О. А. КАСТРИЦА

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОТКЛОНЕНИЯХ РЕШЕНИЙ ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{1}$$

система с кусочно-непрерывной на $[0, +\infty[$ матрицей $A(t)$ и $B(t) = [b_{ij}(t)]_{i,j=1,\ldots,n}$ — кусочно-непрерывная на $[0, +\infty[$ матрица с условием $\|B(t)\| \leqslant \alpha$; $\alpha > 0$ — фиксированная величина. Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) + B(t)]\,y. \tag{2}$$

Обозначим $x(t, \xi)$ и $y_B(t, \xi)$ решения систем (1) и (2) со значениями ξ при $t=0$ и $\Delta_B(t) = y_B(t, \xi) - x(t, \xi)$.

Задача. Найти $B_0(t)$, $\|B_0(t)\| \leqslant \alpha$, такую, что $\|\Delta_{B_0}(t)\| = \max\limits_{\|B(t)\| \leqslant \alpha} \|\Delta_B(t)\| + o(\alpha)$, $t \in [0, T]$, $T \in R^+$.

Для определенности считаем $B_0(t)$ непрерывной слева. Обозначим $e_k=(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 на k-м месте) и $B_{ij}=e_i^T e_j \varepsilon$, $\varepsilon \in R^+$.

Вектор $k_{ij}(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{y_{B_{ij}}(t,\xi)-x(t,\xi)}{\varepsilon}$ называется вектором чувствительности решения $x(t,\xi)$ системы (1) к возмущению ij-го элемента матрицы $A(t)$, $k_{ij}(t)=(k_{ij}^1(t), k_{ij}^2(t), \ldots, k_{ij}^n(t))^T$.

Будем считать систему (1) стационарной. Тогда решение $x(t,\xi)$ будет непрерывно дифференцируемой функцией t и элементов a_{ij} матрицы A, $i, j=1, \ldots, n$, поэтому $y_B(t,\xi)=x(t,\xi+\sum\limits_{i,j=1}^{n}\dfrac{\partial x(t,\xi)}{\partial a_{ij}}b_{ij}+o(\alpha)$.

Но для стационарной системы $\dfrac{\partial x(t,\xi)}{\partial a_{ij}}=k_{ij}(t)$, $\dfrac{\partial x_l(t,\xi)}{\partial a_{ij}}=k_{ij}^l(t)$. Значит, $\|\Delta_B(t)\|=\left|\sum\limits_{i,j=1}^{n}k_{ij}(t)b_{ij}\right|+o(\alpha)$.

Пусть $\|x\|=\max\limits_i|x_i|$. Тогда $\|\Delta_B(t)\|=\max\limits_{l=1,\ldots,n}\left|\sum\limits_{i,j=1}^{n}k_{ij}^l(t)b_{ij}\right|+o(\alpha)$.

а) Для нормы матрицы, определяемой формулой $\|A\|=\max\limits_{i,j=1,\ldots,n}|a_{ij}|$ максимальным отклонением решения будет $\max\limits_{\|B(t)\|\leqslant\alpha}\|\Delta_B(t)\|=\alpha\cdot\max\limits_{l=1,\ldots,n}\times$ $\times\sum\limits_{i,j=1}^{n}|k_{ij}^l(t)|+o(\alpha)$.

Чтобы построить матрицу $B_0(t)$, реализующую экстремальное отклонение, сравниваем величины $\mu_e=\sum\limits_{i,j=1}^{n}|k_{ij}^l(t)|$, $l=1, \ldots, n$. Если $\max\limits_{l=1,\ldots,n}\mu_l=\mu_p$, то матрицей $B_0(t)$ в каждый момент t будет $B_0(t)=$ $=\alpha\cdot\lim\limits_{s\to t-0}[\operatorname{sgn}k_{ij}^p(s)]_{i,j=1,\ldots,n}$. Это кусочно-постоянная матрица, меняющая значения в моменты, когда k_{ij}^p меняют знаки, и непрерывная слева.

в) Если норма матрицы определяется формулой $\|A\|=\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|$, то $\max\limits_{\|B(t)\|\leqslant\alpha}\|\Delta_B(t)\|=\alpha\cdot\max\limits_{l,i,j=1,\ldots,n}|k_{ij}^l(t)|+o(\alpha)$.

Предположим, что в момент t $\max|k_{ij}^l(t)|$ достигается при $(l, i, j)=$ $=(p, q, r)$. Тогда $B_0(t)=\alpha e_q^T e_r$. Это кусочно-непрерывная матрица. В моменты переключений считаем ее непрерывной слева.

Нахождение вектора чувствительности. Дифференцируя равенство $\dfrac{dx(t,\xi)}{dt}=Ax(t,\xi)$ по a_{ij} и меняя порядок дифференцирования по t и по a_{ij}, получим неоднородную линейную систему для определения $k_{ij}(t)$: $\dfrac{dk_{ij}}{dt}=Ak_{ij}+e_i^T e_j x(t,\xi)$. Откуда $k_{ij}(t)=e^{At}k_{ij}(0)+\int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}e_i^T e_j e^{A\tau}\xi d\tau$.

Поскольку $k_{ij}(0)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left.\dfrac{e^{(A+B_{ij})t}-e^{At}}{\varepsilon}\right|_{t=0}=0$, то $k_{ij}(t)=\int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}e_i^T e_j e^{A\tau}\xi d\tau$, $i, j=1, \ldots, n$.

Для нахождения векторов чувствительности можно использовать матрицы чувствительности K_{ij} фундаментальной матрицы $X(t)$, определенные в [1]. В самом деле, $x(t,\xi)=X(t)\xi$. Откуда $k_{ij}(t)=\dfrac{\partial X(t)\xi}{\partial a_{ij}}=$ $=K_{ij}\xi$. В случае $n=2$ матрицы K_{ij} вычислены в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кастрица О. А., Феденя М. М. О чувствительности и экстремальном возмущении фундаментальной матрицы.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1352-81. Деп. от 25.03.81.

Поступила в редакцию 01.07.81.

Кафедра высшей математики