О. А. КАСТРИЦА

О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть A — матрица $n \times n$ с элементами $a_{ij} \in C$, $i, j = 1, \ldots, n$ и $g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$ — ее минимальный многочлен. Рассмотрим аналитическую функцию f, для которой определены значения $f(\lambda_i)$, $f'(\lambda_i)$, $\ldots$, $f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$, $i=1, \ldots, s$, называемые значениями функции f на спектре матрицы A. Матрица $f(A)$ определяется [1, с. 104], [2, с. 158], [3, с. 678] как значение при $\lambda = A$ некоторого многочлена r: $\lambda \to r(\lambda)$, принимающего на спектре матрицы A те же значения, что и f, т. е. $f(A) = r(A)$. Нахождение коэффициентов многочлена r требует в общем случае значительных вычислительных затрат. В частности, если все корни минимального многочлена простые, то $r(\lambda)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, т. е. $r(A) = \sum_{k=1}^{s} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{s} \frac{A - \lambda_i E}{\lambda_k - \lambda_i} f(\lambda_k)$, [1, с. 108].

Для получения интерполяционных формул в иных случаях используем представление $f(A)$ в виде [1, с. 111]

$$f(A) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_k-1} f^{(j)}(\lambda_k) Z_{kj}, \tag{1}$$

где Z_{kj} — компоненты матрицы A. Матрицы Z_{kj} определяются только матрицей A и не зависят от функции f. Это позволяет определить Z_{kj}, $k = 1, \ldots, s$, $j = 0, \ldots, (m_k - 1)$, используя набор вспомогательных функций специального вида, значение которых на матрице A может быть легко вычислено непосредственно.

Будем считать, что $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_s$. Полагая в (1) $f(\lambda)$ последовательно равным $(\lambda - \lambda_1)^p$, $p = 0, 1, \ldots, (m_1 - 1)$, получим систему, которую после преобразования можно представить в виде

$$(A - \lambda_1 E)^p = p!\, Z_{1p} + \sum_{j=0}^{p} \frac{p!}{j!} \sum_{\substack{k \geqslant 2 \\ m_k \geqslant p+1-j}} (\lambda_k - \lambda_1)^j Z_{k(p-j)},$$

$$p = 0, 1, \ldots, (m_1 - 1). \tag{2}$$

Выразим из (2) компоненты Z_{1j}, $j = 0, \ldots, (m_1 - 1)$ и подставим в (1). После группировки коэффициентов при Z_{kj}, $k \neq 1$, $j = 0, \ldots, (m_k - 1)$, получим

$$f(A) = \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!} (A - \lambda_1 E)^j + \sum_{k=2}^{s} \sum_{j=0}^{m_k-1} \Big[f^{(j)}(\lambda_k) - \\ - \sum_{i=0}^{m_1-j-1} \frac{f^{(j+i)}(\lambda_1)}{i!} (\lambda_k - \lambda_1)^i \Big] Z_{kj}. \tag{3}$$

Если $m_2 = \ldots = m_s = 0$, то из (3) получаем интерполяционную формулу

$$f(A) = \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!}(A-\lambda_1 E)^j. \tag{4}$$

Обозначим

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda) - \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!}(\lambda-\lambda_1)^j. \tag{5}$$

Тогда формула (3) запишется в виде

$$\varphi(A) = \sum_{k=2}^{s} \sum_{j=0}^{m_k-1} \varphi^{(j)}(\lambda_k) Z_{kj}. \tag{6}$$

Формула (6) справедлива для любой функции φ, задаваемой выражением (5), где f — произвольная функция, аналитическая в области, содержащей $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$.

Пусть $\varphi_k(\lambda) = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{s} (\lambda-\lambda_i)^{m_i}$, $k = 2, \ldots, s$. Для нахождения компонент Z_{kj}, $k \neq 1$, $j=0, \ldots, (m_k-1)$, используем вспомогательные функции $\varphi_{kl}(\lambda) = (\lambda-\lambda_k)^l \cdot \varphi_k(\lambda)$, $k = 2, \ldots, s$, $l = 0, \ldots, (m_k-1)$. Поскольку $\varphi_{kl}^{(j)}(\lambda_1) = 0$, $j = 0, \ldots, (m_1-1)$, то, подставляя в (5) $\varphi_{kl}(\lambda)$ вместо $f(\lambda)$, получим $\varphi(\lambda) = \varphi_{kl}(\lambda)$. Это означает, что функции $\varphi_{kl}(\lambda)$ можно подставлять в (6) вместо $\varphi(\lambda)$. При этом приходим к системе, позволяющей определить все компоненты Z_{kj}, $k \neq 1$. Заметим, что $\varphi_{kl}^{(j)}(\lambda_i) = 0$, $i \neq k$, $j=0, \ldots, (m_i-1)$. Поэтому, фиксируя k и подставляя в (6) вспомогательные функции $\varphi_{kl}(\lambda)$, $l = 0, \ldots, (m_k-1)$, получим систему, содержащую только неизвестные Z_{kj}, $j = 0, \ldots, (m_k-1)$. В то же время $\varphi_{kl}^{(j)}(\lambda_k) = 0$, если $j < l$ и

$$\varphi_{kl}^{(j)}(\lambda_k) = \frac{j!}{(j-e)!}\varphi_k^{(j-l)}(\lambda_k), \quad l \leqslant j \leqslant (m_k-1). \tag{7}$$

Учитывая (7), получаем систему

$$(A-\lambda_k E)^l \varphi_k(A) = \sum_{j=l}^{m_k-1} \frac{j!}{(j-l)!}\varphi_k^{(j-l)}(\lambda_k) Z_{kj}, \quad l=0, 1, \ldots, (m_k-1). \tag{8}$$

Итак, для группы компонент, соответствующих собственному значению λ_k матрицы A, $k \geqslant 2$, получаем треугольную систему, из которой Z_{kj}, $j = 0, \ldots, (m_k-1)$, легко определяются. Проделав это для $k = 2, 3, \ldots, s$, можно найти все компоненты матрицы A. Это позволяет строить формулы для $f(A)$.

Пример. Пусть $g(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^5(\lambda-\lambda_2)^2(\lambda-\lambda_3)$. Тогда $\varphi(\lambda) = f(\lambda) - \sum_{j=0}^{4} \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!}(\lambda-\lambda_1)^j$; $\varphi_2(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^5(\lambda-\lambda_3)$; $\varphi_3(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^5(\lambda-\lambda_2)^2$.

Из системы (8) находим:

$$Z_{21} = \frac{\varphi_2(A)(A-\lambda_2 E)}{\varphi_2(\lambda_2)}; \quad Z_{20} = \frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(\lambda_2)}\left[E - \frac{\varphi_2'(\lambda_2)}{\varphi_2(\lambda_2)}(A-\lambda_2 E)\right];$$

$$Z_{30} = \frac{\varphi_3(A)}{\varphi_3(\lambda_3)}.$$

Поэтому

$$f(A) = \sum_{j=0}^{4} \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!}(A-\lambda_1 E)^j + \left\{\varphi(\lambda_2)\frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(\lambda_2)}\left[E - \frac{\varphi_2'(\lambda_2)}{\varphi_2(\lambda_2)}(A-\lambda_2 E)\right] + \right.$$
$$\left. + \varphi'(\lambda_2)\frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(\lambda_2)}(A-\lambda_2 E)\right\} + \varphi(\lambda_3)\frac{\varphi_3(A)}{\varphi_3(\lambda_3)}.$$

Если m_k, $k = 2, \ldots, s$, невелики, то формула (3) позволяет строить сравнительно простые интерполяционные формулы для $f(A)$. Вычисление матричных функций по указанному способу может быть осуществлено на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1967.
2. Ланкастер П. Теория матриц.— М., 1978.
3. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем.— М., 1970.