УДК 517.956

Н.И. Юрчук

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В ЛОКАЛЬНЫЕ

Apriori estimations for the differences of solutions of non-local and local problems for heat equations are established. Using them, we prove continuous dependence of solutions of non-local problems as non-local boundary conditions pass into local ones.

1. Постановка задачи. Пусть в сплошную среду с температурой $h(t)$ помещен стержень (см. рис. 1) длиной l, входящий в сплошную среду в точке α. Температура $u_\alpha(x,t)$ в стержне удовлетворяет уравнению

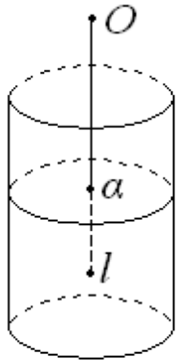

рис. 1

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{1}$$

начальному условию

$$u_\alpha(x,0) = \varphi_\alpha(x), \tag{2}$$

одному из краевых условий в точке $x = 0$

$$u_\alpha(0,t) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_\alpha(0,t)}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

и одному из нелокальных условий на отрезке (α, l)

$$\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_\alpha(\xi,t)d\xi = h(t) \quad \text{или} \quad \frac{u_\alpha(l,t) - u_\alpha(\alpha,t)}{l-\alpha} = h(t). \tag{4}$$

Каждая из задач (1)-(4) при каждом $0 \le \alpha < l$ корректна в смысле Адамара, т.е. при каждом $0 \le \alpha < l$ решение существует, единственно и непрерывно зависит от f, φ_α и h. Такие задачи исследовались в работах Л.И. Камынина, Н.И. Ионкина и Е.И. Моисеева, А.В. Картынника, N.E. Benouar, A. Bouziani, Byszewski, Е.А. Гасымова, Н.И. Юрчука и др. (см.[2] и указанную там литературу).

При удалении стержня из среды, т.е. при $\alpha \to l$ задачи (1)-(4) примут вид

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} = f(x,t), \tag{5}$$

$$u_l(x,0) = \varphi_l(x), \tag{6}$$

$$u_l(0,t)=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_l(0,t)}{\partial x}=0 \tag{7}$$

$$u_l(l,t)=h(t) \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_l(l,t)}{\partial x}=h(t). \tag{8}$$

Решения $u_l(x,t)$ этих задач также корректны в смысле Адамара. Они описывают температуру в стержне в случае, когда стержень своим концом l лишь касается сплошной среды с температурой $h(t)$. На важность исследования задач (1)-(4) обращал внимание академик А.А. Самарский, поскольку они встречаются в физике плазмы. Действительно, решения $u_l(x,t)$ задач (1)-(4) могут описывать температуру в графитовом стержне, находящимся в сплошной среде атомного реактора. При остановке атомного реактора происходит удаление графитового стержня из среды реактора. В целях противопожарной безопасности важно знать, как ведет себя температура $u_\alpha(x,t)$ при $\alpha \to l.$

В настоящей работе установим априорные оценки разностей $u_\alpha(x,t)-u_l(x,t).$ И, используя эти оценки, докажем, что, если при $\alpha \to l$ $\varphi_\alpha \to \varphi_l$, то $u_\alpha \to u_l$. Тем самым установим новое важное свойство, что решение смешанных задач (1)-(4) с нелокальными условиями непрерывно изменяются при переходе нелокальных условий в локальные. Как отмечается выше, это свойство имеет важное прикладное значение.

2. Задачи с интегральным краевым условием.

В этом пункте приведем априорные оценки и покажем, что $u_\alpha \to u_l$ в случае, когда u_α удовлетворяет интегральному условию из (4), а $u_l(l,t)=h(t)$.

Т е о р е м а 1. Пусть коэффициент $a(x,t)$ в (1) и (5) является непрерывно дифференцируемой функцией на $G=[0,l]\times[0,T]$ $0<a_0 \le a(x,t) \le a_1$,

$f \in L_2(G)$, $h \in W_2^1(0,T)$, $\varphi_\alpha, \varphi_l \in W_2^1(0,l)$, $\varphi_\alpha(0)=\varphi_l(0)=0$ или $\varphi'_\alpha(0)=\varphi'_l(0)$ в зависимости от выполнения условия из (3), $\varphi_l(0)=h(0)$, $\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l \varphi_\alpha(x)dx = h(0).$

Тогда существует постоянная $c>0$, независящая от u_α, u_l и l такая, что

$$\int_0^l\int_0^T(1-x)\left[\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial u_l}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}\right|^2\right]dxdt+$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\int_0^l\left[\left|u_\alpha-u_l\right|^2+(l-x)\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}-\frac{\partial u_l}{\partial x}\right|^2\right]dx\le \tag{9}$$

$$\le C\left\{\int_0^l\left|\varphi'_\alpha(x)-\varphi'_l(x)\right|^2dx+\left|h(0)-\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_l(x,0)dx\right|^2+\right.$$

$$\left.+\int_0^T\left[\left|h'(t)-\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l\frac{\partial u_l(x,t)}{\partial t}dx\right|^2+\left|h(t)-\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_l(x,t)dx\right|^2dt\right]\right\}$$

Доказательство неравенства (9) дано в [1] в случае условия $u_\alpha(0,t)=0$ и в [2] в случае условия $\frac{\partial u_\alpha(0,t)}{\partial x}=0.$

Из неравенства (9) следует

Т е о р е м а 2. Пусть выполняется условие теоремы 1. Если

$$\lim_{\alpha\to l}\int_0^l\left|\varphi'_l(x)-\varphi'_\alpha(x)\right|^2dx=0, \tag{10}$$

тогда

$$\lim_{\alpha\to l}\left\{\int_0^l\int_0^T(l-x)\left[\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial u_l}{\partial t}\right|^2+\left|\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}\right|^2\right]dxdt+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\le t\le T}\int_0^l\left[(l-x)\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}-\frac{\partial u_l}{\partial x}\right|^2+\left|u_\alpha-u_l\right|^2\right]dx\right\}=0. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Т а к к а к

$$\lim_{\alpha\to l}\left|\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_l(x,t)dx-h(t)\right|=\lim_{\alpha\to l}\left|\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_l(x,t)dx-u_l(l,t)\right|=0,$$

$$\lim_{\alpha\to l}\left|\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l\frac{\partial u_l(x,t)}{\partial x}dx-h'(t)\right|=\lim_{\alpha\to l}\left|\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l\frac{\partial u_l(x,t)}{\partial t})dx-\frac{\partial u_l(l,t)}{\partial t})\right|=0,$$

$$\lim_{\alpha\to l}\left|\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_l(x,0)dx-h(0)\right|=\lim_{\alpha\to l}\left|\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l u_l(x,0)dx-u_l(l,0)\right|=0,$$

то в силу (10) из (9) следует (11).

Для полноты рассмотрений покажем, что для любой функции $\varphi_l \in W_2^1(0,l),$ удовлетворяющей условиям $\varphi_l(0)=0$ или $\varphi_l'(0)=0$ и $\varphi_l(l)=h(0),$ существуют функции $\varphi_\alpha \in W_2^1(0,l)$ такие, что

$$\varphi_\alpha'(0)=0 \text{ или } \varphi_\alpha'(0)=0 \text{ и } \frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l \varphi_\alpha(x)dx = h(0). \quad (12)$$

При условии $\varphi_\alpha(0)=0$ такими функциями могут быть

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_l(x)+\frac{2x}{l+\alpha}\left(h(0)-\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l \varphi_l(x)dx\right),$$

а при условии $\varphi_\alpha'(0)=0$ такими функциями могут быть

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_l(x)+\frac{3x^2}{l^2+l\alpha+\alpha^2}\left(h(0)-\frac{1}{l-\alpha}\int_\alpha^l \varphi_l(x)dx\right).$$

3. **Задачи со вторым нелокальным условием**

В прямоугольнике $G=(0,l)\times(0,T)$ рассмотрено семейство смешанных задач с нелокальными условиями:

$$\frac{1}{a(x,t)}\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x^2}=f(x,t), \quad 0<\alpha<l,. \quad (13)$$

$$u_\alpha(x,0)=\varphi_\alpha(x), \quad u_\alpha(0,t)=0, \quad \frac{u_\alpha(l,t)-u_\alpha(\alpha,t)}{l-\alpha}=h(t), \quad (14)$$

и две смешанные задачи с локальными условиями:

$$\frac{1}{a(x,t)}\frac{\partial u_0}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}=f(x,t), \quad (15)$$

$$u_0(x,0)=\varphi_0(x), \quad u_0(0,t)=0, \quad u_0(l,t)=h(t), \quad (16)$$

$$\frac{1}{a(x,t)}\frac{\partial u_l}{\partial t}-\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}=f(x,t), \quad (17)$$

$$u_l(x,0)=\varphi_l(x), \quad u_l(0,t)=0, \quad \frac{\partial u_l(l,t)}{\partial x}=h(t). \quad (18)$$

Предполагается, что коэффициент $a(x,t)$ в уравнениях (13), (15), (17) является непрерывной и непрерывно дифференцируемой функцией и

$$a_1 \ge a(x,t) \ge a_0 > 0,$$

$$f \in L_2(G), \quad h \in W_2^1(0,T), \quad \varphi_\alpha,\ \varphi_0,\varphi_l \in W_2^1(0,l), \quad \varphi_\alpha(0)=\varphi_0(0)=\varphi_l(0)=0,$$

$$\varphi_0(l) = h(0), \quad \varphi_l'(l) = h(0), \quad \frac{\varphi_\alpha(l) - \varphi_\alpha(\alpha)}{l - \alpha} = h(0).$$

Известно, что, если выполняются эти предположения, то существуют и единственны решения локальных задач (15), (16) и (17) (18) и эти решения имеют почти везде в G производные первого порядка по t и до второго порядка по x. С повышением гладкости данных задачи повышается и гладкость решений.

В работах [3], [4] доказывается существование и единственность решений семейства задач (13), (14) при каждом $0 < \alpha < l$. Осуществляется это следующим образом. Сначала в задаче (13), (14) производится замена искомых функций по формуле

$$u_\alpha(x,t) = v_\alpha(x,t) + xh(t), \tag{19}$$

Для новых функций $v_\alpha(x,t)$ получают при каждом $0 < \alpha < l$ задачу

$$\frac{1}{a(x,t)}\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} - \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x^2} = f(x,t) \equiv f(x,t) - \frac{x}{a}h'(t), \tag{20}$$

$$v_\alpha(x,0) = \varphi_\alpha(x) \equiv \varphi_\alpha(x) - xh(0), \quad v_\alpha(0,t) = 0, \quad \frac{v_\alpha(l,t) - v_\alpha(\alpha,t)}{l - \alpha} = 0. \tag{21}$$

и устанавливают следующую априорную оценку

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^l \psi_\alpha(x) v_\alpha^2(x,t)dx + \int_0^T\int_0^l \psi_\alpha(x)\left(\frac{\partial v_\alpha(x,t)}{\partial x}\right)^2 dxdt \le$$
$$\le C\left(\int_0^l \psi_\alpha(x)\tilde{\varphi}_\alpha^2(x)dx + \int_0^T\int_0^l \psi_\alpha(x) f^2(x,t)dxdt\right), \tag{22}$$

где постоянная C не зависит от v_α и

$$\psi_\alpha = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \alpha \\ \dfrac{l-x}{l-\alpha}, & \alpha \le x \le l. \end{cases}$$

С помощью априорной оценки (22) доказывается существование и единственность решения задачи (20), (21) и, следовательно, задачи (13), (14) при каждом $0 < \alpha < l.$

Далее устанавливаются априорные оценки разностей $u_\alpha - u_0$ и $u_\alpha - u_l$. Для этого, обозначая через $u(x,t)$ одно из решений u_0 задачи (15), (16) или u_l задачи (17), (18), вводится новая функция $w(x,t)$ по формуле

$$w_\alpha = u - u_\alpha + x\left[h(t) - \frac{u(l,t) - u(\alpha,t)}{l - \alpha}\right]. \tag{23}$$

Эта функция является решением задачи

$$\frac{1}{a}\frac{\partial w_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial^2 w_\alpha}{\partial x^2}=\frac{x}{a}\left[h'(t)-\frac{\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial u(\alpha,t)}{\partial t}}{l-\alpha}\right], \tag{24}$$

$$w_\alpha(x,0)=\varphi-\varphi_\alpha-x\left[\frac{u(l,0)-u(\alpha,0)}{l-\alpha}-h(0)\right], \tag{25}$$

$$w_\alpha(0,t)=0, \qquad \frac{w_\alpha(l,t)-w_\alpha(\alpha,t)}{l-\alpha}=0, \tag{26}$$

где $\varphi(x)$ – одна из функций $\varphi_0(x)$ или $\varphi_l(x)$ в зависимости от обозначения функции u и, следовательно, для w_α справедлива аналогичная (22) априорная оценка

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^l \psi_\alpha(x)w_\alpha^2(x,t)dx+\int_0^T\int_0^l \psi_\alpha(x)\left(\frac{\partial w_\alpha(x,t)}{\partial x}\right)^2 dxdt\le$$

$$\le 2C\left(\int_0^l \psi_\alpha(x)\left|\varphi(x)-\varphi_\alpha(x)\right|^2 dx+\int_0^l \psi_\alpha(x)x^2\left|\frac{u(l,0)-u(\alpha,0)}{l-\alpha}-h(0)\right|^2 dx+\right. \tag{27}$$

$$\left.+\int_0^T\int_0^l \psi_\alpha\frac{x^2}{a^2(x,t)}\left|h'(t)-\frac{\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial u(\alpha,t)}{\partial t}}{l-\alpha}\right|^2 dxdt\right).$$

Это неравенство останется в силе, если в его левой части применим неравенство $\psi_\alpha(x)\ge l-x,$ а в правой части неравенство $\psi_\alpha(x)\le 1.$ В полученное после этих оценок неравенство подставляется вместо $u(x,t)$ одно из решений u_0 или u_l задачи (15), (16) или (17), (18) соответственно. В результате получаются априорные оценки

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^l (l-x)\left|u_0-u_\alpha\right|^2dx+\int_0^T\int_0^l (l-x)\left|\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\right|^2 dxdt\le$$

$$\le C\left\{\int_0^l\left|\varphi_0(x)-\varphi_\alpha(x)\right|^2dx+\int_0^T\left[\left|\frac{\alpha h(t)-u_0(\alpha,t)}{l-\alpha}\right|^2+\right.\right. \tag{28}$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\alpha h'(t)-\dfrac{\partial u_0(\alpha,t)}{\partial t}}{l-\alpha}\right|^2\right]dt+\left|\frac{\alpha h(0)-\varphi_0(\alpha)}{l-\alpha}\right|^2\right\},$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^l (l-x)\left|u_l-u_\alpha\right|^2dx+\int_0^T\int_0^l (l-x)\left|\frac{\partial u_l}{\partial x}-\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\right|^2 dxdt\le$$

$$\le C\left\{\int_0^l\left|\varphi_l(x)-\varphi_\alpha(x)\right|^2dx+\int_0^T\left[\left|\frac{u_l(l,t)-u_l(\alpha,t)}{l-\alpha}-h(t)\right|^2+\right.\right. \tag{29}$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\dfrac{\partial u_l(1,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial u_l(\alpha,t)}{\partial t}}{l-\alpha}-h'(t)\right|^2\right]dt+\left|\frac{\varphi_l(l)-\varphi_l(\alpha)}{l-\alpha}-h(0)\right|^2\right\}.$$

Из этих априорных оценок вытекает следующая непрерывная зависимость решений задачи (13), (14) от параметра α.

Т е о р е м а 3. Если

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^l\left|\varphi_\alpha(x)-\varphi_0(x)\right|^2dx=0, \tag{30}$$

то

$$\lim_{\alpha\to 0}\left[\sup_{0\le t\le T}\int_0^l (l-x)\left|u_\alpha-u_0\right|^2dx+\int_0^T\int_0^l (l-x)\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial x}\right|^2 dxdt\right]=0. \tag{31}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку для решений задачи (15), (16)

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^T u_0(\alpha,t)dt=0,\quad \lim_{\alpha\to 0}\int_0^T\left|\frac{\partial u_0(\alpha,t)}{\partial t}\right|^2dx=0\ \text{ и }\ \lim_{\alpha\to 0}\varphi_0(\alpha)=0,\quad \text{то}$$

из (30) в силу (28) следует (31).Для полноты рассмотрений осталось показать, что для любой функции $\varphi_0\in W_2^1(0,T)$, удовлетворяющей условиям $\varphi_0(0)=0$ и $\varphi_0(l)=h(0)$, существуют функции $\varphi_\alpha \in W_2^1(0,T)$ такие, что $\varphi_\alpha(0)=0,$ $\dfrac{\varphi_\alpha(l)-\varphi_\alpha(\alpha)}{l-\alpha}=h(0)$ и справедливо (30). Очевидно, что это справедливо для

$\varphi_\alpha(x)=\varphi_0(x)-x\left(\dfrac{\alpha h(0)-\varphi_0(\alpha)}{l-\alpha}\right).$ Теорема 3 доказана.

Т е о р е м а 4. Если

$$\lim_{\alpha\to l}\int_0^l \left|\varphi_\alpha(x)-\varphi_l(x)\right|^2 dx=0, \tag{32}$$

то

$$\lim_{\alpha\to l}\left[\sup_{0\le t\le T}\int_0^l (1-x)\left|u_\alpha-u_l\right|^2 dx+\int_0^T\int_0^l (l-x)\left|\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}-\frac{\partial u_l}{\partial x}\right|^2 dxdt\right]=0. \tag{33}$$

Доказательство. Поскольку для решений задачи (17), (18)

$$\lim_{\alpha\to l}\int_0^T\left[\left|\frac{u_l(l,t)-u_l(\alpha,t)}{l-\alpha}-h(t)\right|^2+\left|\frac{\dfrac{\partial u_l(l,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial u_l(\alpha,t)}{\partial t}}{l-\alpha}-h'(t)\right|^2\right]dt=0$$

и $\lim\limits_{\alpha\to l}\dfrac{\varphi_l(x)-\varphi_l(\alpha)}{l-\alpha}=h(0),$ то из (32) в силу (29) следует (33). Для полноты рассмотрений осталось показать, что для любой функции $\varphi_l \in W_2^1(0,T)$, удовлетворяющей условиям $\varphi_l(0)=0$, $\varphi_l'(l)=h(0),$ существуют функции $\varphi_\alpha \in W_2^1(0,T)$ такие, что $\varphi_\alpha(0)=0,$ $\dfrac{\varphi_\alpha(l)-\varphi_\alpha(\alpha)}{l-\alpha}=h(0)$ и справедливо (32). В качестве таких функций можно взять

$$\varphi_\alpha(x)=\varphi_l(x)-x\left(\frac{\varphi_l(l)-\varphi_l(\alpha)}{l-\alpha}-h(0)\right).$$

Теорема 4 доказана.

1. Yurchuk N.I. // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE. 2003. Cottenham: Cambridge Scientific Publishers. 2005. p.p.243-250.
2. Yurchuk N.I., Tcharie Kokou, Moussa Zakari Djibibe // Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 2008 (2008). № 17. pp. 1-10.
3. Юрчук Н.И., Чарие Коку // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44. № 3. С. 414-420.
4. Yurchuk N.I. and Charie Koku // Differential Equations. 2008. Vol. 44. № 3. C. 434-441.

Реферат

УДК 517.956

Юрчук Н.И. Априорные оценки решений теплофизических задач при изменении нелокальных краевых условий в локальные // Вестн. БГУ. Сер.1. 2011. №3.

Установлены априорные оценки для разностей решений нелокальных и локальных задач для уравнения теплопроводности и с их помощью доказана непрерывная зависимость решений нелокальных задач от изменения нелокальных краевых условий в локальные.

Библиогр. 4 назв.