О. А. КАСТРИЦА

О ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СПЕКТРА ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

Обозначим M — множество всех симметричных положительно определенных $n\times n$-матриц. Рассмотрим функционал φ: $M\to\mathbf{R}$, определенный следующим образом: $\varphi: A\in M\mapsto\varphi(A)=\frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$, где $\lambda_{\max}(A)$ и $\lambda_{\min}(A)$ — наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы A. Для асимптотически устойчивой n-мерной стационарной дифференциальной системы

$$\dot{x}=Px \tag{1}$$

уравнение

$$P^TA+AP=-C \tag{2}$$

при любой $C\in M$ определяет единственным образом матрицу $A\in M$, задающую функцию Ляпунова $v(x)=x^TAx$ ([1], с. 34). Значение $\varphi(A)$ используется для характеристики поведения решений системы (1) — построения оценок решений, области притяжения и др. (см., например, [2], с. 73). В настоящей работе изучается влияние малых возмущений на поведение $\varphi(A)$.

Пусть $\varepsilon>0$ и $\mathbf{B}$ — множество симметричных матриц B таких, что $\|B\|\leqslant\varepsilon$. Обозначим $\Delta\varphi_B(A)=\varphi(A+B)-\varphi(A)$.

Задача. Для заданной матрицы $A\in M$ найти матрицу $B_0\in\mathbf{B}$ такую, что $\Delta\varphi_{B_0}(A)=\max\limits_{B\in\mathbf{B}}\Delta\varphi_B(A)$.

Лемма. $\exists\ \varepsilon>0$ такое, что для $\forall\ B\in\mathbf{B}$ матрица $C_1=-(P^T(A+B)+$ $+(A+B)P)\in M$.

Действительно, для достаточно малого $\varepsilon>0$ собственные значения матрицы P^TB+BP близки к нулю и, следовательно, спектр матрицы C_1 близок к спектру матрицы C ([3], с. 103).

Спектром функции Ляпунова $v(x)=x^TAx$ будем называть множество собственных значений матрицы A.

В дальнейшем полагаем, что матрица A имеет собственные значения $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Обозначим S^i — матрицу чувствительности собственного значения λ_i. Ее элементами $s_{kl}^i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial a_{kl}}$ являются коэффициенты чувствительности собственного значения λ_i к изменению элемента a_{kl} матрицы A. Как известно ([4], с. 164), $S^i = v^i u^{iT}$, где u^i и v^i — собственные векторы матриц A и A^T соответственно, отвечающие собственному значению λ_i. При этом предполагается, что системы векторов $u^1, \ldots, u^n$ и $v^1, \ldots, v^n$ взаимно ортонормированы, т. е. $v^{iT} u^j = \delta_{ij}$ (символ Кронекера). Отсюда следует, что $s_{kl}^i = v_k^i u_l^i$. Поскольку в нашем случае матрица A симметрическая, то

$$s_{kl}^i = u_k^i u_l^i = s_{lk}^i, \; k, \; l = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение коэффициенты

$$c_{kl} = \frac{\partial}{\partial a_{kl}} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) \frac{s_{kl}^n \lambda_1 - s_{kl}^1 \lambda_n}{\lambda_1^2}, \; k, \; l = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\Delta \varphi_B(A) = \sum_{k, l=1}^{n} c_{kl} b_{kl} + o(\varepsilon). \tag{4}$$

Для нахождения коэффициентов c_{kl} используем (3). Получим $c_{kl} = \lambda_1^{-2} (u_k^n u_l^n \lambda_1 - u_k^1 u_l^1 \lambda_n)$, $k, \; l = 1, \ldots, n$. Поэтому

$$\Delta \varphi_B(A) = \lambda_1^{-2} \sum_{k, l=1}^{n} (u_k^n u_l^n \lambda_1 - u_k^1 u_l^1 \lambda_n) b_{kl} + o(\varepsilon). \tag{5}$$

Формула (5) дает возможность выбрать числа b_{kl}, $k, l=1, \ldots, n$, так, чтобы главная часть величины $\Delta\varphi_B(A)$ была максимальной. При этом существенным является способ задания нормы матрицы.

Пусть $\|B\| = \sum_{k, l=1}^{n} |b_{kl}|$. Сравним коэффициенты c_{kl}, $k, \; l = 1, \ldots, n$. Если $\max_{k, l} |c_{kl}| = |c_{ij}|$, то положим $b_{ji}^0 = b_{ij}^0 = \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{sgn} c_{ij}$ и $b_{kl}^0 = 0$, если $(i, \; j) \neq (k, \; l) \neq (j, \; i)$. Матрица $B_0 = [b_{kl}^0]$, $k, \; l = 1, \ldots, n$, будет матрицей, реализующей $\max \Delta\varphi_B(A)$ с точностью до $o(\varepsilon)$.

Замечание. Если $\max |c_{kl}|$ достигается одновременно более чем на двух элементах, то матрица B_0 определяется не единственным образом. Получаемые при этом величины $\Delta\varphi_B(A)$ совпадают с точностью до $o(\varepsilon)$.

Пусть $\|B\| = n \max_{k, l} |b_{kl}|$. Тогда положим $b_{kl}^0 = \varepsilon \operatorname{sgn} c_{kl}$ и $B_0 = [b_{kl}^0]$, $k, \; l = 1, \ldots, n$. Матрица B_0 реализует $\max \Delta\varphi_B(A)$ с точностью до $o(\varepsilon)$.

Пусть $\|B\| = \max_k \sum_{l=1}^{n} |b_{kl}|$ и пусть $\max |c_{kl}| = |c_{kp}|$. Тогда положим $b_{kp} = \varepsilon \cdot \operatorname{sgn} c_{kp}$; $b_{ki} = 0$ для $i \neq p$. Проделав такие построения для всех $k = 1, \ldots, n$, получим некоторую матрицу B_0, причем B_0 может оказаться не единственной. Поскольку $c_{kl} = c_{lk}$, $\forall \; k, \; l$, то среди построенных B_0 всегда есть симметричные матрицы. Реализуемые этими матрицами величины $\Delta\varphi_B(A)$ совпадают с точностью до $o(\varepsilon)$.

Список литературы

1. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. М., 1967.
2. Хусаинов Д. Я., Комаров Ю. А., Юнькова Е. А. // Автоматика. 1984. № 6. С. 73.
3. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М., 1970.
4. Crossley T. R., Porter B. // Int. J. Control. 1969. V. 10. N 2. P. 163.

Поступила в редакцию 17.04.86.