно $\theta\in\operatorname{cov}\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, $\mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}}\prec\theta$. Фиксируем также $\omega\in\operatorname{cov}\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ и совершенное отображение $f\colon X=\nu^k_{\mathfrak{L}}\to Y$, для которых $\mathscr{H}_f\subset X$ есть счетное объединение ручных Z-множеств, а $\beta'(f^{-1}(y))\prec\omega$ для всех $y\in Y$.

Глобальная аксиома (кусочно линейный вариант). *Для любых $Q'_0\in\mathscr{Q}'$, $a\in\pi_l(Q'_0)$ и ручного Z-множества $X_0\subset X$ существуют допустимое относительно $\mathscr{Q}'$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие C, $X_0\subset\operatorname{Int}C$, и тройка $\bigl(\mathscr{Q},\ T\colon\mathscr{Q}\to\widehat{\mathscr{Q}},\ \beta\colon P\to\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle\bigr)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное разбиение P, T есть соответствие разбиений, а β есть аккомпанемент T, такая, что*:

(a) *существуют* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$*-конструктивное* l*-разбиение* $\mathscr{Q}^\bullet = \{Q^\bullet_\alpha \mid \alpha \in A\} \subset \mathscr{Q}$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$*-конструктивного подмногообразия* $E \subset P$, $C \subset E$, *и трансформация* $T^\bullet\colon \mathscr{Q}^\bullet \to \widehat{\mathscr{Q}}$, $T^\bullet(Q^\bullet_\alpha) = \widehat{Q}_\alpha$, C*-эквивалентная* T', *которая допускает конечное* l*-продолжение в соответствие* T;

(b) $\beta = \beta'$ *на* C *и* $\operatorname{dist}(\beta, \beta') \prec \theta$;

(c) $\beta(P \setminus C) \subset \mathrm{N}(\langle \widehat{q}_0 \rangle; \theta^3)$, *где* $\widehat{q}_0 \rightleftharpoons T'(Q'_0)$;

(d) $Q'_0 \cap C \subset Q^\bullet_0$, *причем вложение* $Q'_0 \cap C \hookrightarrow Q^\bullet_0$ *является* l*-эквивалентностью*;

(e) *существует элемент* $b \in \pi_l(Q'_0 \cap C)$, *который свободно гомотопен элементу* a *в* Q'_0 *и при вложении* $Q'_0 \cap C \hookrightarrow Q^\bullet_0$ *переходит в нулевой элемент*;

(f) $\beta(f^{-1}(y)) \prec \omega$ *для всех* $y \in Y$.

Предварим доказательство этой аксиомы рядом вспомогательных утверждений.

Лемма 9.1. *Пусть* $R \subset P$ – $\nu^k_{\mathfrak{L}}$*-конструктивное подмногообразие*, (W, A) – *компактная* s*-мерная пара* PL*-многообразий*, $s \leqslant k$. *Тогда в пространстве отображений из* (W, A) *в* (P, R) *всюду плотно множество* $\{\tau\colon (W, A) \to (P, R)\}$ *кусочно линейных вложений пар, для которых*:

(1) $\operatorname{Im}\tau$ *есть* $\mathfrak{L}$*-конструктивное подмногообразие, находящееся в общем положении с элементами* $\mathscr{Q}'$, *т.е. каждое непустое пересечение* $\operatorname{Im}\tau \cap Q'_{A'}$ *есть* $(\dim W + 1 - |A'|)$*-мерное* $\mathfrak{L}$*-конструктивное подмногообразие*;

(2) $\mathrm{N}(\operatorname{Im}\tau; \delta) \cap \mathrm{Cl}_P(X_0) = \varnothing$ *для некоторого* $\delta > 0$.

Указание. Так как $\dim P = \dim R \geqslant 2s + 1$, то применима теорема об общем положении [6] для вложений по отношению к элементам $\mathscr{Q}'$. Далее использовать теорему 4.1 об изотопическом движении и соотношение $\mathrm{Cl}_P(X_0) \subset_{Z_k} P$ (предложение 2.5).

При проверке аксиомы используется следующий достаточно общий способ построения конечных l-продолжений. Доказательство этого способа осуществляется в духе [5; 2.6].

Теорема 9.2. *Пусть компактное* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$*-конструктивное подмногообразие* $\mathfrak{F} \subset P \setminus \partial P$ *содержит такой подполиэдр* $\mathfrak{F}_0 \subset \operatorname{Int}_P \mathfrak{F}$, *что* $\dim \mathfrak{F} - \dim \mathfrak{F}_0 \geqslant l+1$, *а* $\mathfrak{F} \setminus \operatorname{Int} R$ *вминается в* $\partial\mathfrak{F}$, *где* $R \subset \operatorname{Int}\mathfrak{F}$ *есть регулярная окрестность* $\mathfrak{F}_0$. *Тогда для любой тройки*

$$\bigl(\mathscr{Q}_E,\ T_E\colon \mathscr{Q}_E \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta_E\colon E \to \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle\bigr),$$

в которой $\mathscr{Q}_E$ *есть* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$*-конструктивное разбиение* $E \rightleftharpoons P \setminus \operatorname{Int}\mathfrak{F}$, T_E – *соответствие разбиений, а* β_E – *аккомпанемент* T_E, *продолжающийся до отображения* $\beta_P\colon P \to \mathscr{N}\langle \widehat{\mathscr{Q}} \rangle$, *существует тройка* $\bigl(\mathscr{Q}_P,\ T_P\colon \mathscr{Q}_P \to \widehat{\mathscr{Q}},\ \beta_P\bigr)$, *в которой* $\mathscr{Q}_P$ *есть* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$*-конструктивное разбиение* P, T_P – *соответствие разбиений, являющееся конечным* l*-продолжением* T_E, β_P – *аккомпанемент* T_P.

Доказательство глобальной аксиомы. Элемент $a \in \pi_l(Q'_0)$ зададим вложением $\varphi'\colon S^l \hookrightarrow \operatorname{Int}\mathscr{Q}'_0$. Так как $\beta'(Q'_0) \subset \mathring{\mathrm{St}}\langle \widehat{q}_0 \rangle \in \mathrm{AE}$, то $\beta' \circ \varphi'$ имеет продолжение $\psi'\colon D^{l+1} \to \mathring{\mathrm{St}}\langle \widehat{q}_0 \rangle$. Поскольку β' есть k-эквивалентность, то φ' имеет такое продолжение $\widehat{\varphi}_1\colon D^{l+1} \to X$, что

(3) $\beta' \circ \widehat{\varphi}_1 \simeq^H \psi'$, где гомотопия $H\colon D^{l+1} \times I \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ такова, что $H[\operatorname{rel} S^l]$ и $H[\operatorname{rel}\theta]$.

Следовательно, $\beta'(\operatorname{Im}\widehat{\varphi}_1) \subset \mathrm{N}(\overset{\circ}{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}_0\rangle;\theta)$. В силу леммы 9.1 с самого начала можем считать, что $\widehat{\varphi}_1$ есть кусочно линейное вложение $\widehat{\varphi}_1\colon D^{l+1} \hookrightarrow P\setminus\partial P$, $\widehat{\varphi}_1(S^l) \subset Q'_0$, удовлетворяющее условиям (1), (2) леммы 9.1 (естественно, с заменой τ на $\widehat{\varphi}_1$). Отсюда и из условия (3) следует существование такой малой регулярной окрестности $\mathscr{W}_1$ PL-диска $\operatorname{Im}\widehat{\varphi}_1$, что

(4) $\beta'(\mathscr{W}_1) \subset \mathrm{N}(\overset{\circ}{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}_0\rangle;\theta)$, а также $\mathrm{N}(\mathscr{W}_1;\delta) \cap \mathrm{Cl}_P X_0 = \varnothing$ для некоторого $\delta > 0$.

Если $\operatorname{Im}\widehat{\varphi}_1 \cap Q_{A'} \neq \varnothing$ для $A' \subset A$, то из условия (1) леммы 9.1 следует, что $\mathscr{W}_1 \cap Q_{A'}$ есть регулярная окрестность $(l+2-|A'|)$-мерного полиэдра $\operatorname{Im}\widehat{\varphi}_1 \cap Q_{A'}$. Отсюда и из соображений общего характера следует справедливость приведенного ниже условия $(\alpha)_n$ при $n=1$. Важно, что диск $\operatorname{Im}\widehat{\varphi}_1$ можно чуть расширить так, что $\operatorname{Bd}\mathscr{W}_1 \cap \operatorname{Im}\widehat{\varphi}_1$ совпадет с $\widehat{\varphi}_1(A) = \varphi'(A) \subset \operatorname{Int} Q'_0$ (см. [5; 2.7.4]).

Так как $\mathscr{H}_f \subset_{\sigma Z_k} X = \nu^k_{\mathfrak{L}} P$ и $P\setminus X \subset_{\sigma Z_k} P$, то

(5) $(P\setminus X)\cup\mathscr{H}_f$ содержится в σZ_k-множестве $\bigcup\{X_i \mid i \geqslant 1\}$, где $X_i \subset_{Z_k} P$.

В силу леммы 9.1 существуют кусочно линейное вложение $\widehat{\varphi}_2\colon D^{l+1} \hookrightarrow \mathscr{W}_1$ и регулярная окрестность $\mathscr{W}_2$ диска $\operatorname{Im}\widehat{\varphi}_2$ в $\mathscr{W}_1$ такие, что при $n=2$ выполнены следующие условия:

$(\alpha)_n$ $C_n \coloneqq P\setminus\operatorname{Int}\mathscr{W}_n$ является k-допустимым относительно $\mathscr{Q}'$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивным подмногообразием;

$(\beta)_n$ $\widehat{\varphi}_n(S^l) = \operatorname{Im}\widehat{\varphi}_n \cap \operatorname{Bd}_P\mathscr{W}_n = \operatorname{Im}\widehat{\varphi}_n \cap \operatorname{Bd}_P\mathscr{W}_{n-1} = \dots = \operatorname{Im}\widehat{\varphi}_n \cap \operatorname{Bd}\mathscr{W}_1$;

$(\gamma)_n$ $\mathscr{W}_n \cap \operatorname{Bd}_P\mathscr{W}_{n-1} = \mathscr{W}_n \cap \operatorname{Bd}_P\mathscr{W}_{n-2} = \dots = \mathscr{W}_n \cap \operatorname{Bd}\mathscr{W}_1 \subset \operatorname{Int}Q'_0$;

$(\delta)_n$ $\mathscr{W}_n \cap X_{n-1} = \varnothing$ и $\operatorname{dist}(\widehat{\varphi}_n,\widehat{\varphi}_{n-1}) < c_n < 2^{-n}$.

Ясно, как продолжить это построение и предъявить для любого $n>2$ кусочно линейное вложение $\widehat{\varphi}_n\colon D^{l+1} \hookrightarrow \mathscr{W}_{n-1}$ и регулярную окрестность $\mathscr{W}_n$ диска $\operatorname{Im}\widehat{\varphi}_n$ в $\mathscr{W}_{n-1}$ такие, что будут выполнены условия $(\alpha)_n$–$(\delta)_n$. Из $(\beta)_n$, $(\gamma)_n$ легко следует, что $\widehat{\varphi}_n(S^l) \subset \operatorname{Int}Q'_0$.

Из $(\delta)_n$, $n \geqslant 1$, и из полноты X следует существование предела $\widehat{\varphi} = \lim\widehat{\varphi}_n$. Принимая во внимание условие (5), а также то, что константы $c_n > 0$ можно выбирать произвольно малыми, мы можем дополнительно добиться того, чтобы

(ε) $\widehat{\varphi}$ было вложением диска D^{l+1} в $X\setminus\mathscr{H}_f$.

Пусть $D \coloneqq \operatorname{Im}\widehat{\varphi}$ есть топологический $(l+1)$-диск, лежащий в X, а $S \coloneqq \widehat{\varphi}(S^l)$ есть топологическая l-сфера. Заметим, что если $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\varphi}_1$ достаточно близки друг к другу, то для отображения $\eta \coloneqq \beta'\restriction_D\colon D \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle \in \mathrm{ANE}$, как и в условии (3), справедливо

(6) $\eta \overset{\Phi}{\simeq} \chi$, где $\chi\colon D \to \overset{\circ}{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}_0\rangle$ есть такое отображение, что $\chi\restriction_S = \eta\restriction_S$, а гомотопия $\Phi\colon D\times I \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ такова, что $\Phi[\operatorname{rel} S]$ и $\Phi[\operatorname{rel}\theta]$.

Покажем, что существуют требуемое аксиомой отображение $\beta\colon P \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, а также ручка $R \coloneqq \mathscr{W}_{n_0}$, для которой:

(i) $\beta(R) \subset \overset{\circ}{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}_0\rangle$;

(ii) $\beta\restriction_{\mathscr{W}_1} \overset{K}{\simeq} K\beta'\restriction_{\mathscr{W}_1}$, где для гомотопии K справедливо $K[\operatorname{rel}\operatorname{Bd}\mathscr{W}_1]$ и $K[\operatorname{rel}\theta]$ (и, следовательно, в силу условия (4) и $\mathscr{N}_{\widehat{\mathscr{Q}}} \prec \theta$ справедливо $\operatorname{Im}K \subset \mathrm{N}(\overset{\circ}{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}_0\rangle;\theta^2) \subset \mathrm{N}(\langle\widehat{q}_0\rangle;\theta^3))$.

Для этого воспользуемся теоремой 1.1 о равностепенном продолжении гомотопии. Пусть $Y \rightleftharpoons \mathrm{N}(\mathring{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}_0\rangle;\theta) \in \mathrm{ANE}$, $W \rightleftharpoons \mathscr{W}_1$ и $T \rightleftharpoons \mathrm{Bd}\,\mathscr{W}_1 \subset W$. Из условия (ε) легко следует, что

(ζ) семейство $\{B_\gamma\} \rightleftharpoons \{f^{-1}(y) \cap W \mid y \in Y\} \subset W \setminus D$ примыкает к $D = \mathrm{Im}\,\widehat{\varphi} \subset W$.

В силу условий (4) и (6) $\beta'(D)$ и $\Phi(D \times I)$ содержатся в Y, причем β' и Φ_s согласуются на $D \cap T$. Тем самым возникают отображение $h \rightleftharpoons \beta'{\restriction_W}\colon W \to Y$ и θ-гомотопия $F\colon (T \cup D) \times I \to Y$, определенная формулами $F(z,s) = \beta'(z)$ для $(z,s) \in T \times I$ и $F{\restriction_{D\times I}} = \Phi$. Ясно, что $\theta, \omega \in \mathrm{cov}\,\mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$, а также построенные пространства D, T, W и Y, семейство $\{B_\gamma\}$, отображения h и F подчиняются условиям теоремы 1.1. Следовательно, существует такая θ-гомотопия $K\colon W \times I \to Y$, являющаяся продолжением F, что $K_0 = h$, а также выполнены условия (d), (e) теоремы 1.1. Так как $F_1(D) = \Phi_1(D) = \chi(D) \subset \mathring{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}_0\rangle$, то $K_1(\mathscr{W}_{n_0}) \subset \mathring{\mathrm{St}}\langle\widehat{q}_0\rangle$ для некоторого n_0. В качестве искомой ручки R возьмем $\mathscr{W}_{n_0}$, а в качестве искомого отображения β – отображение, совпадающее с K_1 на W и с β' на $P \setminus W$. Ясно, что свойства (i), (ii), а также (b) и (f) будут выполнены.

В качестве искомых $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивных подмногообразий возьмем

$$C \rightleftharpoons P \setminus \mathrm{Int}\,\mathscr{W}_1 \quad \text{и} \quad E \rightleftharpoons (P \setminus \mathrm{Int}\,\mathscr{W}_1) \cup R.$$

Ясно, что C допустимо относительно $\mathscr{Q}'$ и $X_0 \subset \mathrm{Int}\,C$. В силу (ii) имеем

$$\beta(P \setminus C) \subset K_1(\mathscr{W}_1) \subset \mathrm{N}(\langle\widehat{q}_0\rangle;\theta^3)$$

– условие (c) установлено.

Искомое разбиение $\mathscr{Q}^\bullet$ состоит из элементов

$$Q^\bullet_0 = (Q'_0 \setminus \mathrm{Int}\,\mathscr{W}_1) \cup R \quad \text{и} \quad Q^\bullet_\alpha = Q_\alpha \setminus \mathrm{Int}\,\mathscr{W}_1$$

для всех $Q_\alpha \neq Q'_0$; искомая трансформация $T^\bullet\colon \mathscr{Q}^\bullet \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle$ определяется формулой $T^\bullet(Q^\bullet_\alpha) = T'(Q_\alpha)$. Ясно, что $\beta{\restriction_E}$ является аккомпанементом $T^\bullet$.

Так как $R = \mathscr{W}_{n_0}$ есть регулярная окрестность диска $\mathrm{Im}\,\widehat{\varphi}_{n_0}$ в $\mathscr{W}_{n_0-1}$, то R есть регулярная окрестность $\mathrm{Im}\,\widehat{\varphi}_{n_0}$ в $\mathscr{W}_1$. Отсюда и из $(\beta)_{n_0}$, $(\gamma)_{n_0}$ следует, что R есть ручка индекса $l+1$, приклеенная к $\mathrm{Bd}\,\mathscr{W}_1$ вдоль a-трубки $R \cap \mathrm{Bd}\,\mathscr{W}_1$, у которой срединный диск есть $\mathrm{Im}\,\widehat{\varphi}_{n_0}$ (см. [6], [5; 2.7.4]). Так как $R \cap \mathrm{Bd}\,\mathscr{W}_1 \cong S^l \times D^{p-1-l}$, а $R \cong D^{l+l} \times D^{p-1-l} = D^p$, то

(7) вложение $R \cap \mathrm{Bd}\,\mathscr{W}_1 \hookrightarrow R$ является l-эквивалентностью.

Компакт

$$\mathfrak{F} \rightleftharpoons \mathscr{W}_1 \setminus \mathrm{Int}_{\mathscr{W}_1} R = P \setminus \mathrm{Int}\,E,$$

называемый *окраиной ручки* R, кусочно линейно гомеоморфен $D^{l+2} \times S^{p-l-2}$, а $(\mathfrak{F}, \mathrm{Bd}_P\,\mathfrak{F}) \cong (D^{l+2}, \mathrm{Bd}\,D^{l+2}) \times S^{p-l-2}$ [5; 2.6]. Пусть $\mathfrak{F}_0 \subset \mathfrak{F}$ таково, что $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_0) \cong (D^{l+2}, \{0\}) \times S^{p-l-2}$. Так как $\dim\mathfrak{F} - \dim\mathfrak{F}_0 \geqslant l+1$, то для пары $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}_0)$ выполнены условия теоремы 9.2, и поэтому тройка $(\mathscr{Q}^\bullet, T^\bullet, \beta{\restriction_E})$ может быть переведена в тройку $(\mathscr{Q}, T\colon \mathscr{Q} \to \widehat{\mathscr{Q}}, \beta\colon P \to \mathscr{N}\langle\widehat{\mathscr{Q}}\rangle)$, в которой $\mathscr{Q}$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное разбиение P, соответствие T есть конечное l-продолжение $T^\bullet$, а β есть аккомпанемент T.

Проверим требуемые свойства для введенных разбиений и соответствий. Разбиение $\mathscr{Q}^\bullet$ является l-разбиением в силу k-допустимости $P \setminus \mathrm{Int}\,\mathscr{W}_1$ относительно $\mathscr{Q}'$ и свойства (7). Отсюда и из леммы 8.4 следует, что вложение

$Q'_0 \cap C \hookrightarrow Q^\bullet_0$ будет l-эквивалентностью. Из k-допустимости $P \setminus \operatorname{Int} \mathscr{W}_1$ относительно $\mathscr{Q}'$ следует, что вложение $Q'_0 \cap C \hookrightarrow Q'_0$ индуцирует изоморфизм π_i, $i < k$. Так как $(Q'_0 \cap C) \cap R = \operatorname{Bd} \mathscr{W}_1 \cap R$, $Q^\bullet_0 = (Q'_0 \cap C) \cup R$, то из леммы 8.4 следует, что $Q'_0 \cap C \hookrightarrow Q^\bullet_0$ является l-эквивалентностью, что доказывает (d).

Для доказательства свойства (e) глобальной аксиомы заметим, что $\varphi', \widehat{\varphi}\restriction\colon S^l \hookrightarrow Q'_0$ свободно гомотопны в Q'_0, т.е. являются представителями $a \in \pi_l(Q'_0)$. В качестве представителя элемента $b \in \pi_l(Q'_0 \cap C)$ возьмем естественное вложение $\widehat{\varphi}\restriction\colon S^l \hookrightarrow Q'_0 \cap C = Q'_0 \setminus \operatorname{Int} \mathscr{W}_1$. То, что b при вложении $Q'_0 \cap C \hookrightarrow Q^\bullet_0$ переходит в нулевой элемент, легко следует из $R \cong D^p \in \mathrm{C}^l$ и коммутативности следующей диаграммы вложений:

$$\begin{tikzcd}
S^l \arrow[r, hook, "\varphi"] & R \cap \operatorname{Bd} \mathscr{W}_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & R \arrow[d] \\
& Q'_0 \cap C = Q'_0 \setminus \operatorname{Int} \mathscr{W}_1 \arrow[r, hook] & Q^\bullet_0
\end{tikzcd}$$

§ 10. Проверка локальной аксиомы

Пусть $\mathscr{Q}'$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное разбиение P, а тело подсемейства $\mathscr{Q}'_r = \{Q'_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r+1\} \subset \mathscr{Q}'$, $1 \leqslant r \leqslant k$, есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие $G \subset P$, причем $E' \rightleftharpoons \bigcap\{Q'_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r+1\} \neq \varnothing$. Пусть задано ручное Z-множество $X_0 \subset X = \nu^k_{\mathfrak{L}}(P)$. Читателю предоставляется возможность вывести локальную аксиому из теоремы 3.8, предложения 2.6 и приведенного ниже утверждения.

Локальная аксиома (кусочно линейный вариант). *Для любых отображений $\varphi\colon S^{l-1} \to E'$, $l + r \leqslant k$, $l < k$, и $\tau\colon D^l \to F' \rightleftharpoons Q'_1 \cap \dots \cap Q'_r$, $\tau\restriction_{S^{l-1}} = \varphi$, существует k-допустимое относительно $\mathscr{Q}'$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие $C \subset P$, удовлетворяющее условиям*

$$\operatorname{Cl}_P(X_0) \subset \operatorname{Int}_P C \quad \text{и} \quad R \rightleftharpoons P \setminus \operatorname{Int} \mathrm{C} \subset \operatorname{Int}_M(G),$$

а также:

(i) *$\mathscr{Q}_r \rightleftharpoons \{Q_i = Q'_i \setminus \operatorname{Int} R \mid i \leqslant r\} \cup \{Q_{r+1} = Q'_{r+1} \cup R\}$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное разбиение G*;

(ii) *естественные вложения $Q_{A'} \hookrightarrow Q'_{A'}$, где $\{r+1\} \in A' \subset \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant r+1\}$, и $Q'_i \hookrightarrow Q_i$, где $1 \leqslant i \leqslant r$, являются l-эквивалентностями*[2]; *в частности, вложение $E' \cap C \hookrightarrow E \rightleftharpoons \bigcap\{Q_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r+1\}$ является l-эквивалентностью*;

(iii) *существует такое отображение $\zeta\colon S^{l-1} \to E' \cap C$, что ζ гомотопно φ в E' и $\zeta \simeq 0$ в E.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 9.1 и с самого начала будем считать, что τ и φ являются кусочно линейными вложениями, удовлетворяющими условиям (1), (2) леммы 9.1, и

(α) $\operatorname{Im} \tau \cap E' = \operatorname{Im} \varphi$, а также $\mathrm{N}(\operatorname{Im} \tau; \delta) \subset \operatorname{Int}(G)$.

[2] В силу предложения 2.5 эти вложения при сужении на X переходят в $(l-1)$-эквивалентности.

Выберем малую регулярную окрестность R, $R \subset \mathrm{N}(\operatorname{Im}\tau;\delta)$, диска $\operatorname{Im}\tau$ в P так, чтобы $R \cap Q'_{A'}$ было регулярной окрестностью $\operatorname{Im}\tau \cap Q'_{A'}$ для всех $A' \subset \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant r+1\}$. Тогда $C \rightleftharpoons P \setminus \operatorname{Int} R$. Свойства (i)–(iii) следуют из того, что:

(β) R является ручкой индекса l, приклеенной к $Q'_{r+1} \setminus \operatorname{Int} R$ вдоль a-трубки $\operatorname{Bd} R \cap Q'_{r+1} \cong S^{l-1} \times D^{p-l}$ и имеющей косрединный диск D^{p-l} и b-сферу S^{p-l-1};

(γ) $R \cap Q'_{A'}$, где $A' \subset \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}$, является ручкой индекса l, приклеенной к $Q'_{A'} \cap Q'_{r+1}$ вдоль a-трубки $R \cap Q'_{A'} \cap Q'_{r+1} \cong S^{l-1} \times D^{p-|A'|-l+1}$ и имеющей косрединный диск $D^{p-|A'|-l+1}$ и b-сферу $S^{p-|A'|-2}$.

§ 11. Проверка аксиом $\mathscr{Z}$-множеств

С учетом [1; предложение 12.2] нам остается проверить:

(a) если $F \subset X$ есть трансверсальное Z-множество, то для любого удобного k-разбиения $\mathscr{P}$ пространства X существует совершенное относительно $\mathscr{P}$ множество N такое, что $F \subset \operatorname{Int} N$ (часть аксиомы $\mathscr{Z}_1$);

(b) если F является ручным Z-множеством в X, а $N \in \mathscr{C}^k_X$, то $F \cap N$ является ручным Z-множеством в N (аксиома $\mathscr{Z}_2$).

С помощью теоремы 3.8 и замечания 7.1 эти утверждения несложно свести к кусочно линейным фактам.

Теорема 11.1. *Пусть $\{Q_\alpha\}$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное k-разбиение P, элементы которого и все непустые пересечения являются клетками соответствующих размерностей. Тогда для любого трансверсального Z-множества $F \subset X$ существует k-совершенное относительно $\mathscr{Q}$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие $N \subset P$ такое, что $\operatorname{Cl}_P F \subset \operatorname{Int}_P N$.*

Теорема 11.2. *Пусть F есть ручное Z-множество в X, $\{Q_\alpha\}$ есть $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное разбиение $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивного подмногообразия $R \subset P$. Тогда $Q_{A'} \cap \operatorname{Cl}_P F \subset_{Z_{k+1-|A'|}} Q_{A'}$ для любого $A' \subset A$.*

Доказательство теоремы 11.1 существенно зависит от продолжения изотопий. Напомним, что *изотопией полиэдра T в полиэдре L* называется такое кусочно линейное вложение $f\colon T \times I \hookrightarrow Q \times I$, что $f_0 = \mathrm{Id}$ и $f(T \times \{t\}) \subset Q \times \{t\}$ для всех $t \in I$. *Изотопия полиэдра L* – это кусочно линейный гомеоморфизм $f\colon L \times I \to L \times I$, для которого $f_0 = \mathrm{Id}$ и $f(T \times \{t\}) \subset Q \times \{t\}$ для всех $t \in I$.

Предложение 11.3. *Пусть $g\colon T \times I \hookrightarrow Q \times I$ есть изотопия компактного полиэдра T, лежащего в компактном многообразии Q^q, такая, что*

$$g^{-1}(\partial Q \times I) = T_0 \times I,$$

где $T_0 \subset T$ есть подполиэдр, возможно пустой. Пусть также задана изотопия $G\colon \partial Q \times I \to \partial Q \times I$ границы ∂Q, продолжающая изотопию $g\restriction_{T_0 \times I}$ (т.е. $G\restriction_{T_0 \times I} = g\restriction_{T_0 \times I}$). Если

(1) $\dim T_0 \leqslant \dim T - 1 \leqslant \dim Q - 4$,

то существует изотопия $\widehat{G}\colon Q \times I \to Q \times I$ многообразия Q, продолжающая G и g, т.е. $\widehat{G}\restriction_{\partial Q \times I} = G$ и $\widehat{G}\restriction_{T \times I} = g$.

Доказательство. Воспользовавшись леммой о продолжении изотопии с границы на многообразие [5; 3.22], построим изотопию $M\colon Q\times I\to Q\times I$, продолжающую G. Поскольку изотопия $f\rightleftharpoons M^{-1}\circ g\colon T\times I\to Q\times I$ полиэдра T постоянна на $T_0\times I$, то к ней применима следующая лемма, являющаяся частным случаем [8; 9.8].

Лемма 11.4. *Если $f\colon T\times I\hookrightarrow Q\times I$ есть такая изотопия компактного полиэдра T в компактном многообразии Q^q, что $f{\restriction}_{T_0\times I}=\mathrm{Id}$ и $f^{-1}(\partial Q\times I)=T_0\times I$, а также справедливы размерностные ограничения* (1), *то существует изотопия $H\colon Q\times I\to Q\times I$, продолжающая f и такая, что $H{\restriction}_{\partial Q\times I}=\mathrm{Id}$.*

Пусть изотопия $H\colon Q\times I\to Q\times I$ такова, что $H{\restriction}_{T\times I}=f$ и $H{\restriction}_{\partial Q\times I}=\mathrm{Id}$. Искомая изотопия $\widehat G$ задается формулой $M\circ H\colon Q\times I\to Q\times I$. Действительно,

$$\widehat G{\restriction}_{\partial Q\times I}=M{\restriction}_{\partial Q\times I}=G\quad\text{и}\quad \widehat G{\restriction}_{T\times I}=(M\circ H){\restriction}_{T\times I}=M\circ f=M\circ M^{-1}\circ g=g.$$

Следующее обобщение предложения 11.3 имеет дело с заменой ∂Q на подмногообразие $Q_0\subset\partial Q$ размерности $q-1$.

Предложение 11.5. *Пусть $Q_0^{q-1}\subset\partial Q^q$ есть* PL-*подмногообразие,*

$$g\colon T\times I\hookrightarrow Q\times I$$

есть изотопия компактного полиэдра T в компактном многообразии Q^q такая, что

$$g^{-1}(\partial Q\times I)=g^{-1}(Q_0\times I)=T_0\times I,$$

а изотопия $G'\colon Q_0\times I\to Q_0\times I$ продолжает изотопию $g{\restriction}_{T_0\times I}$. Если выполнены размерностные ограничения (1), *то существует изотопия $\widehat G\colon Q\times I\to Q\times I$, продолжающая G' и g, т.е. $\widehat G{\restriction}_{Q_0\times I}=G'$ и $\widehat G{\restriction}_{T\times I}=g$.*

Для доказательства предложения 11.5 следует продолжить изотопию G' до изотопии $G\colon\partial Q\times I\to\partial Q\times I$ и далее применить предложение 11.3 для g и G.

Доказательство теоремы 11.1. В силу [1; лемма 5.2] и леммы 2.1 существует такая триангуляция K' многообразия P, что все Q_α являются подполиэдрами относительно K'. Так как $\dim Q_{A'}=p+s-k$, где $0\leqslant s\leqslant k$, то можно рассмотреть введенные в §5 отображение $\mathfrak J=\mathfrak J_{P,k}\colon P\to[0,1]$ геометрического джойна на P относительно $K\rightleftharpoons\beta K'$ и отображение $\mathfrak J_R=\mathfrak J_{R,s}\colon R\to[0,1]$ геометрического джойна на $R=Q_{A'}$ относительно K. В силу леммы 8.2 и теоремы 5.3 имеем $\mathfrak J{\restriction}_R=\mathfrak J_R$. Через $\{Q_{A'}[E]\mid E\subset[0,\infty]\}$ обозначим структуру геометрического джойна $\mathfrak J_{Q_{A'}}$. В силу условий (iv) и (3)–(5) из §5 имеем

(c) для любого $R=Q_{A'}$ $R[1]$ и $R[0,1]$ являются многообразиями, а также $R[0]\sqcup P[\infty]\subset_{Z_s}R[0,1]$, где $s=\dim R-\dim P+k$.

В силу теоремы о регулярных окрестностях [5; 3.24]

(2) существует такая изотопия $H_t\colon P\times I\to P\times I$, постоянная на $P[0]\sqcup P[\infty]$, что H_1 переводит регулярную окрестность $P[1,\infty]$ полиэдра $P[\infty]$ в сколь угодно малую окрестность $P[\infty]$. При этом можно считать, что изотопия H_t сохраняет $\mathscr Q$.

Поскольку K' – триангуляция $Q_{A'}$, то $Q_{A'}[\infty]$ есть компактный $(k+1-|A'|)$-мерный полиэдр относительно K, не пересекающийся с $|(K')^{(p-k-1)}| \subset P[0]$. К сожалению, $Q_{A'}[\infty]$ может пересекаться с $\mathrm{Cl}_P F$. Следующий факт позволяет преодолеть это обстоятельство.

Предложение 11.6. *Существует изотопия* $\Phi_t\colon P\times I \to P\times I$ *такая, что*:

(3) Φ_t *сохраняет разбиение* $\mathscr{Q}$;

(4) $\Phi_1(P[\infty]) = \Phi_1(\mathfrak{T})$ *есть подполиэдр* P, *не пересекающийся с* $\mathrm{Cl}_P F$.

Указание. Полагаем $\Phi_t = \mathrm{Id}$ на $|(K')^{(p-k-1)}|$. Далее доказательство предложения 11.6 осуществляется индукцией по остовам разбиения с использованием предложения 11.5, примененного к $Q \rightleftharpoons Q_{A'}$, $T \rightleftharpoons Q_{A'}[\infty]$ и $T_0 \rightleftharpoons T \cap \mathrm{Bd}\, Q_{A'}$. Необходимые для этого размерностные ограничения выполнены, так как $\dim Q_{A'} - \dim Q_{A'}[\infty] \geqslant 3$ и $\dim Q_{A'} - \dim T_0 \geqslant 4$. Заметим, что из $F \cap \nu^k(Q_{A'}) \subset_Z \nu^k(Q_{A'})$ следует, что $\mathrm{Cl}\, F \cap Q_{A'} \subset_{Z_{k+1-|A'|}} Q_{A'}$ (см. предложение 2.5). Поэтому малой изотопией T можно перевести в дополнение $Q_{A'} \setminus \mathrm{Cl}_P F$, не меняя ее на $\mathrm{Bd}\, Q_{A'}$. Все остальные детали доказательства мы оставляем читателю.

Из условия (4) следует, что $\mathrm{N}(\Phi_1(P[\infty]); \mathscr{L})$ не пересекается с $\mathrm{N}(\mathrm{Cl}_P F; \mathscr{L})$ для некоторой очень малой смешанной триангуляции $\mathscr{L} \prec K$. Из условия (2) следует, что существует изотопия $H_t\colon P \times I \to P \times I$, постоянная на $P[0] \sqcup P[\infty]$ и сохраняющая разбиение $\mathscr{Q}$, для которой $H_1(P[1,\infty])$ лежит в окрестности $(\Phi_1)^{-1}(\mathrm{N}(\Phi_1(P[\infty]); \mathscr{L}))$ полиэдра $P[\infty]$. Тем самым PL-многообразие $(\Phi_1 \circ H_1)(P[1,\infty])$ не пересекается с $\mathrm{Cl}_P F$.

Очевидно, что внутренность PL-многообразия $N' \rightleftharpoons (\Phi_1 \circ H_1)(P[0,1])$ содержит $\mathrm{Cl}_P F$. Вообще говоря, N' не является $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивным подмногообразием. Чтобы обойти это обстоятельство, применим теорему 5.4, в силу которой существует гомеоморфизм $F\colon P \to P$, сохраняющий $\mathscr{L}$ (и, следовательно, сохраняющий $\mathrm{N}(\Phi_1(P[\infty]); \mathscr{L})$) и такой, что $F(N' \cap Q_{A'})$ есть $\nu_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие. Легко проверить, что $N \rightleftharpoons F(N')$ является искомым k-совершенным относительно $\mathscr{Q}$ $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивным подмногообразием, внутренность которого содержит $\mathrm{Cl}_P F$.

Доказательство теоремы 11.2. Поскольку

$$Q_{A'} \cap \mathrm{Bd}\, R \subset \partial Q_{A'}$$

(лемма 8.2), то достаточно установить

$$(Q_{A'} \setminus \mathrm{Bd}\, R) \cap \mathrm{Cl}_P F \subset_{Z_{k+1-|A'|}} (Q_{A'} \setminus \mathrm{Bd}\, R).$$

С помощью следствия 3.9 требуемое несложно сводится к следующему утверждению.

Лемма 11.7. *Пусть* N – $\nu^k_{\mathfrak{L}}$*-конструктивное подмногообразие* P, *а* $\mathscr{P} = \{P_\alpha\}$ – ν^k*-конструктивное разбиение* N. *Тогда для любого* $\varepsilon \in \mathrm{cov}\, P$ *существует* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$*-конструктивное подмногообразие* $N_\varepsilon \Subset N$ *такое, что*:

(5) $\mathrm{N}(N_\varepsilon; \varepsilon) \supset N$;

(6) $\mathscr{P}_\varepsilon \rightleftharpoons \mathscr{P}{\restriction}_{N_\varepsilon}$ *является* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$*-конструктивным разбиением* N_ε;

(7) $\mathscr{P}_\varepsilon \cup \{X \setminus \mathrm{Int}\, N_\varepsilon\}$ *является* $\nu^k_{\mathfrak{L}}$*-конструктивным разбиением* P.

Доказательство. В силу [1; лемма 5.2] существует такая смешанная триангуляция $\mathscr{L}$ многообразия P, что все элементы $\mathscr{P}$, а также N являются полиэдрами относительно $\mathscr{L}$. В силу леммы 2.1 существует триангуляция K, вписанная в $\mathscr{L}$ и ε. Тем самым $P_{A'}$ является подмногообразием относительно K.

Через $\mathfrak{R}$ обозначим регулярную окрестность $\mathrm{N}(B;\beta^2K)$ границы $B=\mathrm{Bd}_P N$ в N, являющейся полиэдром относительно K. Тогда $\mathfrak{R}\cap P_{A'}$ есть регулярная окрестность $B\cap P_{A'}$ в $P_{A'}$ для любого $A'\subset A$. Так как регулярная окрестность полиэдра в многообразии, а также ее граница и дополнение являются подмногообразиями [6], то

(8) $\mathfrak{R}\cap P_{A'}$, $\mathrm{Bd}\,\mathfrak{R}\cap P_{A'}$ и $P_{A'}\setminus R$ являются подмногообразиями для любого $A'\subset A$.

Рассмотрим подмногообразие $\grave{N}_\varepsilon=N\setminus\mathrm{Int}\,\mathfrak{R}$. Свойство (5) для $\grave{N}_\varepsilon$ имеет место в силу вписанности $K\prec\varepsilon$. Свойства (6), (7) также справедливы, что легко следует из свойства (8). К сожалению, $\grave{N}_\varepsilon$, вообще говоря, $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивным подмногообразием не является. Применив к $\grave{N}_\varepsilon$ теорему 4.1 об изотопическом движении, получим сохраняющую смешанную триангуляцию $\mathscr{L}$ изотопию $\Phi\colon P\times I\to P$, переводящую $\grave{N}_\varepsilon$ в $\nu^k_{\mathfrak{L}}$-конструктивное подмногообразие N_ε.

Список литературы

[1] С. М. Агеев, “Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. I. Улучшение связности разбиений”, *Матем. сб.*, **198**:3 (2007), 3–50; англ. пер.: S. M. Ageev, “Axiomatic method of partitions in the theory of Nöbeling spaces. I. Improvement of partition connectivity”, *Sb. Math.*, **198**:3 (2007), 299–342.

[2] С. М. Агеев, “Аксиоматический метод разбиений в теории пространств Небелинга. II. Теорема о незаузленности”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 3–32.

[3] S.-T. Hu, *Theory of retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, MI, 1965.

[4] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986; пер. с англ.: R. Engelking, *General topology*, PWN, Warsaw, 1977.

[5] M. Bestvina, *Characterizing k-dimensional universal Menger compacta*, Mem. Amer. Math. Soc., **71**, № 380, 1988.

[6] К. Рурк, Б. Сандерсон, “Введение в кусочно линейную топологию”, 1974; пер. с англ.: C. P. Rourke, B. J. Sanderson, “Introduction to piecewise-linear topology”, 1972.

[7] P. L. Bowers, “Dense embeddings of sigma-compact, nowhere locally compact metric spaces”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **95**:1 (1985), 123–130.

[8] J. F. P. Hudson, *Piecewise linear topology*, W. A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam, 1969.

С. М. Агеев (S. M. Ageev)
Белорусский государственный университет,
г. Минск, Беларусь
E-mail: ageev_sergei@yahoo.com, ageev@bsu.by

Поступила в редакцию
09.12.2005