УДК 512.543.76

*В.В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ*

# О РАЗЛОЖИМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ГРУПП

(Представлено академиком И.В. Гайшуном)

Будем говорить, что группа $G$ разложима, если $G$ является нетривиальным свободным произведением с объединенной подгруппой, т.е. $G = G_1 *_A G_2$, где $G_1 \neq A \neq G_2$ (см. [1]).

В предлагаемой работе мы исследуем проблему разложимости *обобщенных треугольных групп*, т.е. групп $G$, имеющих копредставление вида

$$G = \langle a, b \mid a^m = b^n = R^l(a, b) = 1 \rangle,$$

где $l \geq 2$ и $R(a, b)$ — циклически редуцированное слово в свободной группе, порожденной $a$, $b$. Не все из этих групп разложимы. Например, Цишанг [2] доказал, что *обычная треугольная группа* $T(m, n, l) = \langle a, b \mid a^m = b^n = (ab)^l = 1 \rangle$, где $m, n, l \geq 2$, не разложима. С другой стороны, в [3] показано, что группа $G = \langle a, b \mid a^{2m} = R^l(a, b) = 1 \rangle$, где $m = 0$ или $m \geq 1$, $l \geq 2$, является свободным произведением с объединенной подгруппой. В предлагаемой работе мы рассматриваем случай, когда обе образующие $a$ и $b$ имеют конечный порядок. Справедлива

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\Gamma_n = \langle a, b \mid a^n = b^k = R^m(a, b) = 1 \rangle$, *где* $n, k, m \in \mathbb{Z}$, $n, k, m \geq 2$, *и* $R(a, b) = a^{u_1} b^{v_1} \dots a^{u_s} b^{v_s}$, $s \geq 1$, *— циклически редуцированное слово в свободном произведении* $\langle a \rangle * \langle b \rangle$. *Предположим, что найдется такое* $i \in \{1, \dots, s\}$, *что* $|u_i| \geq 2$ *и* $n = u_i p f$, *где* $p$ *— такое простое число, что* $u_i p$ *не делит* $u_j$ *для* $j \neq i$, $f \in \mathbb{Z}$. *Тогда в следующих случаях группа* $\Gamma_n$ *разложима.*

1) $m = 2$, $p$ *не принадлежит некоторому конечному множеству простых чисел* $S$, *которое полностью определяется показателем* $k$ *и словом* $R$.

2) $m = 3$ *или* $m = 2^l > 3$, $p \neq 2$.

3) $m > 3$ *и* $m \neq 2^l$.

Ниже мы будем обозначать кольцо целых алгебраических чисел в $\mathbb{C}$ через $\mathcal{O}$, группу обратимых элементов в $\mathcal{O}$ через $\mathcal{O}^*$.

Л е м м а 1. *Пусть* $2 < m \in \mathbb{Z}$ *и* $\pm E \neq X \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. *Тогда* $X^m = E$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{tr} X = 2 \cos \frac{2r\pi}{m}$ *для некоторого* $r \in \{1, \dots, m-1\}$.

Для произвольного элемента $w = w(g, h) \in F_2$ рассмотрим следующую регулярную функцию:

$$\tau_w : \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, \qquad \tau_w(A, B) = \operatorname{tr}(w(A, B)).$$

В [4] доказано, что для произвольного $w \in F_2$ мы имеем $\tau_w = Q_w(\tau_g, \tau_h, \tau_{gh})$, где $Q_w \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ — многочлен с целыми коэффициентами. Функцию $\tau_w$ обычно называют характером Фрике, а многочлен $Q_w$ — многочленом Фрике элемента $w \in F_2$ (см. [4,5]).

Лемма 2. *Для произвольных $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ существуют матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что $\tau_g(A,B) = \operatorname{tr} A = \alpha, \quad \tau_h(A,B) = \operatorname{tr} B = \beta, \quad \tau_{gh}(A,B) = \operatorname{tr} AB = \gamma$.*

Эту лемму нетрудно доказать непосредственным вычислением. В частности, из леммы следует, что характеры Фрике $\tau_g$, $\tau_h$, $\tau_{gh}$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$ и, следовательно, многочлен Фрике $Q_w$ элемента $w$ определен однозначно. Далее, нам нужна более детальная информация о многочленах Фрике (см. [6]). Рассмотрим многочлены $P_n(\lambda)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(\lambda) = 0$, $P_0(\lambda) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda)$. Если $n < 0$, положим $P_n(\lambda) = -P_{|n|-2}(\lambda)$. Индукцией по $n$ легко проверить, что

$$P_n(2\cos(\varphi)) = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin(\varphi)}. \tag{1}$$

Из (1) следует, что многочлен $P_n(\lambda)$, $n \geq 1$, имеет $n$ нулей, определенных формулой

$$\lambda_{n,k} = 2\cos(\tfrac{k\pi}{n+1}), \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Кроме того, по индукции легко проверить, что при $n > 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} P_{2n}(\lambda) &= \lambda^{2n} + \cdots + (-1)^n \\ P_{2n-1}(\lambda) &= \lambda(\lambda^{2n-2} + \cdots + (-1)^{n-1} n) \end{aligned} \tag{3}$$

Далее, пусть $w = g^{\alpha_1} h^{\beta_1} \ldots g^{\alpha_s} h^{\beta_s}$ — циклически редуцированное слово в $F_2$ и пусть $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$. Рассмотрим многочлен Фрике $Q_w(x,y,z)$ как многочлен от $z$. Пусть

$$Q_w(x,y,z) = M_n(x,y) z^n + M_{n-1}(x,y) z^{n-1} + \ldots + M_0(x,y).$$

Лемма 3. (см. [6] *) Степень многочлена Фрике $Q_w(x,y,z)$ относительно $z$ равна $s$ и*

$$M_s(x,y) = \prod_{i=1}^{s} P_{\alpha_i - 1}(x) P_{\beta_i - 1}(y). \tag{4}$$

Следующая лемма играет важную роль в доказательстве теоремы 1.

Лемма 4. *Пусть $\Gamma = \langle a, b \mid a^n = b^k = R^m(a,b) = 1 \rangle$, где $n, k, m \geq 2$ и $R(a,b)$ — циклически редуцированное содержащее $b$ слово. Предположим, что существуют такие матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, что $\operatorname{tr} A = \alpha = 2\cos(t\pi/n)$, $\operatorname{tr} B = \beta = 2\cos(l\pi/k)$ для некоторых $t \in \{1, \ldots, n-1\}$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$, $\operatorname{tr} AB = z_0 \notin \mathcal{O}$ и $\operatorname{tr} R(A,B) = Q_R(\alpha, \beta, z_0) = c$, где $Q_R$ — многочлен Фрике слова $R(a,b)$, $c = 2\cos(r\pi/m)$ для некоторого $r \in \{1, \ldots, m-1\}$. Тогда группа $\Gamma$ разложима.*

Доказательство. В [7] показано, что если $H \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ — конечно порожденная подгруппа, то имеет место один из следующих случаев: 1) Существует эпиморфизм $f : H \to \mathbb{Z}$ такой, что $f(u) = 0$ для всех унипотентных элементов $u \in H$; 2) $\operatorname{tr} h \in \mathcal{O}$ для любого элемента $h \in H$; 3) $H$ является нетривиальным свободным произведением с объединенной подгруппой. Легко видеть, что группа $H = < A, B >$ не удовлетворяет случаям 1), 2). Следовательно, $H$ разложима. Тогда образ $\overline{H}$ группы $H$ в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ также разложим. Кроме того, $\overline{H}$ является эпиморфным образом $\Gamma$, поэтому $\Gamma$ разложима.

Лемма 5. 1) *Пусть* $0 \neq u \in \mathbb{Z}$, $p$ *— некоторое простое число и* $\varepsilon$ *— примитивный корень из 1 степени* $4pu$. *Положим* $x_r = 2\cos(r\pi/(2pu))$, $K = \mathbb{Q}(\varepsilon)$. *Тогда существует* $r \not\equiv 0 \pmod p$ *такие, что* $p$ *делит* $N_{K/\mathbb{Q}}(x_r)$. *В частности,* $x_r \notin \mathcal{O}^*$.

2) *Пусть* $u, c \in \mathbb{Z}$, $|u| \geq 2$, $c \neq 0$, *и пусть* $p$ *— простое число, не делящее* $c$. *Положим* $x_0 = -2\cos(\pi/u)$, $x_r = 2\cos(r\pi/(pu))$. *Тогда существует* $r \not\equiv 0 \pmod p$ *такое, что* $c/(x_r - x_0) \notin \mathcal{O}$.

Доказательство теоремы 1. 1) Пусть $\Gamma_n = \langle a, b \mid a^n = b^k = R^2(a,b) = 1\rangle$ и пусть $F_2 = \langle g, h\rangle$ — свободная группа с образующими $g$ и $h$. Положим $x = \tau_g$, $\beta = \tau_h = 2\cos(\pi/k)$, $z = \tau_{gh}$. Рассмотрим уравнение

$$Q_{R(g,h)}(x, \beta, z) = 0, \tag{5}$$

где $Q_{R(g,h)}$ — многочлен Фрике элемента $R(g,h) \in F_2$. В силу леммы 3, (5) имеет вид

$$A_0(x)z^s + \cdots + A_s(x) = 0, \tag{6}$$

где $A_0(x) = \prod_{i=1}^{s} P_{u_i-1}(x)P_{v_i-1}(\beta)$. Так как по условию найдется такое $i$, что $|u_i| \geq 2$, то $\deg P_{u_i-1}(x) \geq 1$. Пусть $x_0 = -2\cos(\pi/u_i)$ — один из корней $P_{u_i-1}(x)$. Тогда $x - x_0$ делит $A_0(x)$. Пусть $A_0(x) = (x - x_0)B_0(x)$, где $B_0(x) \in \mathcal{O}[x]$. Запишем (6) в виде

$$(x - x_0)B_0(x)z^s + \cdots + A_s(x) = 0. \tag{7}$$

Предположим вначале, что все многочлены $A_1(x), \ldots, A_s(x)$ делятся на $x - x_0$. Тогда (7) можно записать в виде

$$(x - x_0)f(x, z) = 0, \tag{8}$$

где $f(x,z)$ — некоторый многочлен от $x, z$. Пусть $z_0$ — произвольный элемент $\mathbb{C}$ такой, что $z_0 \notin \mathcal{O}$, и пусть $A, B$ — такие матрицы из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, что $\operatorname{tr} A = x_0$, $\operatorname{tr} B = \beta$, $\operatorname{tr} AB = z_0$. Пара матриц $(A, B)$ определяет, по построению, представление группы $\Gamma_n$ в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Применяя лемму 4, получаем, что $\Gamma_n$ разложима.

Предположим теперь, что не все многочлены $A_1(x), \ldots, A_s(x)$ делятся на $x - x_0$. Пусть, например, $A_1(x)$ не делится на $x - x_0$ и пусть $0 \neq \delta = A_1(x_0) \in \mathcal{O}$. Положим $c = N_{\mathbb{Q}(\delta)/\mathbb{Q}}(\delta) \in \mathbb{Z}$, $S = \{p \in \mathbb{Z} \mid p \text{ делит } c\}$. Предположим, что $n = u_i p f$ для некоторого целого $f$ и простого числа $p \notin S$ такого, что $u_i p \nmid u_j$ при $j \neq i$. Пусть $x_r = 2\cos(r\pi/(pu_i))$ для некоторого $r \not\equiv 0 \pmod p$ и пусть $K_r = \mathbb{Q}(\delta, x_r - x_0)$. В силу пункта 1) леммы 5 мы можем выбрать $r$ так, что $p$ делит $N_{K_r/\mathbb{Q}}(x_r - x_0)$ и, по построению, $p$ не делит $c$. Тогда $N_{K_r/\mathbb{Q}}(\delta/(x_r - x_0)) \notin \mathbb{Z}$, следовательно, $\delta/(x_r - x_0) \notin \mathcal{O}$. Таким образом, $A_1(x_r)/(x_r - x_0) \notin \mathcal{O}$. Легко видеть, что $B_O(x_r) \neq 0$. Положим $x = x_r$ и запишем (7) в виде:

$$z^s + \tfrac{A_1(x_r)}{(x_r - x_0)B_0(x_r)} z^{s-1} + \cdots + \tfrac{A_s(x_r)}{(x_r - x_0)B_0(x_r)} = 0 \tag{9}$$

Ясно, что $A_1(x_r)/((x_r - x_0)B_0(x_r)) \notin \mathcal{O}$, поскольку $B_0(x_r) \in \mathcal{O}$. Следовательно, (9) имеет корень $z_0 \notin \mathcal{O}$. Рассмотрим матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = x_r$, $\operatorname{tr} B = \beta$, $\operatorname{tr} AB = z_0$. По построению, пара матриц $(A, B)$ определяет представление группы $\Gamma_n$ в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Применив лемму 4, получаем, что группа $\Gamma_n$ разложима.

2) Сохраним обозначения пункта 1). Рассмотрим уравнение

$$Q_{R(g,h)}(x, \beta, z) = \gamma_t, \tag{10}$$

где $\gamma_t = 2\cos(t\pi/m)$, $m \nmid t$. Используя лемму 3, можно записать (10) в виде

$$(x - x_0)B_0(x)z^s + \cdots + A_s(x) - \gamma_t = 0. \tag{11}$$

Пусть $x_r = 2\cos(r\pi/(pu_i))$, где $r \not\equiv 0 \pmod p$. Покажем, что найдутся $t$ и $r$ такие, что $(A_s(x_r) - \gamma_t)/(x_r - x_0) \notin \mathcal{O}$. В самом деле, допустим противное.

Если $m = 3$, то $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1$. Так как $(A_s(x_r)-1)/(x_r-x_0), (A_s(x_r)+1)/(x_r-x_0) \in \mathcal{O}$, то $2/(x_r-x_0) \in \mathcal{O}$ для любого $r \not\equiv 0 \pmod p$. Если $m = 2^l$, тогда $\gamma_{2^{l-1}} = 0$, $\gamma_{2^{l-2}} = \sqrt{2}$. Поскольку $A_s(x_r)/(x_r - x_0), (A_s(x_r) - \sqrt{2})/(x_r - x_0) \in \mathcal{O}$, то $\sqrt{2}/(x_r - x_0) \in \mathcal{O}$. В обоих случаях получаем противоречие с пунктом 2) леммы 5.

Итак, выберем $t$ и $r$ так, чтобы $(A_s(x_r) - \gamma_t)/(x_r - x_0) \notin \mathcal{O}$. Так как $p \nmid r$ и $pu_i \nmid u_j$ для любого $j \neq i$, то $B_0(x_r) \neq 0$. Положим $x = x_r$ и запишем (11) в виде:

$$z^s + \cdots + \tfrac{A_s(x_r)-\gamma_t}{(x_r-x_0)B_0(x_r)} = 0. \tag{12}$$

По построению, $(A_s(x_r) - \gamma_t))/((x_r - x_0)B_0(x_r)) \notin \mathcal{O}$, следовательно, (12) имеет корень $z_0 \notin \mathcal{O}$. Рассмотрим матрицы $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = x_r$, $\operatorname{tr} B = \beta$, $\operatorname{tr} AB = z_0$. По построению, пара матриц $(A, B)$ определяет представление группы $\Gamma_n$ в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Применив лемму 4, получаем, что группа $\Gamma_n$ разложима.

3) Пусть $m > 3$ и $m \neq 2^l$. Сохраним обозначения пункта 2). Покажем, что найдутся такие $t \not\equiv 0 \pmod m$ и $r \not\equiv 0 \pmod p$, что $(A_s(x_r) - \gamma_t)/(x_r - x_0) \notin \mathcal{O}$. В самом деле, допустим противное. Пусть для любых $t \not\equiv 0 \pmod m$ и $r \not\equiv 0 \pmod p$ мы имеем $(A_s(x_r) - \gamma_t)/(x_r - x_0) \in \mathcal{O}$.

Вначале рассмотрим случай, когда $m$ нечетно и $m$ делится на число вида $4g + 1$, $g \geq 1$, т.е. $m = (4g + 1)m_1$. Рассмотрим числа $\delta_t = \gamma_{2tm_1} = 2\cos(2t\pi/(4g + 1))$, $t = 1, \ldots, 2g$. Тогда $1 + \sum_{i=1}^{2g} \delta_i = 0$ как сумма всех корней из 1 степени $4g + 1$. Отметим, что $-\delta_t = \gamma_{(4g+1-2t)m_1}$. Пусть $C_i = (A_s(x_r) - (-1)^i\delta_i)/(x_r - x_0)$. Тогда мы имеем

$$\sum_{i=1}^{2g} (-1)^i C_i = -\sum_{i=1}^{2g} \frac{\delta_i}{x_r - x_0} = \frac{1}{x_r - x_0} \in \mathcal{O}$$

для любого $r \not\equiv 0 \pmod p$ — противоречие с пунктом 2) леммы 5.

Предположим теперь, что $m$ нечетно и $m$ не имеет делителей вида $4g + 1$, $g \geq 1$. Тогда $m = 4g + 3$, $g \geq 1$. Мы имеем $1 + \sum_{i=1}^{2g+1} \gamma_{2i} = 0$ как сумма всех корней из 1 степени $4g+3$. Положим $C_0 = (A_s(x_r)+\gamma_1)/(x_r-x_0)$, $C_i = (A_s(x_r)-(-1)^i\gamma_{2i})/(x_r-x_0)$ для $i = 1, \ldots, 2g + 1$. Тогда

$$C_0 + \sum_{i=1}^{2g+1} (-1)^i C_i = \frac{\gamma_1 - 1}{x_r - x_0} \in \mathcal{O}. \tag{13}$$

Покажем, что $\gamma_1 - 1 \in \mathcal{O}^*$. Так как $\gamma_1$ является корнем многочлена $P_{4g+2}(\lambda)$, то $\gamma_1 - 1$ — корень многочлена $P_{4g+2}(\lambda + 1)$. Свободный коэффициент многочлена $P_{4g+2}(\lambda + 1)$ равен

$$P_{4g+2}(1) = P_{4g+2}(2\cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{\sin((4g + 3)\pi/3)}{\sin(\pi/3)} \in \{-1, 1, 0\}.$$

Заметим, что $P_{4g+2}(1) = 0$ тогда и только тогда, когда 3 делит $4g + 3$, т.е. 3 делит $g$. Пусть $g = 3g_1$. Тогда $4g + 3 = 12g_1 + 3 = 3(4g_1 + 1)$, т.е. $4g_1 + 1$ делит $m$. Это противоречит нашему предположению. Следовательно, $P_{4g+2}(1) = \pm 1$ и $\gamma_1 - 1 \in \mathcal{O}^*$.

Тогда из (13) следует, что для любого $r \not\equiv 0 \pmod p$ имеем $1/(x_r - x_0) \in \mathcal{O}$. Мы снова получили противоречие с пунктом 2) леммы 5.

Наконец, рассмотрим случай, когда $m$ четно, т.е. $m = m_1 2^g$, где $g \geq 1$, $m_1 > 1$ — нечетно. Рассмотрим числа $\gamma_{i2^g} = 2\cos(i\pi/m_1)$. Теперь, рассуждая точно также, как и в случае нечетного $m$ выше, мы получаем противоречие с пунктом 2) леммы 5.

Итак, выберем $t$ и $r$ так, что $(A_s(x_r) - \gamma_t)/(x_r - x_0) \notin \mathcal{O}$. Тогда свободный коэффициент в уравнении (12) не принадлежит $\mathcal{O}$ и уравнение (12) имеет корень $z_0 \notin \mathcal{O}$. Пусть $A, B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ такие матрицы, что $\operatorname{tr} A = x_r$, $\operatorname{tr} B = \beta$, $\operatorname{tr} AB = z_0$. Пара матриц $(A, B)$ определяет, по построению, представление $\Gamma_n$ в $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$. Применив лемму 4, завершаем доказательство теоремы 1.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках государственной программы фундаментальных исследований "Математические структуры".

## Литература


1. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
2. Zieschang H. // Math. Zeit. 1976. V. 151. P. 165–188.
3. Беняш-Кривец В. В. // Матем. сборник. 1998. Т. 189, № 8. С. 13–26.
4. Horowitz R. // Comm. Pure. Appl. Math. 1972. V. 25. P. 635–649.
5. Culler M., Shalen P. // Ann. of Math. 1983. V. 117. P. 109–147.
6. Traina C. // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 79. P. 369–372.
7. Bass H. // The Smith Conjecture. New York: Wiley, 1984. P. 127–136.



Институт математики
НАН Беларуси



Поступило

УДК 512.543.76

Беняш-Кривец В.В. О разложимости обобщенных треугольных групп. // Доклады Национальной академии наук Беларуси.

В работе исследуется проблема разложимости в нетривиальное свободное произведение с объединенной подгруппой для обобщенных треугольных групп, имеющих образующие конечного порядка. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть $\Gamma_n = \langle a, b \mid a^n = b^k = R^m(a,b) = 1\rangle$, где $n, k, m \in \mathbb{Z}$, $n, k, m \geq 2$, и $R(a,b) = a^{u_1}b^{v_1}\dots a^{u_s}b^{v_s}$, $s \geq 1$, — циклически редуцированное слово в свободном произведении $\langle a\rangle * \langle b\rangle$. Предположим, что найдется такое $i \in \{1,\dots,s\}$, что $|u_i| \geq 2$ и $n = u_i p f$, где $p$ — такое простое число, что $u_i p$ не делит $u_j$ для $j \neq i$, $f \in \mathbb{Z}$. Тогда в следующих случаях группа $\Gamma_n$ разложима.

1) $m = 2$, $p$ не принадлежит некоторому конечному множеству простых чисел $S$, которое полностью определяется показателем $k$ и словом $R$.

2) $m = 3$ или $m = 2^l > 3$, $p \neq 2$.

3) $m > 3$ и $m \neq 2^l$.

Библиогр. — 7 назв.

Benyash-Krivets V.V. On decomposing generalized triangle groups. // Dokl. Acad.Sci. Belarus.

The problem of decomposing of generalized triangle groups having generators of finite order into non-trivial free products with amalgamation is studied in this paper. The following theorem is proved.

Theorem. let $\Gamma_n = \langle a, b \mid a^n = b^k = R^m(a,b) = 1\rangle$, where $n, k, m \in \mathbb{Z}$, $n, k, m \geq 2$, and $R(a,b) = a^{u_1}b^{v_1}\dots a^{u_s}b^{v_s}$, $s \geq 1$, is a cyclically reduced word in the free product $\langle a\rangle * \langle b\rangle$. Suppose that there exists $i \in \{1,\dots,s\}$ such that $|u_i| \geq 2$ и $n = u_i p f$, where $p$ is a prime such that $u_i p$ does not divide $u_j$ for $j \neq i$ and $f \in \mathbb{Z}$. Then in the following cases the group $\Gamma_n$ is decomposable.

1) $m = 2$, $p$ does not belong to a finite set of primes $S$, which is completely determined by the exponent $k$ and the word $R$.

2) $m = 3$ or $m = 2^l > 3$ and $p \neq 2$.

3) $m > 3$ and $m \neq 2^l$.

References — 7 items.

**Summary**

Найдены достаточные условия для того, чтобы обобщенная треугольная группа, имеющая образующие конечного порядка, являлась нетривиальным свободным произведением с объединенной подгруппой.

It is found sufficient conditions under which a generalized triangle group having generators of finite order is a non-trivial free product with amalgamation.

Benyash-Krivetz V.V.
On decomposing generalized triangle groups.

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела алгебры Института математики НАН Беларуси.

Домашний адрес: 220098 Минск, ул. Рафиева, д. 97, кв. 224.

Рабочий телефон: 284–17–78, домашний телефон: 274–73–36.