Я. В. РАДЫНО

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ОПЕРАТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В настоящей работе дано изложение функционального исчисления от операторов, заданных в банаховых пространствах и имеющих действительный спектр. Основным моментом является тот факт, что мы сможем вычислять не только гладкие функции от таких операторов, но и обобщенные. Таким образом, наши построения представляются новыми не только в банаховых пространствах, но и в гильбертовых для самосопряженных операторов. С теоретической точки зрения это исчисление является естественным расширением гомоморфизма исчисления с множества символов, являющихся гладкими функциями, на множество символов, являющихся обобщенными. На практике некоторые обобщенные функции (δ-функции) от конкретных операторов появляются в квантовой теории поля [1, 2].

В анализе оператор, дающий решение уравнения $Ax=0$, является на самом деле δ-функцией от оператора A. Обобщенная функция $\mathcal{P}\frac{1}{s}$ — «главное значение» от оператора A — дает решение уравнения $Ax=y$. Проблема деления в уравнениях с частными производными не что иное, как вычисление значения обобщенной функции («главное значение») от соответствующего оператора умножения на функцию, в частности на полином.

Главные моменты теории проиллюстрированы примерами. Основные результаты данной работы анонсированы в заметке [3, с. 121].

Обозначения и терминология. Пусть X и Y — отделимые локально выпуклые пространства. Тогда $\mathcal{L}(X; Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов с топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах из X. Пространство, сопряженное к X, обозначим X^*; если $x \in X$, $x^* \in X^*$, то значение функционала x^* на элементе x записываем в виде $\langle x, x^* \rangle$.

Через $\mathcal{E}(\mathbf{R})$, $S(\mathbf{R})$, $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ обозначаем классические пространства гладких функций, определенных на $\mathbf{R}$; $\mathcal{E}(\mathbf{R}; E)$, $S(\mathbf{R}; E)$, $\mathcal{D}(\mathbf{R}; E)$ — соответствующие пространства гладких функций со значением в локально выпуклом пространстве E [4].

Пространства скалярных и векторных обобщенных функций обозначаются $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$, $S'(\mathbf{R})$, $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ и $\mathcal{E}'(\mathbf{R}; E)=\mathcal{L}(\mathcal{E}(\mathbf{R}); E)$, $S'(\mathbf{R}; E)=\mathcal{L}(S(\mathbf{R}); E)$, $\mathcal{D}'(\mathbf{R}; E)=\mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbf{R}); E)$ соответственно [4, 5]. Ввиду ядерности пространств $\mathcal{E}(\mathbf{R})$, $S(\mathbf{R})$, $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ справедливы топологические равенства $\mathcal{E}'(\mathbf{R}; E)=\mathcal{E}'(\mathbf{R})\,\widehat{\otimes}\,E$, $S'(\mathbf{R}; E)=S'(\mathbf{R})\,\widehat{\otimes}\,E$ и $\mathcal{D}'(\mathbf{R}; E)=\mathcal{D}'(\mathbf{R})\,\widehat{\otimes}\,E$, где тензорные произведения наделены проективной либо индуктивной топологиями Гротендика [6].

Значение обобщенной функции T_t на основной функции $\varphi(t)$ будем записывать в виде $(T_t, \varphi(t))$.

Локально выпуклое пространство E называется пространством типа $(\mathcal{DF})$, если оно обладает фундаментальной последовательностью ограниченных множеств (локально выпуклое пространство, борнология которого обладает счетным базисом) и каждое сильно ограниченное множество в его сопряженном, являющееся объединением последовательности равностепенно непрерывных множеств, само равностепенно непрерывно [7]. Известно [7], что сильно сопряженное к метризуемому локально выпуклому пространству есть пространство типа $(\mathcal{DF})$.

Если $A: X \to X$ — замкнутый, вообще говоря, неограниченный оператор в банаховом пространстве X, то через $\sigma(A)$ будем обозначать его спектр, а через $R(\lambda; A)=(\lambda I-A)^{-1}$ при $\lambda \notin \sigma(A)$ — его резольвенту.

Если $D \subset \mathbf{C}$ — открытое множество, то через $\mathcal{O}(D)$ обозначим пространство числовых голоморфных в D функций. Аналогично $\mathcal{O}(D; E)$ — пространство голоморфных в D функций со значением в локально выпуклом пространстве E. По определению [8] пространство E-значных гиперфункций на $\mathbf{R}$ есть $\mathcal{B}(\mathbf{R}; E)=\mathcal{O}(\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}; E)/\mathcal{O}(\mathbf{C}; E)$. Другими словами, гиперфункция на $\mathbf{R}$ определяется голоморфной функцией в $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$ и две такие функции определяют одну гиперфункцию тогда и только тогда, когда их разность голоморфна в $\mathbf{C}$, т. е. если они имеют один и тот же скачок на $\mathbf{R}$.

Известно [9, 10], что $\mathcal{D}'(\mathbf{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbf{R})$, т. е. что всякая обобщенная функция является гиперфункцией. Например, распределение T с компактным носителем является скачком на $\mathbf{R}$ функции $\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\left(T_t, \frac{1}{t-z}\right)$, голоморфной в $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}$, в смысле распределений

$$(T, \varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{+\infty}[\psi(t+i\varepsilon)-\psi(t-i\varepsilon)]\varphi(t)\,dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}).$$

Аналогичное утверждение справедливо для векторнозначных распределений [12].

Основное содержание. Пусть $A : X \to X$ — замкнутый оператор в банаховом пространстве X, такой, что $\sigma(A) \subset \mathbf{R}$. Тогда на $\mathbf{R}$ задана $\mathscr{L}(X)$-значная гиперфункция $\tilde{R}(t; A)$, которая определяется резольвентой $\mathbf{C} \setminus \sigma(A) \ni \lambda \to R(\lambda; A) \in \mathscr{L}(X)$ оператора A. Как уже отмечено, гиперфункция может быть распределением, мерой или даже обычной гладкой функцией. В данном случае все зависит от предела

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} [R(t-i\varepsilon; A) - R(t+i\varepsilon; A)] = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\varepsilon}{\pi} R(t-i\varepsilon; A) R(t+i\varepsilon; A). \tag{1}$$

Существование этого предела в пространстве $\mathscr{D}'(\mathbf{R}; \mathscr{L}(X))$ зависит от оператора A. Точнее, если резольвента оператора A имеет подходящую оценку [11—13], то данный предел, который обозначим $\tilde{R}(t; A)$, существует в смысле обобщенных функций, т. е. для любых $x \in X$, $x^* \in X^*$ и любых $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbf{R})$

$$(\langle \tilde{R}(t; A)x, x^* \rangle, \varphi) = \\ = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \langle [R(t-i\varepsilon; A) - R(t+i\varepsilon; A)]x, x^* \rangle dt. \tag{2}$$

Известно [12, 13], что в этом случае

$$(\langle \tilde{R}(t; A)x, x^* \rangle, \varphi) = \langle \varphi(A)x, x^* \rangle. \tag{3}$$

Таким образом, формулу (2) запишем в виде

$$\langle \varphi(A)x, x^* \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \langle \tilde{R}(t; A)x, x^* \rangle dt \tag{4}$$

или

$$\varphi(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \tilde{R}(t; A) dt. \tag{5}$$

Если A — самосопряженный оператор, то $\tilde{R}(t; A)$ — спектральная мера [11, 12, 14], а формула (5) задает классическое функциональное исчисление.

Функции φ в формуле (5) назовем символами оператора $\varphi(A)$.

Итак, с каждым оператором A, спектр которого лежит на вещественной прямой $\mathbf{R}$, связана операторнозначная гиперфункция $\tilde{R}(t; A)$, являющаяся обобщенной функцией при некоторых дополнительных предположениях на оператор A [11—13] (распределением или ультрараспределением). Эти предположения всегда будем предполагать выполненными. Тогда с каждым таким оператором связано функциональное исчисление, определяемое формулой (5) для гладких символов.

Наша цель — расширить класс символов в операторном исчислении (5) до обобщенных функций. Для этого мы поступим следующим образом.

I. *Предположим, что имеются два локально выпуклых пространства $E \subset X$ и $F \subset X^*$ такие, что для всех $x \in E$ и $x^* \in F$ существует предел*

$$\langle \tilde{R}(t; A)x, x^* \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \langle [R(t-i\varepsilon; A) - R(t+i\varepsilon; A)]x, x^* \rangle \tag{6}$$

и при этих же x и x^* функция $t \to \langle \tilde{R}(t; A)x, x^* \rangle$ принадлежит $\mathscr{E}(\mathbf{R})$ либо $S(\mathbf{R})$, либо $\mathscr{D}(\mathbf{R})$.

II. *Предположим, что пространства E и F принадлежат одному из следующих типов: а) E и F — оба пространства типа $(\mathscr{F})$; б) E и F — оба бочечных пространства типа $(\mathscr{DF})$; в) либо E, либо F — ядерное пространство.*

В этом случае оператор $\bar{R}(t;\ A)$, определенный правой частью (6), принадлежит пространству $\mathscr{L}(E;\ F^*)$ [6, 7, 15].

Сказанное выше сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. *При выполнении предположений I и II для любой обобщенной функции $T\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ определена обобщенная функция $T_A\in\mathscr{D}'(\mathbf{R};\ \mathscr{L}(E;\ F^*))$ формулой*

$$\langle T_A(\varphi)x,\ x^*\rangle = (T_t,\ \varphi(t)\langle\bar{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle) \tag{7}$$

для любых $x\in E$, $x^*\in F$, $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$.

Итак, равенство (7) определяет функциональное исчисление

$$\Phi : \mathscr{D}'(\mathbf{R})\ni T\to T_A\in\mathscr{D}'(\mathbf{R};\ \mathscr{L}(E;\ F^*)). \tag{8}$$

Приведем свойства этого отображения в виде предложений.

Предложение 1. $(\Phi(1),\varphi)=1_A(\varphi)=\varphi(A)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\bar{R}(t;\ A)\,dt.$

Предложение 2. *Отображение Φ линейно.*

Предложение 3. *Если $T_t\in\mathscr{E}'(\mathbf{R})$, то, полагая в (7) $\varphi(t)\equiv 1\in\mathscr{E}(\mathbf{R})$, получим*

$$\langle T_A(1)x,\ x^*\rangle \overset{\text{def}}{=} \langle T_Ax,\ x^*\rangle = (T_t,\ \langle\bar{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle). \tag{9}$$

Полагая в формуле (9) $T_t=\varphi(t)\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$, получим $\varphi_A=\varphi(A)=1_A(\varphi)$.

Сложнее исследуются вопросы композиции: например, даже в простейшем случае когда φ, $\psi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$, то определены операторы $\varphi(A)$, $\psi(A)$ и $(\varphi\psi)(A)$, принадлежащие пространству $\mathscr{L}(E;\ F^*)$. Однако, вообще говоря, композиция $\varphi(A)\psi(A)$ или $\psi(A)\varphi(A)$ не имеет места. Из функционального исчисления хорошо известно [12], что операторы $\varphi(A)$ и $\psi(A)$ на самом деле принадлежат пространству $\mathscr{L}(X)$, и потому их композиция допустима и имеет место равенство $\varphi(A)\psi(A)=(\varphi\psi)(A)$.

Рассмотрим сейчас общий случай, т. е. $T\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$ и f, $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$. Тогда определены операторы $f(A)\in\mathscr{L}(X)\cap\mathscr{L}(E;\ F^*)$, $T_A(\varphi)\in\mathscr{L}(E;\ F^*)$ и $(fT)_A(\varphi)\in\mathscr{L}(E;\ F^*)$. Композиция $f(A)T_A(\varphi)$ или композиция $T_A(\varphi)f(A)$ не имеет, вообще говоря, места, причем оператор $T_A(\varphi)$ в принципе нельзя сделать действующим в X. Поэтому остается единственный способ: чтобы композиция $f(A)T_A(\varphi)$ была допустима и действовала в $\mathscr{L}(E;\ F^*)$, необходимо, чтобы $f(A)$ действовал в пространстве F^*, а чтобы была допустима композиция $T_A(\varphi)f(A)$, необходимо, чтобы $f(A)$ действовал в пространстве E. Предположим, что

III. *Пространство E инвариантно относительно оператора A и $A\in\mathscr{L}(E)$, а пространство F инвариантно относительно оператора $A^* : X^*\to X^*$ и $A^*\in\mathscr{L}(F)$. Для любой функции $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ определены операторы $\varphi(A) : X\to X$ и $\varphi(A^*)=\varphi(A)^*$.*

IV. *Для любых $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ имеет место $\varphi(A)\in\mathscr{L}(E)$ и $\varphi(A^*)\in\mathscr{L}(F)$.*

Если банахово пространство X рефлексивно, а $\bar{E}=X$ и $\bar{F}=X^*$, то будем иметь вложения вместе с топологиями

$$E\subset X\subset F',\quad F\subset X^*\subset E'. \tag{10}$$

Поскольку оператор $A^* : F\to F$ непрерывен (предположение III), то определен оператор $A^{*\prime} : F'\to F'$, причем $A^{*\prime}|_X=A$. Оператор $A^{*\prime}$ назовем слабым расширением оператора A и обозначим той же буквой A. Аналогично оператор $\varphi(A^*)' : F'\to F'$ называем слабым расширением оператора $\varphi(A)$ и обозначаем также $\varphi(A)$.

После таких соглашений композиции $f(A)T_A(\varphi)$ и $T_A(\varphi)f(A)$ приобретают смысл.

Установим простейшие свойства.

Предложение 4. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство, предположения I—IV и (10) имеют место. Тогда для $f\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ справедливо равенство*

$$f(A)\bar{R}(t;\ A)=f(t)\bar{R}(t;\ A). \tag{11}$$

Доказательство. Для любой $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ и любых $x\in X$, $x^*\in X^*$, согласно операторному исчислению, имеем

$$(\langle f(A)\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle,\ \varphi(t))=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\langle f(A)\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\langle\tilde{R}(t;\ A)x,\ f(A)^*x^*\rangle dt=\langle\varphi(A)x,\ f(A)^*x^*\rangle=$$

$$=\langle f(A)\varphi(A)x,\ x^*\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)f(t)\langle\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\langle f(t)\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle dt=(\langle f(t)\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle,\ \varphi(t)).$$

Следовательно, $f(A)\tilde{R}(t;\ A)=f(t)\tilde{R}(t;\ A)$ как обобщенные функции. Однако поскольку при $x\in E$ и $x^*\in F$ функции $\langle f(A)\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle$ и $\langle f(t)\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle$ непрерывны по t, то равенство (11) установлено.

Из равенства (11) вытекает равенство

$$f(A)\tilde{R}(t;\ A)=\tilde{R}(t;\ A)f(A). \tag{12}$$

Предложение 5. *При условиях предложения 4 для $T\in\mathscr{E}'(\mathbf{R})$ и $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ имеют место равенства*

$$T_A(\varphi)=T_A(1)\varphi(A)=\varphi(A)T_A(1). \tag{13}$$

Доказательство. Действительно,

$$\langle T_A(\varphi)x,\ x^*\rangle=(T_t,\ \varphi(t)\langle\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle)=(T_t,\ \langle\varphi(A)\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle)=$$
$$=(T_t,\ \langle\tilde{R}(t;\ A)\varphi(A)x,\ x^*\rangle)=\langle T_A(1)\varphi(A)x,\ x^*\rangle.$$

С другой стороны,

$$\langle T_A(\varphi)x,\ x^*\rangle=(T_t,\ \varphi(t)\langle\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle)=(T_t,\ \langle\varphi(A)\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle)=$$
$$=(T_t,\ \langle\tilde{R}(t;\ A)x,\ \varphi(A)'x^*\rangle)=\langle T_A(1)x,\ \varphi(A)'x^*\rangle=\langle\varphi(A)T_A(1)x,\ x^*\rangle.$$

Предложение 6. *При тех же предположениях для любых $T_t\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$, φ, $f\in\mathscr{D}(\mathbf{R})$ имеет место равенство*

$$T_A(\varphi)f(A)=(fT)_A(\varphi)=f(A)T_A(\varphi)=T_A(\varphi f). \tag{14}$$

Доказательство. В самом деле,

$$\langle T_A(\varphi)f(A)x,\ x^*\rangle=(T_t,\ \varphi(t)\langle\tilde{R}(t;\ A)f(A)x,\ x^*\rangle)=$$
$$=(T_t,\ \varphi(t)\langle f(A)\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle)=(T_t,\ \varphi(t)f(t)\langle\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle)=$$
$$=((fT)_t,\ \varphi(t)\langle\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle)=\langle(fT)_A(\varphi)x,\ x^*\rangle.$$

Отсюда $T_A(\varphi)f(A)=(fT)_A(\varphi)$. Поскольку

$$\langle T_A(\varphi)f(A)x,\ x^*\rangle=(T_t,\ \varphi(t)\langle\tilde{R}(t;\ A)f(A)x,\ x^*\rangle)=$$
$$=(T_t,\ \varphi(t)\langle f(A)\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle)=(T_t,\ \varphi(t)\langle\tilde{R}(t;\ A)x,\ f(A)'x^*\rangle)=$$
$$=\langle T_A(\varphi)x,\ f(A)'x^*\rangle=\langle f(A)T_A(\varphi)x,\ x^*\rangle,$$

то $T_A(\varphi)f(A)=f(A)T_A(\varphi)$. Аналогично $\langle T_A(\varphi)f(A)x,\ x^*\rangle=(T_t,\ \varphi(t)f(t)\times$ $\times\langle\tilde{R}(t;\ A)x,\ x^*\rangle)=\langle T_A(\varphi f)x,\ x^*\rangle$.

Таким образом, равенство (14) полностью проверено.

Замечание. Формула (14) справедлива для всех $f\in\mathscr{E}(\mathbf{R})$, при которых определен оператор $f(A)$. В частности, справедливо равенство

$A\delta_A(\varphi)=(t\delta_t)_A(\varphi)=0$ для любых φ. Это равенство для конкретных операторов имеется в [1, 2]. Оно и послужило отправной точкой всего рассмотрения.

Предложение 7. *При тех же предположениях пусть задан оператор $A: X\to X$, изоморфизм $F: X\to X$ и $T\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$. Тогда $T_{FAF^{-1}}=FT_AF^{-1}$.*

Доказательство. Обозначим $B=FAF^{-1}$. Тогда $\langle T_B(\varphi)x, x^*\rangle=(T_t, \varphi(t)\langle\tilde{R}(t; B)x, x^*\rangle)=(T_t, \varphi(t)\langle F\tilde{R}(t; A)F^{-1}x, x^*\rangle)=(T_t, \varphi(t)\langle\tilde{R}(t; A)F^{-1}x, F^*x^*\rangle)=\langle T_A(\varphi)F^{-1}x, F^*x^*\rangle=\langle FT_A(\varphi)F^{-1}x, x^*\rangle$, т. е. $T_B=FT_AF^{-1}$.

Наконец, рассмотрим формулу Сохоцкого

$$\frac{1}{t\pm i0}=\mathscr{P}\frac{1}{t}\mp i\pi\delta_t, \tag{15}$$

где $\mathscr{P}\frac{1}{t}$ — «главное значение», а $\left(\frac{1}{t\pm i0},\ \varphi(t)\right)=\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t\pm i\varepsilon}dt.$ Согласно построенному операторному исчислению, будем иметь «операторную» формулу Сохоцкого

$$\frac{1}{A\pm i0}=\mathscr{P}\frac{1}{A}\mp i\pi\delta_A, \tag{16}$$

которая представляет интерес, поскольку она дает все решения уравнения $Au=v$. В самом деле, так как $t\cdot\mathscr{P}\frac{1}{t}=1$, то, согласно операторному исчислению, $A\circ\mathscr{P}\frac{1}{A}=I$ и, следовательно, $A\circ\frac{1}{A\pm i0}=I$.

Примеры. Рассмотрим несколько примеров вычисления некоторых обобщенных функций от конкретных операторов.

1. Пусть $X=L_2(\mathbf{R})$, $A=-i\frac{d}{ds}$, $E=F=S(\mathbf{R})$. Тогда

$$R\left(\lambda;\ -i\frac{d}{ds}\right)x(s)=\begin{cases}-i\displaystyle\int_{-\infty}^{s}e^{i\lambda(s-\tau)}x(\tau)\,d\tau, & \operatorname{Im}\lambda>0,\\ i\displaystyle\int_{s}^{+\infty}e^{i\lambda(s-\tau)}x(\tau)\,d\tau, & \operatorname{Im}\lambda<0.\end{cases}$$

Если $x, y\in S(\mathbf{R})$, то

$$\left\langle\tilde{R}\left(t; -i\frac{d}{ds}\right)x(s), y(s)\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[R\left(t-i\varepsilon; -i\frac{d}{ds}\right)-\right.$$

$$\left.-R\left(t+i\varepsilon; -i\frac{d}{ds}\right)\right]x(s)y(s)\,ds=\lim_{\varepsilon\to0+}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{s}^{+\infty}e^{i(t-i\varepsilon)(s-\tau)}x(\tau)\,d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{s}e^{i(t+i\varepsilon)(s-\tau)}x(\tau)\,d\tau\right]y(s)\,ds=\frac{1}{2\pi}\hat{x}(t)\hat{y}(-t).$$

Отсюда $\tilde{R}\left(t; -i\frac{d}{ds}\right)x(s)=\hat{x}(t)e^{its}$, т. е. $\tilde{R}\left(t; -i\frac{d}{ds}\right)\in\mathscr{L}(S; S')$. Кроме того, при $x, y\in S(\mathbf{R})$ функция $t\to\left\langle\tilde{R}\left(t; -i\frac{d}{ds}\right)x(s), y(s)\right\rangle=\frac{1}{2\pi}\hat{x}(t)\hat{y}(-t)$ принадлежит $S(\mathbf{R})$. Поскольку $\delta_t\in S'(\mathbf{R})$, то

$$\langle \delta_{-i\frac{d}{ds}}(\varphi)x(s),\ y(s)\rangle = \frac{1}{2\pi}(\delta_t,\ \varphi(t)\hat{x}(t)\hat{y}(-t)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ \varphi(0)\,\hat{x}(0)\int_{-\infty}^{+\infty} y(s)\,ds = \left\langle \frac{1}{2\pi}\,\varphi(0)\,\hat{x}(0),\ y(s)\right\rangle .$$

Следовательно,

$$\delta_{-i\frac{d}{ds}}(\varphi)x(s) = \frac{1}{2\pi}\,\varphi(0)\,\hat{x}(0)\in S'(\mathbf{R}).$$

Таким образом, $\delta_{-i\frac{d}{ds}} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R};\ \mathcal{L}(S;\ S')) = \mathcal{D}'(\mathbf{R})\ \hat{\otimes}\ \mathcal{L}(S,\ S')$ и $\delta_{-i\frac{d}{ds}} = \delta_t \otimes \mathcal{A}$, где $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(S,\ S')$ действует по формуле $\mathcal{A}\,x(s) = \frac{1}{2\pi}\,\hat{x}(0)\cdot 1 \in S'(\mathbf{R})$ и является оператором ранга 1.

Замечание 1. Отметим, что ядро Шварца $K(t,\ s)\in S'(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ оператора $\mathcal{A}$ равно $\frac{1}{2\pi}$. В самом деле, $\mathcal{A}x(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\,x(s)\,ds.$

Замечание 2. Очевидно, что выполняется равенство $-i\,\frac{d}{ds}\times$ $\times\ \delta_{-i\frac{d}{ds}}(\varphi)x(s) = -i\,\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2\pi}\ \varphi(0)\ \hat{x}(0)\right) = 0$ для любых $\varphi,\ x\in S(\mathbf{R})$, т. е. обобщенные функции $\delta_{-i\frac{d}{ds}}(\varphi)\,x(s)\equiv\mathrm{const}\in S'(\mathbf{R})$ дают все решения уравнения $\frac{du}{ds} = 0$.

2. Пусть $X = L_2(\mathbf{R})$, $E = F = S(\mathbf{R})$ и $A = [s]$, т. е. $Ax(s) = sx(s)$. Тогда при $x,\ y\in S(\mathbf{R})$

$$\langle\tilde{R}(t;\ [s])x(s),\ y(s)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{t-i\varepsilon-s} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{t+i\varepsilon-s}\right]x(s)\,y(s)\,ds = x(t)\,y(t)\in S(\mathbf{R}).$$

Поэтому $\langle\delta_{[s]}(\varphi)x(s),\ y(s)\rangle = \langle\delta_t,\ \varphi(t)x(t)y(t)\rangle = \varphi(0)x(0)y(0) = \langle\varphi(0)x(0)\delta(s),\ y(s)\rangle$. Отсюда имеем, что $\delta_{[s]}(\varphi)x(s) = \varphi(0)x(0)\delta(s)$, т. е. $\delta_{[s]} = \delta_t\otimes\mathcal{B}$, где $\mathcal{B}\in\mathcal{L}(S,\ S')$ и $\mathcal{B}x(s) = x(0)\delta_s\in S'(\mathbf{R})$ — оператор ранга 1 с ядром Шварца $\delta_t\otimes\delta_s = \delta_{(t,\ s)}$.

Замечание 3. Если $F: S'\to S'$ — преобразование Фурье, то тогда $F\left(-i\frac{d}{ds}\right) = [s]$. Отметим также, что оператор $\mathcal{B}$ является образом Фурье оператора $\mathcal{A}$. Этот факт является следствием предложения 7.

Замечание 4. Легко видеть, что $[s]\delta_{[s]}(\varphi)x(s) = s\varphi(0)x(0)\delta_s = 0$, т. е. обобщенные функции $\delta_{[s]}x(s) = \mathrm{const}\cdot\delta_s$ дают все решения в $S'(\mathbf{R})$ уравнения $su(s) = 0$.

3. Пусть $X = L_2(\mathbf{R})$, $E = F = S(\mathbf{R})$, $A = -d^2/ds^2$. Тогда

$$R\left(\lambda;\ -\frac{d^2}{ds^2}\right)x(s) = -\frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\sqrt{-\lambda}\,|s-\tau|)\,x(\tau)\,d\tau,$$

$$\mathrm{Re}\sqrt{-\lambda} > 0.$$

Полагая $x, y \in S(\mathbf{R})$ и проводя вычисления, получим

$$\tilde{R}\left(t;\ -\frac{d^2}{ds^2}\right)x(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\sqrt{t}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\sqrt{t}\,|s-\tau|)\,x(\tau)\,d\tau, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\left\langle\tilde{R}\left(t;\ -\frac{d^2}{ds^2}\right)x(s),\ y(s)\right\rangle=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\sqrt{t}}\,[\hat{x}(\sqrt{t})\,\hat{y}(-\sqrt{t})+\hat{x}(-\sqrt{t})\,\hat{y}(\sqrt{t})], & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

Итак, если $x, y \in S(\mathbf{R})$, то функция $t \to \left\langle \tilde{R}\left(t;\ -\dfrac{d^2}{ds^2}\right)x(s),\ y(s)\right\rangle$ гладкая, за исключением $t=0$, и принадлежит $S(\mathbf{R})$. Поэтому если $T_t \in S'(\mathbf{R})$ и $\operatorname{supp} T \cap \{0\}=\varnothing$, то можно определить $T_{-\frac{d^2}{ds^2}}$. Например, вычислим $\delta_{-1-\frac{d^2}{ds^2}}$. Для $x, y \in S(\mathbf{R})$ получаем

$$\left\langle\delta_{-1-\frac{d^2}{ds^2}}(\varphi)\,x(s),\ y(s)\right\rangle=\left(\delta_{-1+t},\ \varphi(t)\left\langle\tilde{R}\left(t;\ -\frac{d^2}{ds^2}\right)x(s),\ y(s)\right\rangle\right)=$$

$$=\left\langle\frac{\varphi(1)}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(s-\tau)\,x(\tau)\,d\tau,\ \ y(s)\right\rangle.$$

Следовательно,

$$\delta_{-1-\frac{d^2}{ds^2}}(\varphi)\,x(s)=\varphi(1)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(s-\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

или $\delta_{-1-\frac{d^2}{ds^2}}=\delta_{-1+t}\otimes K$, где $K\in\mathscr{L}(S,\ S')$ и

$$Kx(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(s-\tau)\,x(\tau)\,d\tau=c_1(x)\cos s+c_2(x)\sin s.$$

Замечание 5. Легко видеть, что обобщенная функция $\delta_{-1-\frac{d^2}{ds^2}}(\varphi)\,x(s)$ дает общее решение из $S'(\mathbf{R})$ уравнения $\dfrac{d^2u}{ds^2}+u=0$.

4. Если в предыдущем примере положить $E=S(\mathbf{R})$ и $F=\{y(t)\in S(\mathbf{R}):\hat{y}(0)=$ $=\hat{y}'(0)=0\}=\left\{y(t)\in S(\mathbf{R}):\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}y(s)\,ds=0,\ \int_{-\infty}^{+\infty}sy(s)\,ds=0\right\}$, то на этом подпространстве $F\subset S(\mathbf{R})$ обобщенная функция $\tilde{R}\left(0;\ -\dfrac{d^2}{ds^2}\right)x(s)\in S'(\mathbf{R})$ равна нулю. Таким образом [4, 9], $\tilde{R}\left(0;\ -\dfrac{d^2}{ds^2}\right)x(s)=c_1+c_2s$, где c_1 и c_2 — константы, зависящие от x. Следовательно, $\delta_{-\frac{d^2}{ds^2}}=\delta_t\otimes M$, где $M\in\mathscr{L}(S,\ S')$ и $Mx(s)=c_1+c_2s$.

5. Пусть $X=L_2(\mathbf{R})$, $E=F=S(\mathbf{R})$, $A=-i\dfrac{d}{ds}$. Вычислим обобщенную функцию $\mathscr{P}\dfrac{1}{-id/ds}$:

$$\left\langle \mathscr{P}\frac{1}{-id/ds}(\varphi)x(s),\ y(s)\right\rangle=\left(\mathscr{P}\frac{1}{t},\ \varphi(t)\frac{1}{2\pi}\hat{x}(t)\hat{y}(-t)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\hat{x}(t)\hat{y}(-t)}{t}\,dt.$$

Итак,

$$\mathscr{P}\frac{1}{-id/ds}(\varphi)x(s)=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\hat{x}(t)e^{its}}{t}\,dt.$$

Найдем теперь обобщенную функцию $1\Big/\left(-i\dfrac{d}{ds}+i0\right)$:

$$\left\langle \frac{1}{-id/ds+i0}(\varphi)x(s),\ y(s)\right\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{1}{t+i\varepsilon},\ \varphi(t)\right.$$

$$\left.\left\langle \tilde{R}\left(t;\ -i\frac{d}{ds}\right)x(s),\ y(s)\right\rangle\right)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)}{t+i\varepsilon}\times$$

$$\times\left\langle \tilde{R}\left(t;\ -i\frac{d}{ds}\right)x(s),\ y(s)\right\rangle dt=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0+}\left\langle R\left(-i\varepsilon;\ -i\frac{d}{ds}\right)\varphi\left(-i\frac{d}{ds}\right)x(s),\ y(s)\right\rangle=$$

$$=-\left\langle R\left(-i0;\ -i\frac{d}{ds}\right)\varphi\left(-i\frac{d}{ds}\right)x(s),\ y(s)\right\rangle.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{-id/ds\pm i0}(\varphi)x(s)=-R\left(\mp i0;\ -i\frac{d}{ds}\right)\varphi\left(-i\frac{d}{ds}\right)x(s).\qquad(17)$$

Полагая $\varphi(t)=1$, имеем

$$\frac{1}{-id/ds+i0}(1)x(s)=-i\int_{s}^{+\infty}x(\tau)\,d\tau,\qquad(18)$$

$$\frac{1}{-id/ds-i0}(1)x(s)=i\int_{-\infty}^{s}x(\tau)\,d\tau.\qquad(19)$$

Итак,

$$\delta_{-id/ds}(\varphi)x(s)=\frac{1}{2\pi}\varphi(0)\hat{x}(0),\qquad(20)$$

$$\mathscr{P}\frac{1}{-id/ds}(\varphi)x(s)=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\hat{x}(t)e^{its}}{t}\,dt.\qquad(21)$$

Формула (16), в частности, дает

$$-i\int_{s}^{+\infty}x(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{x}(t)e^{its}}{t}\,dt-i\pi\frac{1}{2\pi}\hat{x}(0),\qquad(22)$$

$$i\int_{-\infty}^{s}x(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{x}(t)e^{its}}{t}\,dt+i\pi\frac{1}{2\pi}\hat{x}(0).\qquad(23)$$

Равенство (22) эквивалентно равенству

$$\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,d\tau - i\int_{s}^{+\infty} x(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{x}(t)\,e^{its}}{t}\,dt$$

или

$$\frac{i}{2}\left[\int_{-\infty}^{s} x(\tau)\,d\tau - \int_{s}^{+\infty} x(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{x}(t)\,e^{its}}{t}\,dt,$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{sign}(s-\tau)\,x(\tau)\,d\tau = -\frac{i}{\pi}\,\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\hat{x}(t)\,e^{its}}{t}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[-\frac{i}{\pi}\,\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)\,e^{it(s-\tau)}}{t}\,dt\right]d\tau.$$

Последнее соотношение справедливо ввиду известного равенства

$$-\frac{i}{\pi}\,\mathrm{Vp}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it(s-\tau)}}{t}\,dt = \operatorname{sign}(s-\tau).$$

6. Пусть $X=L_2(\mathbf{R})$, $Ax(s)=a(s)x(s)$, где $a(s)$ — фиксированная вещественная функция. Предположим, что $a(s)$ имеет изолированные и простые нули, которые обозначим через s_k, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ Тогда, полагая $E=F=S(\mathbf{R})$, для $x, y\in S(\mathbf{R})$ будем иметь

$$\langle \tilde{R}(t;A)x(s), y(s)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{t-i\varepsilon-a(s)} - \frac{1}{t+i\varepsilon-a(s)}\right]x(s)\,y(s)\,ds. \tag{24}$$

Разбивая ось $\mathbf{R}$ точками α_n, $n=0, \pm1, \ldots$, так, что в интервале $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ функция монотонна, причем $s_k\in[\alpha_{n(k)}, \alpha_{n(k)+1}]$, и делая замену $\tau=a(s)$ в интеграле (24), получим

$$\langle \tilde{R}(t;A)x(s), y(s)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}}\left[\frac{1}{t-i\varepsilon-a(s)} - \frac{1}{t+i\varepsilon-a(s)}\right]x(s)\,y(s)\,ds = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_{a(\alpha_n)}^{a(\alpha_{n+1})}\left[\frac{1}{t-i\varepsilon-\tau} - \frac{1}{t+i\varepsilon-\tau}\right]\times$$

$$\times\frac{x(a^{-1}(\tau))\,y(a^{-1}(\tau))}{|a'(a^{-1}(\tau))|}\,d\tau = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n(t), \tag{25}$$

где

$$z_n(t) = \begin{cases}\dfrac{x(a^{-1}(t))\,y(a^{-1}(t))}{|a'(a^{-1}(t))|}, & t\in[a(\alpha_n),\ a(\alpha_{n+1})],\\ 0, & t\notin[a(\alpha_n),\ a(\alpha_{n+1})],\end{cases} \tag{26}$$

[9, с. 108]. Отсюда имеем

$$\langle\delta_{a(s)}(\varphi)x(s),\, y(s)\rangle=\left\langle\, \delta_t,\, \varphi(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_n(t)\,\right\rangle=$$

$$=\varphi(0)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{x(s_k)y(s_k)}{|a'(s_k)|}=\varphi(0)\left\langle\,\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{x(s_k)}{|a'(s_k)|}\delta(s-s_k),\, y(s)\,\right\rangle.$$

Следовательно, $\delta_{a(s)}(\varphi)x(s)=\varphi(0)\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{x(s_k)}{|a'(s_k)|}\delta(s-s_k)$ или $\delta_{a(s)}=$ $=\delta_t\otimes H$, где $H\in\mathscr{L}(S, S')$ и

$$Hx(s)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{x(s_k)}{|a'(s_k)|}\delta(s-s_k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\delta(s-s_k). \tag{27}$$

В частном случае, когда $a(s)=\sin s$, имеем

$$\delta_{\sin s}(1)x(s)=\delta_{\sin s}x(s)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k\pi)\delta(s-k\pi). \tag{28}$$

Если $a(s)=s^2-m^2$, то

$$\delta_{s^2-m^2}(1)x(s)=\delta_{s^2-m^2}x(s)=\frac{1}{2m}\left[x(m)\delta(s-m)+x(-m)\delta(s+m)\right]. \tag{29}$$

Замечание 6. Легко видеть, что формула (28) дает все решения в $S'(\mathbf{R})$ уравнения $\sin s\cdot y(s)=0$, когда $x(s)$ пробегает $S(\mathbf{R})$, а формула (29) — все решения в $S'(\mathbf{R})$ уравнения $(s^2-m^2)y(s)=0$, когда $x(s)$ пробегает $S(\mathbf{R})$.

Замечание 7. Формулы (28) и (29) хорошо согласуются с соответствующими формулами из [2, с. 53; 16, с. 35].

Выражаю искреннюю признательность Ю. А. Дубинскому и Л. Д. Кудрявцеву за постоянный интерес к работе, А. А. Дезину за консультации, А. Б. Антоневичу, П. П. Забрейко, В. В. Жаринову за обсуждение результатов.

Литература

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1976.—480 с.
2. Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Тодоров И. Т. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля.— М.: Наука, 1969.—424 с.
3. Радыно Я. В.— IX Школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тез. докл. Тернополь, 1984.—160 с.
4. Schwartz L. Théorie des distributions.— Paris: Hermann, 1973.— 420 p.
5. Schwartz L.— Ann. Inst. Fourier, 1957, vol. 7, p. 1—141; 1958, vol. 8, p. 1—209.
6. Grothendieck A.— Mem. Amer. Math. Soc., 1955, vol. 16, N 11, p. 1—140.
7. Гротендик А.— Математика, 1958, т. 2, № 3, с. 81—127.
8. Hyperfunctions and Theoretical Physics: Lecture Notes in Mathematics, 449.— Berlin—Heidelberg—New York: Springer—Verlag, 1973.— 220 p.
9. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье.— М.: Мир, 1968.—286 с.
10. Шапира П. Теория гиперфункций.— М.: Мир, 1972.— 144 с.
11. Tillmann H. G.— Bull. Amer. Math. Soc., 1963, vol. 69, p. 67—71.
12. Tillmann H. G.— Math. Ann., 1963, Bd 151, S. 424—430.
13. Ciorănescu I., Zsidó L. Banach Center. Spectral Theory.— Warszawa: PCP, 1982, vol. 8, p. 77—220.
14. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Спектральная теория.— М.: Мир, 1966, т. 2.—1064 с.
15. Шефер Х. Топологические векторные пространства.— М.: Мир, 1971.— 360 с.
16. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.—280 с.

Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина

Поступила в редакцию 25 сентября 1984 г.