Доклады Академии наук БССР

1986 Том XXX № 5

УДК 512.547+512.552

В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ

О КОНЕЧНОЙ ПОРОЖДЕННОСТИ КОЛЬЦА ХАРАКТЕРОВ ТРЕХМЕРНЫХ УНИМОДУЛЯРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

(Представлено академиком АН БССР В. П. Платоновым)

Пусть G — произвольная конечно-порожденная группа с образующими $g_1, ..., g_n$. Для произвольного поля K рассмотрим множество $V(G, SL_3(K))$ всех линейных представлений $\rho: G\to SL_3(K)$, где $SL_3(K)$ — группа унимодулярных матриц третьего порядка. $V(G, SL_3(K))$ можно естественным образом отождествить с некоторым алгебраическим подмножеством в $SL_3(K)\times...\times SL_3(K)$ (n раз). Для каждого элемента $g\in G$ введем следующую регулярную функцию $t(g)$ на $V(G, SL_3(K))$: $t(g):\rho\to \mathrm{tr}\rho(g)$, где $\mathrm{tr}\rho(g)$ — след матрицы $\rho(g)$. Кольцо, порожденное всеми функциями $t(g)$, $g\in G$, обозначим $T(G, SL_3(K))$. Это кольцо будем называть кольцом характеров трехмерных унимодулярных представлений группы G или для краткости — кольцом характеров группы G. Сделаем некоторые наблюдения о функториальных свойствах колец характеров. Если мы имеем гомоморфизм групп $\varphi: G\to G'$, то ему соответствует гомоморфизм колец характеров $\bar{\varphi}: T(G, SL_3(K))\to T(G', SL_3(K))$, $\bar{\varphi}(t(g))=t(\varphi(g))$. Если φ — эпиморфизм, то $\bar{\varphi}$ — также эпиморфизм. Напротив, инъективность φ не влечет инъективности $\bar{\varphi}$. Далее, если $L\supset K$ — расширение полей, то $V(G, SL_3(K))\subset V(G, SL_3(L))$ и, следовательно, функции из $T(G, SL_3(K))$ являются просто ограничениями на $V(G, SL_3(K))$ соответствующих функций из $T(G, SL_3(L))$. Фрике и Клейн в [1] ввели в рассмотрение кольцо характеров двумерных унимодулярных представлений группы G $T(G, SL_2(K))$ и высказали предположение, что оно конечно порождено. Кольцо $T(G, SL_2(K))$ называют кольцом характеров Фрике. В 1972 г. Горовиц в [2] доказал, что функции $t(g_{i_1}\cdot g_{i_2}\dots g_{i_k})$, $1\leqslant i_1<i_2<...<i_k\leqslant n$, порождают $T(G, SL_2(K))$. Основные результаты о кольцах характеров Фрике и их теоретико-групповых приложениях можно найти в обзоре Магнуса [3].

В предлагаемой заметке доказывается следующая

Теорема. *Кольцо характеров трехмерных унимодулярных представлений конечно порожденной группы G $T(G, SL_3(K))$ конечно порождено.*

Ключевую роль в доказательстве теоремы играет следующая

Лемма. *Для любых $g, h\in G$ имеем*

$$t(g^2h)=t(g)\cdot t(gh)-t(g^{-1})\cdot t(h)+t(g^{-1}h). \tag{1}$$

Доказательство леммы. Рассмотрим произвольную матрицу $A\in SL_3(K)$, пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни ее характеристического полинома. По теореме Гамильтона — Кэли A удовлетворяет уравнению

$$A^3-A^2\,\mathrm{tr}\,A+A(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)-E=0.$$

Заметим, что $\mathrm{tr}\,A^{-1}=\alpha_1^{-1}+\alpha_2^{-1}+\alpha_3^{-1}=\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3$, поскольку $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=1$. С учетом этого последнее уравнение можно переписать в виде

$$A^3-A^2\,\mathrm{tr}\,A+A\,\mathrm{tr}\,A^{-1}-E=0. \tag{2}$$

Умножим обе части (2) на $A^{-1}B$ справа, где $B\in SL_3(K)$, и возьмем след:

$$\mathrm{tr}\,A^2B=\mathrm{tr}\,A\cdot\mathrm{tr}\,AB-\mathrm{tr}\,A^{-1}\cdot\mathrm{tr}\,B+\mathrm{tr}\,A^{-1}B. \tag{3}$$

Равенство (3) выполняется для любых матриц A, $B \in SL_3(K)$, а это и означает справедливость утверждения леммы.

Доказательство теоремы. Поскольку произвольная конечно-порожденная группа является эпиморфным образом свободной группы, то в силу сделанных перед формулировкой теоремы замечаний достаточно доказать конечную порожденность кольца $T(G, SL_3(K))$ для свободной группы G. Покажем, что существует такое натуральное число N, которое зависит от числа образующих $g_1, \ldots, g_n$ группы G, что для любого слова $W \in G$ функция $t(W)$ выражается в виде полинома с целыми коэффициентами от $t(W_1), \ldots, t(W_k)$, где W_i имеет вид $W_i = g_{i_1}^{\varepsilon_1} \ldots g_{i_s}^{\varepsilon_s}$, $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, $1 \leqslant j \leqslant s$, причем каждая образующая g_r встречается в W_i не более N раз. В силу конечной порожденности группы G таких слов W_i конечное число, и отсюда будет немедленно следовать конечная порожденность кольца $T(G, SL_3(K))$. Заметим, что кроме соотношения (1) имеется очевидное соотношение $t(gh) = t(hg)$ для любых $g, h \in G$, поскольку для любых матриц A и B $\mathrm{tr} AB = \mathrm{tr} BA$.

Шаг 1. Возьмем произвольный элемент $W = g_{i_1}^{n_1} \ldots g_{i_r}^{n_r}$ из G. Применив достаточное число раз лемму, запишем $t(W)$ как полином над Z от $t(W_1), \ldots, t(W_s)$, где каждое слово W_i имеет вид

$$W_i = g_{p_1}^{\varepsilon_1} \ldots g_{p_t}^{\varepsilon_t}, \tag{4}$$

где $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant t$, и $p_1, \ldots, p_t$ не обязательно различны.

Шаг 2. Пусть W имеет вид (4) и, кроме того, образующая g_1 входит в W следующим образом:

$$W = W_1 g_1 W_2 g_1 W_3, \tag{5}$$

причем W_2 не содержит g_1 (аналогично разбирается случай $W = W_1 g_1^{-1} W_2 g_1^{-1} W_3$). Тогда $t(W) = t(W_1 g_1 W_2 g_1 W_3) = t(g_1 W_2 g_1 W_3 W_1) =$ (обозначим для краткости $W_2 = V_1$, $W_3 W_1 = V_2$) $= t(g_1 V_1 g_1 V_2) = t((g_1 V_1)^2 V_1^{-1} V_2) =$ (согласно лемме) $= t(g_1 V_1) t(g_1 V_2) - t((g_1 V_1)^{-1}) \cdot t(V_1^{-1} V_2) - t((g_1 V_1)^{-1} V_1^{-1} V_2)$. В итоге имеем

$$t(g_1 V_1 g_1 V_2) = t(g_1 V_1) t(g_1 V_2) - t((g_1 V_1)^{-1}) \cdot t(V_1^{-1} V_2) - t(g_1^{-1} V_1^{-1} V_2 V_1^{-1}). \tag{6}$$

Если необходимо, то к функциям $t(V_1^{-1} V_2)$, $t(g_1^{-1} V_1^{-1} V_2 V_1^{-1})$ применим шаг 1. В результате получим, что если W имеет вид (4) и удовлетворяет (5), то $t(W)$ есть полином с целыми коэффициентами от $t(W_1), \ldots, t(W_s)$, где каждое слово W_i имеет вид (4) и в каждое W_i образующая g_1 входит меньшее число раз, чем в W. Применив формулу (6) достаточное число раз, выразим $t(W)$ в виде полинома над $\mathbf{Z}$ от функций $t(W_i)$, где W_i имеет вид

$$W_i = g_1 V_1 g_1^{-1} V_2 g_1 \ldots g_1^{-1} V_s, \tag{7}$$

причем в слова V_j образующая g_1 не входит.

Шаг 3. Пусть W имеет вид (7) и предположим, что g_1 входит в W по меньшей мере 4 раза, т. е. $W = g_1 W_1 g_1^{-1} W_2$, где W_1 не содержит g_1, а W_2 в силу (7) имеет вид

$$W_2 = U_1 g_1 U_2 g_1^{-1} U_3, \tag{8}$$

где U_1 и U_3 не содержат g_1. Тогда имеем

$$t(W) = t(g_1 W_1 g_1^{-1} W_2) = t(g_1^2 W_1 g_1^{-1} W_2 g_1^{-1}) = (\text{по лемме}) =$$

$$= t(g_1) \cdot t(W_1 g_1^{-1} W_2) - t(g_1^{-1}) \cdot t(W_1 g_1^{-1} W_2 g_1^{-1}) + t(g_1^{-1} W_1 g_1^{-1} W_2 g_1^{-1}). \tag{9}$$

К функции $t(W_1 g_1^{-1} W_2 g_1^{-1})$ из (9) применим преобразования шага 2. Рассмотрим теперь функцию $t(V) = t(g_1^{-1} W_1 g_1^{-1} W_2 g_1^{-1})$ из (9). Согласно (6):

$$t(V) = t(g_1^{-1}W_1)\cdot t(g_1^{-1}W_2g_1^{-1}) - t((g_1^{-1}W_1)^{-1})\cdot t(W_2g_1^{-1}W_1^{-1}) + t(g_1W_1^{-1}W_2g_1^{-1}W_1^{-1}) = t(g_1^{-1}W_1)\cdot t(g_1^{-2}W_2) - t(g_1W_1^{-1})\cdot t(W_2g_1^{-1}W_1^{-1}) + t(g_1W_1^{-1}W_2g_1^{-1}W_1^{-1}). \quad (10)$$

К функции $t(g_1^{-2}W_2)$ применим шаг 1. Осталось рассмотреть функцию $t(g_1W_1^{-1}W_2g_1^{-1}W_1^{-1})$ из (10). Подставим вместо W_2 его значение из (8). Получим $t(g_1W_1^{-1}W_2g_1^{-1}W_1^{-1}) = t(g_1(W_1^{-1}U_1)\,g_1(U_2g_1^{-1}U_3g_1^{-1}W_1^{-1})) = t(g_1X_1g_1X_2)$, где $X_1 = W_1^{-1}U_1$, $X_2 = U_2g_1^{-1}U_3g_1^{-1}W_1^{-1}$. Теперь к функции $t(g_1X_1g_1X_2)$ можно применить (6), после чего проделаем шаг 1, а при возможности и шаг 2. В результате выразим $t(W)$ с целыми коэффициентами через $t(V_1), \ldots, t(V_k)$, где каждое V_i имеет вид (7) и в каждое V_i образующая входит меньшее число раз, чем в W. Проделав эти преобразования достаточное число раз, можно считать, что каждое V_i имеет вид

$$V_i = \begin{cases} W_1g_1, \\ W_1g_1^{-1}, \\ W_1g_1^{-1}W_2g_1, \end{cases} \quad (11)$$

причем слова W_1 и W_2 образующую g_1 не содержат.

Шаг 4. Пусть W имеет вид (11), скажем, $W = V_1g_1^{-1}V_2g_1$ (случаи $W = V_1g_1$ и $W = V_1g_1^{-1}$ разбираются аналогично). Напрашивается провести преобразования шагов 2, 3 для образующей g_2. Однако при этом нужно учесть следующее: если выразим $t(W)$ через $t(U_1), \ldots, t(U_k)$, где в каждое U_i образующая g_2 входит меньшее число раз, чем в W, то при этом по-прежнему образующая g_1 должна входить в U_i не более двух раз. Другими словами, уменьшая число вхождений g_2, мы не должны увеличивать число вхождений g_1. Заметим, что увеличение числа вхождений g_1 может произойти только при применении формулы (6). Пусть $W = W_1g_2W_2g_2W_3$. Тогда если g_1 не входит в W_2, то применение (6) не приведет к увеличению числа вхождений g_1. Теперь будем действовать следующим образом: применяя преобразования шагов 1—3, будем уменьшать число вхождений g_2 сначала в V_1, а затем (в силу $t(V_1g_1^{-1}V_2g_1) = t(V_2g_1V_1g_1^{-1})$) в V_2. В результате выразим $t(W)$ через $t(W_1), \ldots, t(W_k)$, причем в каждое W_i образующая g_1 входит не более 2 раз, а g_2 — не более 4 раз. Запишем W_i в явном виде $W_i = (V_1g_2^{\varepsilon_1}V_2g_2^{\varepsilon_2}V_3)\,g_1^{\varepsilon_3}(V_4g_2^{\varepsilon_5}V_5g_2^{\varepsilon_6}V_6)$, где $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant 6$. Действуя аналогичным образом, добьемся того, чтобы образующая g_3 входила в каждое V_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$, не более 2 раз. В сумме это даст не более 12 вхождений g_3. Для образующей g_k получим не более $4\cdot 3^{k-2}$ вхождений. Отсюда следует, что в качестве N можно взять $4\cdot 3^{n-2}$, где n — число образующих группы G. Это и завершает доказательство конечной порожденности кольца характеров.

В заключение автор считает своим долгом поблагодарить В. П. Платонова за неоднократные обсуждения и советы при написании данной работы.

Summary

It is proved that the ring of characters affording three-dimensional unimodular representations of a finitely generated group is finitely generated.

Литература

1. Fricke R., Klein F. Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen.— Leipzig: B. G. Teubner, 1897, Bd 1; Reprint: New York: Johnson Reprint Corporation, 1965.— 634 S. 2. Horowitz R.— Comm. Pure and Applied Math., 1972, vol. 25, N 6, p. 635—649. 3. Magnus W.— Result. Math., 1981, vol. 4, N 2, p. 171—192.

Институт математики АН БССР

Поступило 11.06.85