Доклады Академии наук БССР

1989 Апрель Том 33 № 4

УДК 512.626+512.547

В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ

О БАЗИСЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНОСТИ ПОЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГООБРАЗИЯ ХАРАКТЕРОВ СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком В. П. Платоновым)

Пусть $\Gamma=<g_1, \ldots, g_m>$ — свободная группа с образующими $g_1, \ldots, g_m$, K — поле нулевой характеристики. Многообразия представлений и характеров конечно-порожденных групп изучались рядом авторов (например, [1,3]) и интерес к ним возрастает. Топологические применения этих многообразий даны в [2]. Магнус в [4], рассматривая представления $\rho:\Gamma \to SL_2(K)$, показал, что базис трансцендентности над K поля функций многообразия характеров $X(\Gamma, SL_2(K))$ образуют функции τ_{g_i}, $\tau_{g_1 g_j}$, $\tau_{g_2 g_k}$, $1\leqslant i\leqslant m$, $2\leqslant j\leqslant m$, $3\leqslant k\leqslant m$. В настоящей статье результат Магнуса обобщается на представления произвольной степени. Справедлива

Теорема. *Пусть $X(\Gamma, GL_n(K))$ — многообразие характеров представлений группы Γ в $GL_n(K)$. Тогда размерность $X(\Gamma, GL_n(K))$ равна $(m-1)n^2+1$ и функции*

$$\tau_{g_i^j} (1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n),\ \tau_{g_1^i g_k^j},\ \tau_{g_2 g_s^i}\ (1\leqslant i,\ j\leqslant n-1,\ 2\leqslant k\leqslant m,\ 3\leqslant s\leqslant m) \qquad (1)$$

образуют базис трансцендентности поля $K(X(\Gamma, GL_n(K)))$ над K.

Для доказательства теоремы необходимы следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть $X=(x_{ij})$ — «общая» матрица порядка n, где x_{ij} — независимые переменные над K, и пусть $X^{-1}=(y_{ij})$. Тогда поле $K(x_{ij}y_{ji}$, $1\leqslant i,\ j\leqslant n)$ является чисто трансцендентным расширением поля K степени трансцендентности $(n-1)^2$.*

Доказательство леммы 1. Из равенства $XX^{-1}=X^{-1}X=E_n$ следует, что $\sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{ki}=1$ и $\sum_{k=1}^{n} x_{ki}y_{ik}=1$. Следовательно, функции $x_{in}y_{ni}$, $x_{ni}y_{in}$, $1\leqslant i\leqslant n$, выражаются через функции $x_{ij}y_{ji}$, $1\leqslant i,\ j\leqslant n-1$. Поэтому степень трансцендентности поля $K(x_{ij}y_{ji},\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n-1)$ над K не превосходит $(n-1)^2$. Покажем, что элементы $z_{ij}=x_{ij}y_{ji}$, $1\leqslant i$, $j\leqslant n-1$, алгебраически независимы над K. Предположим противное. Пусть существует ненулевой многочлен от $(n-1)^2$ переменных $P\in K[f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{n-1\,n-1}]$, такой, что $P(z_{ij},\ 1\leqslant i,\ j\leqslant n-1)=0$. Покажем, что тогда существует ненулевой многочлен Q от $n-1$ переменной $Q\in K[f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{n-1\ n-1}]$, такой, что если

$$X_1=\begin{pmatrix} x_{11} & & & x_{1n}\\ & \ddots \quad 0 & & \vdots\\ 0 & & \ddots & \vdots\\ & & x_{n-1\,n-1} & \vdots\\ x_{n1} & \ldots & & x_{nn}\end{pmatrix},\ \text{то}\ Q(x_{ii}t_{ii},\ 1\leqslant i\leqslant n-1)=0,$$

где t_{ii} — i-й диагональный элемент матрицы X_1^{-1}. Существование многочлена Q докажем по индукции, проводя последовательно специализации $x_{ij}\to 0$, $i\neq j$, $1\leqslant i$, $j\leqslant n-1$. Наличие многочлена P дает нам базу индукции. Предположим теперь, что существует $F\in K[f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{i_0 i_0}, f_{i_0 j_0}, f_{i_0 j_0+1}, \ldots, f_{n-1\, n-1}]$, $F\neq 0$, такой, что для матрицы

$$X_2=\begin{pmatrix} x_{11} & & 0 & & x_{1n} \\ & \cdot & & & \cdot \\ 0 & \cdot & & & \cdot \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ 0\cdots 0 & x_{i_0 i_0} & 0\cdots 0 & x_{i_0 j_0} \cdots & x_{i_0 n} \\ x_{i_0+1\,1} & \cdots & \cdots & \cdots & x_{i_0+1\,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

$F(a_{11}, \ldots, a_{i_0 i_0}, a_{i_0 j_0}, \ldots, a_{n-1\,n-1})=0$, где $a_{ij}=x_{ij}b_{ji}$, b_{ji} — элемент на позиции (j, i) матрицы X_2^{-1}. Представим F в виде $F=f_{i_0 j_0}^{d}F_1$, где $d\geqslant 0$ и многочлен F_1 не делится на $f_{i_0 j_0}$. Имеем $a_{i_0 j_0}=x_{i_0 j_0}b_{j_0 i_0}=\dfrac{x_{i_0 j_0}A_{i_0 j_0}}{\det X_2}$, где $A_{i_0 j_0}$ — алгебраическое дополнение к $x_{i_0 j_0}$ в матрице X_2. Нетрудно видеть, что $A_{i_0 j_0}\neq 0$, следовательно, $a_{i_0 j_0}\neq 0$. Таким образом, $F_1(a_{11}, \ldots, a_{i_0 i_0}, a_{i_0 j_0}, \ldots, a_{n-1\,n-1})=0$. Произведем специализацию $x_{i_0 j_0}\to 0$. Пусть $\bar a_{ij}=a_{ij}|_{x_{i_0 j_0}=0}$, $1\leqslant i$, $j\leqslant n-1$. Поскольку $\det X_2|_{x_{i_0 j_0}=0}\neq 0$, то $\bar a_{ij}$ корректно определены. Кроме того, $\bar a_{i_0 j_0}=0$. Тогда $F_1(\bar a_{11}, \ldots, \bar a_{i_0 i_0}, 0, \ldots, \bar a_{n-1\,n-1})=0$. Поскольку $F_2=F_1|_{f_{i_0 j_0}=0}\neq 0$, то шаг индукции сделан и существование многочлена Q доказано.

Итак, мы получили, что функции $a_i=x_{ii}t_{ii}$, $1\leqslant i\leqslant n-1$, алгебраически зависимы над K. С другой стороны, легко вычислить, что

$$a_i=\frac{x_{ii}A_{ii}}{\det X_1}=1+(-1)^{n+i+1}\,\frac{x_{in}x_{ni}}{x_{ii}}\,\frac{x_{11}\cdots x_{n-1\,n-1}}{\det X_1}.$$ Следовательно,

$$K(a_1, \ldots, a_{n-1})=K\left(\frac{x_{1n}x_{n1}}{x_{11}}\,b, \ \ldots, \ \frac{x_{n-1n}x_{n\,n-1}}{x_{n-1\,n-1}}\,b\right), \text{ где } b=\frac{1}{\det X_1}\prod_{j=1}^{n-1}x_{jj}.$$

Тогда $K_1=K(a_1, \ldots, a_{n-1})(b)=K\left(\dfrac{x_{1n}x_{n1}}{x_{11}}, \ldots, \dfrac{x_{n-1n}x_{nn-1}}{x_{n-1n-1}}, b\right)$. Поскольку в функцию b нетривиально входит x_{nn}, то, очевидно, поле K_1 имеет степень трансцендентности n над K. Поскольку K_1 получается присоединением к полю $K(a_1, \ldots, a_{n-1})$ одного элемента, то степень трансцендентности $K(a_1, \ldots, a_{n-1})$ над K равна $n-1$ и, следовательно, $a_1, \ldots, a_{n-1}$ алгебраически независимы над K. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Лемма 2. *Пусть заданы рациональные функции $f_1, \ldots, f_d\in K(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, x_1, \ldots, x_r)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_s, x_1, \ldots, x_r$ — независимые переменные над K. Предположим, что существует $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_s)\in K^s$, такое, что функции $f_i(\beta_1, \ldots, \beta_s, x_1, \ldots, x_r)$, $1\leqslant i\leqslant d$, алгебраически независимы над K. Тогда в K^s существует непустое открытое по Зарисскому подмножество V, такое, что для любого $\gamma=(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)\in V$ функции $f_i(\gamma_1, \ldots, \gamma_s, x_1, \ldots, x_r)$ алгебраически независимы над K.*

Доказательство леммы 2. Рассмотрим отображение $\varphi_\beta\colon K^r\to K^d$, определяемое функциями $f_i(\beta_1, \ldots, \beta_s, x_1, \ldots, x_r)$, $1\leqslant i\leqslant d$. Так как эти функции алгебраически независимы над K, то $\operatorname{Im}\varphi_\beta$ плотно в K^d и по теореме о размерности слоев морфизма существует точка $y\in K^d$, такая, что

$\dim \varphi_\beta^{-1}(y) = r - d$. Рассмотрим теперь отображение $F: K^s \times K^r \to K^s \times K^d$, определенное посредством $F(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, x_1, \ldots, x_r) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s, f_1, \ldots, f_d)$. Пусть $t = \dim \overline{F(K^s \times K^r)}$. Так как $F^{-1}(\beta, y) = \{\beta\} \times \varphi_\beta^{-1}(y)$, то $\dim F^{-1}(\beta, y) = r - d$. Опять в силу теоремы о размерности слоев мы должны иметь $\dim F^{-1}(\beta, y) \geqslant r + s - t$, т. е. $r - d \geqslant r + s - t$, откуда $t \geqslant s + d$. Значит, $t = s + d$ и $F(K^s \times K^r)$ плотно в $K^s \times K^d$. Следовательно, в $K^s \times K^d$ существует открытое по Зарисскому множество $U \subset F(K^s \times K^r)$, такое, что для любого $u \in U$ $\dim F^{-1}(u) = r - d$. Пусть $U_1 \subset K^s \times K^r$ — открытое множество, определяемое неравенством $g_1 \ldots g_d \neq 0$, где $g_1, \ldots, g_d$ — знаменатели функций $f_1, \ldots, f_d$. Пусть V_1 и V_2 — проекции U и U_1 соответственно на K^s. Тогда $V = V_1 \cap V_2$ — искомое открытое множество. В самом деле, для $\gamma \in V$ нетрудно убедиться, подсчитывая, как и выше, размерности слоев, что $F(\{\gamma\} \times K^r)$ плотно в $\{\gamma\} \times K^d$, а это и есть утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть $g_1, \ldots, g_t \in K(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ — алгебраически независимые над K функции и пусть $f_1, \ldots, f_d \in K(\alpha_1, \ldots, \alpha_s, x_1, \ldots, x_r)$ удовлетворяют условиям леммы 2. Тогда $f_1, \ldots, f_d$ алгебраически независимы над $K(g_1, \ldots, g_t)$.*

Доказательство теоремы. Размерность многообразия характеров $X(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$ равна $(m-1)n^2 + 1$ [5].

Перейдем к доказательству алгебраической независимости функций (1). Пусть V — подмногообразие в $R(\Gamma, \mathrm{GL}_n(K))$, состоящее из представлений вида

$$\left(Y_1 = \begin{pmatrix} y_1(1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n(1) \end{pmatrix}, Y_2 = D_2 Z_2 \begin{pmatrix} y_1(2) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n(2) \end{pmatrix} Z_2^{-1} D_2^{-1}, \ldots, \right.$$

$$\left. Y_m = D_m Z_m \begin{pmatrix} y_1(m) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & y_n(m) \end{pmatrix} Z_m^{-1} D_m^{-1} \right),$$

где $Z_k = (z_{ij}(k))$, $D_k = \mathrm{diag}\,(d_1(k), \ldots, d_n(k))$, $k = 2, \ldots, m$.

Покажем, что ограничения на V функций (1) алгебраически независимы над K. Другими словами, необходимо показать, что поле $F = K(\mathrm{tr}\, Y_i^j$, $\mathrm{tr} Y_1^k Y_s^l$, $\mathrm{tr}\ Y_2 Y_r^l$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant k$, $l \leqslant n-1$, $2 \leqslant s \leqslant m$, $3 \leqslant r \leqslant m)$ имеет степень трансцендентности $(m-1)n^2 + 1$ над K. Заметим, что расширение $K(y_i(j)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m)/K(\mathrm{tr}\, Y_i^j$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n)$ конечно, поскольку оба поля имеют одинаковую степень трансцендентности $n\,m$ над K. Следовательно, $[F_1 : F] < \infty$, где $F_1 = K(y_i(j)$, $\mathrm{tr}\, Y_1^k Y_s^l$, $\mathrm{tr}\, Y_2 Y_r^l$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant k$, $l \leqslant n-1$, $2 \leqslant s \leqslant m$, $3 \leqslant r \leqslant m)$, поэтому достаточно показать, что степень трансцендентности F_1/K равна $(m-1)n^2 + 1$. Рассмотрим башню $K \subset F_2 \subset F_1$, где $F_2 = K(y_i(j)$, $\mathrm{tr}\, Y_1^k Y_s^l$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant k$, $l \leqslant n-1$, $2 \leqslant s \leqslant m)$, и покажем, что степень трансцендентности первого этажа равна $(m-1)(n-1)^2 + 1$, а второго — $(m-2)(n-1)$. В сумме это даст требуемую степень трансцендентности. Вначале рассмотрим F_2/K. Пусть $x_r(s, l)$ — r-й диагональный элемент матрицы Y_s^l. Тогда

$$\mathrm{tr}\, Y_1^k Y_s^l = \sum_{i=1}^{n} y_i(1)^k x_i(s, l). \tag{2}$$

Обозначим $Z_s^{-1} = (t_{ij}(s))$. Тогда из определения Y_s получаем

$$x_i(s, l) = \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(s)\, t_{ji}(s)\, y_j(s)^l . \tag{3}$$

Из (2) и (3), когда i пробегает значения от 1 до n, а k, l — от 0 до $n-1$, получаем равенство

$$P_1 \begin{pmatrix} z_{11}(s)\, t_{11}(s) \dots z_{1n}(s)\, t_{n1}(s) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{n1}(s)\, t_{1n}(s) \dots z_{nn}(s)\, t_{nn}(s) \end{pmatrix} P_i' =$$

$$= \begin{pmatrix} n & \operatorname{tr} Y_s & \cdot & \operatorname{tr} Y_s^{n-1} \\ \operatorname{tr} Y_1 & \operatorname{tr} Y_1 Y_s & \vdots & \operatorname{tr} Y_1 Y_s^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \operatorname{tr} Y_1^{n-1} & \operatorname{tr} Y_1^{n-1} Y_s & \cdot & \operatorname{tr} Y_1^{n-1} Y_s^{n-1} \end{pmatrix}, \text{ где } P_i =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ y_1(i) & \cdots & y_n(i) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1(i)^{n-1} & \cdots & y_n(i)^{n-1} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Из (4) следует, что $F_2 = K(y_i(j),\ z_{kl}(s)\, t_{lk}(s),\ 1 \leqslant i, k, l \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant \leqslant m)$. Из леммы 1 вытекает, что элементы $z_{kl}(s)\, t_{lk}(s)$, $1 \leqslant l$, $k \leqslant n-1$, $2 \leqslant s \leqslant m$, алгебраически независимы над K. Следовательно, степень трансцендентности F_2 над K равна $(m-1)(n-1)^2 + mn$, что нам и требовалось.

Рассмотрим теперь расширение F_1/F_2, $F_1 = F_2(\operatorname{tr} Y_2 Y_r^l,\ 3 \leqslant r \leqslant m,$

$$1 \leqslant l \leqslant n-1). \quad \operatorname{tr} Y_2 Y_r^l \operatorname{tr} Y_2 D_r Z_r \begin{pmatrix} y_1(r)^l & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & 0 \\ & & & \cdot \\ 0 & & & y_n(r)^l \end{pmatrix} Z_r^{-1} D_r^{-1} =$$

$$= \operatorname{tr}(Z_r^{-1} D_r^{-1} Y_2 D_r Z_r) \begin{pmatrix} y_1(r)^l & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & 0 \\ 0 & & & \cdot \\ & & & y_n(r)^l \end{pmatrix} = y_1(r)^l\, a_1(r) + \dots + y_n(r)^l\, a_n(r),$$

где $a_i(r)$ — i-й диагональный элемент матрицы $Z_r^{-1} D_r^{-1} Y_2 D_r Z_r$. Пусть l пробегает значения от 0 до $n-1$. Тогда $P_r \begin{pmatrix} a_1(r) \\ \vdots \\ a_n(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{tr} Y_2 \\ \vdots \\ \operatorname{tr} Y_2 Y_r^{n-1} \end{pmatrix}$. Так как P_r — невырожденная матрица, то отсюда следует, что $F_1 = F_2(a_k(r),$

$1 \leqslant k \leqslant n,\ 3 \leqslant r \leqslant m)$. Так как $\sum_{k=1}^{n} a_k(r) = \operatorname{tr} Y_2 \in F_2$, $3 \leqslant r \leqslant m$, то $F_1 =$

$= F_2(a_k(r),\ 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ 3 \leqslant r \leqslant m)$. Чтобы применить лемму 3, необходимо показать, что существует специализация $Z_r \to A_r \in \mathrm{GL}_n(K)$, $r = 3, \dots, m$, $Y_2 \to B \in \mathrm{GL}_n(K)$, такая, что поле $K(b_k(r),\ 1 \leqslant k \leqslant n-1,\ 3 \leqslant r \leqslant$

$\leqslant m$), где $b_k(r)$ — k-й диагональный элемент матрицы $A_r^{-1} D_r^{-1} B D_r A_r$, имеет степень трансцендентности $(m-2)(n-1)$ над К. При этом B должна быть диагонализируема.

Положим

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & \cdot & & & \\ & \cdot & \cdot & 0 & \\ & & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & \cdot & \cdot \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad r = 3, \ldots, m, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ & & 0 & \cdot & 1 \\ \cdot & & & & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $B^n = E_n$, то B диагонализируема. Легко вычислить, что первые $n-1$ диагональных элементов матрицы $A_r^{-1} D_r^{-1} B D_r A_r$ есть $-\dfrac{d_2(r)}{d_1(r)}$, $\dfrac{d_2(r)}{d_1(r)} - \dfrac{d_3(r)}{d_2(r)}, \ldots, \dfrac{d_{n-1}(r)}{d_{n-2}(r)} - \dfrac{d_n(r)}{d_{n-1}(r)}$. Мы видим, что $K(b_k(r), 1 \leqslant k \leqslant n-1, 3 \leqslant r \leqslant m) = K\left(\dfrac{d_2(r)}{d_1(r)}, \ldots, \dfrac{d_n(r)}{d_{n-1}(r)}, 3 \leqslant r \leqslant m\right)$. Последнее поле, очевидно, имеет степень трансцендентности $(m-2)(n-1)$ над K, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность академику В. П. Платонову за внимание к работе.

Summary

The transcendence basis is constructed for the field of rational functions of the variety of representations of a free group.

Литература

1. Платонов В. П., Беняш-Кривец В. В. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 5. С. 293—297. 2. Culler M., Shalen P. // Ann. Math. 1983. N 117. P. 109—146. 3. Lubotzky A., Magid A. // Mem. Amer. Math. Soc. 1985. Vol. 58, N 336. P. 1—117. 4. Magnus W. // Math. Zeit. 1979. Vol. 170, N 1. P. 91—103. 5. Procesi C. // Israel J. Math. 1974. Vol. 19. P. 169—182.

Институт математики АН БССР

Поступило 29.11.88