ВЕКТОРЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ШКАЛЕ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Я. В. Радыно

1. Пусть задана шкала банаховых пространств

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_\nu \subset \ldots \subset X \tag{1}$$

с нормами вложения $\leqslant 1$. Образуем пространство

$$l_1(X_\nu;\ X) = \{x \in X:\ x = \sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu,\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \| x_\nu \|_\nu < +\infty\} \tag{2}$$

с нормой

$$|||\, x \,||| = \inf_{x=\sum x_\nu} \sum_{\nu=1}^{\infty} \| x_\nu \|_\nu. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пространство $l_1(X_\nu;\ X)$ с нормой* (3) *банахово.*

Теорема 2. *Пространство, сопряженное к $l_1(X_\nu;\ X)$, линейно изометрично банахову пространству* $(\lim \operatorname{proj} X_\nu^*) \cap l_\infty(X_\nu^*)$ *с нормой, индуцированной из $l_\infty(X_\nu^*)$.*

Векторное пространство $X_0 = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} X_\nu$, пополненное относительно нормы $\| x \|_{-\infty} = \lim_{\nu\to\infty} \| x \|_\nu$, обозначим $X_{-\infty}$ [1].

Теорема 3. *Банаховы пространства $l_1(X_\nu;\ X)$ и $X_{-\infty}$ совпадают.*

2. Пусть $A\colon X \to X$ — замкнутый неограниченный линейный оператор в банаховом пространстве X с областью определения $D(A)$. Для каждого $\nu > 0$ определим банахово пространство $D_A^\nu(X)$:

$$D_A^\nu(X) = \{x \in X:\ \| A^k x \| \leqslant c\nu^k,\ k = 0,\ 1,\ \ldots\} \tag{4}$$

с нормой

$$\| x \|_\nu = \sup_{k\geqslant 0} \frac{\| A^k x \|}{\nu^k}. \tag{5}$$

Теорема 4. *Пространство $D_A^\nu(X)$ инвариантно относительно A; если A_ν — сужение оператора A на $D_A^\nu(X)$, то $A_\nu \in \mathscr{L}(D_A^\nu(X))$ и $\| A_\nu \| \leqslant \nu$; если $\sigma(A_\nu)$ — спектр оператора A_ν, $\sigma(A)$ — спектр оператора A, то $\sigma(A_\nu) \subset \sigma(A)$ для любого ν.*

Векторное пространство $\operatorname{Exp}_A X = \lim_{\nu\to\infty} \operatorname{ind} D_A^\nu(X)$ назовем пространством векторов экспоненциального типа.

Теорема 5. *Локально выпуклое пространство $\operatorname{Exp}_A X$ отделимо и квазиполно.*

Примеры. 1) Если $X = C_b(\mathbb{R})$ — равномерно непрерывные ограниченные на $\mathbb{R}$ функции с нормой sup, а $A = \frac{d}{dt}$, то $\operatorname{Exp}\frac{d}{dt}C_b(\mathbb{R})$ — пространство функций экспоненциального типа, ограниченных на $\mathbb{R}$.

2) Пространство $\operatorname{Exp}\frac{d}{dt}L_p(\mathbb{R})$ состоит из целых функций экспоненциального типа, принадлежащих $L_p(\mathbb{R})$ на $\mathbb{R}$.

3) Пространства $\operatorname{Exp}\frac{d}{dt}C[a,\ b]$, $\operatorname{Exp}\frac{d}{dt}L_p[a,\ b]$ совпадают с пространством $\operatorname{Exp}\mathbb{C}$ ([2], с. 203) всех целых функций экспоненциального типа.

Теорема 6. *Если A — генератор сильно непрерывной ограниченной группы в X, то $\operatorname{Exp}_A X$ плотно в X.*

Отметим, что теорема 6 в частных случаях (см. примеры 1 и 2) дает известные теоремы С. Н. Бернштейна и С. М. Никольского.

Теорема 7. *Если $\operatorname{Exp}_A X$ плотно в X, то банаховы пространства $l_1(D_A^\nu(X);\ X)$ и $X_{-\infty}$ совпадают вместе с нормами, т. е. каждый элемент $x \in X$ может быть представлен* *в виде ряда* $x = \sum x_\nu$, *где* $x_\nu \in D_A^\nu(X)$ *и* $\sum \| x_\nu \|_\nu < +\infty$, *причем* $x \in D(A)$ *только тогда, когда ряд* $\sum \nu \| x_\nu \|_\nu$ *сходится.*

3. Пусть задана шкала (1). Обозначим $B_\nu[x_0;\ R] = \{x \in X_\nu\colon \| x - x_0 \|_\nu \leqslant R\}$ — замкнутый шар в X_ν с центром в x_0 и радиуса R. Пусть задан отрезок $I_\varepsilon = [-\varepsilon,\ \varepsilon]$ и отображение $F(t,\ x)$, удовлетворяющее условиям:

$$F(\cdot,\ x)\colon I_\varepsilon \ni t \to F(t,\ x) \in X \text{ — непрерывно для } \forall x \in X; \tag{6}$$

$$F(t,\ \cdot)\colon X \ni x \to F(t,\ x) \in X \text{ — замкнуто для } \forall t \in I_\varepsilon; \tag{7}$$

$$F\colon I_\varepsilon \times B_\nu[x_0;\ R] \ni (t,\ x) \to F(t,\ x) \in X_{\nu+1} \text{ непрерывно}; \tag{8}$$

$$\| F(t,\ x) - F(t,\ y) \|_{\nu+1} \leqslant c\nu \| x - y \|_\nu \quad \forall x,\ y \in B_\nu[x_0;\ R]. \tag{9}$$

Теорема 8. *Если условия (6) — (9) выполняются, то для любого заданного* $x_0 \in X_\nu$ *существует число* $\delta > 0$ *и непрерывна дифференцируемая функция* $I_\delta = [-\delta,\ \delta] \ni t \to x(t) \in l_1(X_\nu;\ X)$, *удовлетворяющая задаче Коши*

$$\frac{dx}{dt} = F(t,\ x(t)), \qquad x(0) = x_0. \tag{10}$$

Если имеются два решения задачи (10), *принадлежащие пространству* $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} C(I_\delta;\ X_\nu)$, *то они совпадают.*

Пусть сейчас $X_\nu = D_A^\nu(X)$ и $\mathrm{Exp}_A X$ плотно в X.

Теорема 9. *Предположим, что заданы*

$$I \ni t \to a(t) \in X \text{ — непрерывная функция}; \tag{11}$$

$$B,\ C \in \mathscr{L}(X_\nu;\ X_{\nu+1}), \quad \| B \|_{\mathscr{L}(X_\nu;\ X_{\nu+1})} \leqslant c_1, \quad \| C \|_{\mathscr{L}(X_\nu;\ X_{\nu+1})} \leqslant c_2. \tag{12}$$

Тогда для каждого $x_0 \in X_{\nu_0}$ *существует число* $\delta > 0$ *и функция* $x(t) \in C^1(I_\delta;\ X)$, *удовлетворяющая задаче Коши:*

$$\frac{dx}{dt} = a(t) \| Cx(t) \| BAx(t), \qquad x(0) = x_0.$$

Теорема 10. *Пусть* $f\colon \mathbb{R} \ni t \to f(t) \in X$ *— непрерывная ограниченная (T-периодическая, почти-периодическая) функция такая, что* $f(t) = \sum f_\nu(t)$, *где каждая* $f_\nu\colon \mathbb{R} \ni t \to f_\nu(t) \in D_A^\nu(X)$ *— непрерывная ограниченная (T-периодическая, почти-периодическая) функция, и пусть спектр* $\sigma(A)$ *оператора* A *не пересекается с мнимой осью. Тогда уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(t)$$

имеет единственное ограниченное (T-периодическое, почти-периодическое) решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дубинский Ю. А. Пределы монотонных последовательностей банаховых пространств. Приложения//ДАН СССР. — 1980. — Т. 251, № 3. — С. 537—540.

[2] Трев Ж. Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. — М.: Мир. — 1965.

Белорусский государственный
университет им. В. И. Ленина

Поступило в Правление общества
12 марта 1985 г.