Аналогично можно показать, что

$$g^{(m)}(1) = (g_1^{(m)}(u))(1)$$

для любых $m \in \{1,2,\ldots,n\}$. Таким образом, равенства (13) также выполняются.

* * *

В статье представлены полиномы для смешивания с заданной степенью непрерывности параметризованных кривых на матричной группе Ли. Следует отметить, что матричные группы в статье рассматриваются только для простоты изложения. Полученные результаты могут быть обобщены на абстрактные группы Ли, принимая во внимание, что любая группа Ли локально гомеоморфна матричной группе Ли. Но в геометрических приложениях, на которые ориентировано применение изложенного подхода, используются только матричные группы, поэтому в статье и были рассмотрены только такие группы Ли.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Побегайло А. П. Полиномиальная деформация параметризованных кривых на группе Ли // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2011. № 2. С. 81–86.

2. Pobegailo A. P. C^n interpolation on smooth manifolds with one-parameter transformations // Computer-Aided Design. 1996. Vol. 28. № 12. P. 973–979.

3. Park F., Ravani B. Bézier curves on Riemannian manifolds and Lie groups with kinematic applications // ASME J. Mechan. Design. 1995. Vol. 117. P. 36–40.

4. Crouch P., Kun G., Silva Leite F. The De Casteljau algorithm on Lie groups and spheres // Journal of Dynamical and Control Systems. 1999. Vol. 5. № 3. P. 397–429.

5. Altafini C. The de Casteljau algorithm on SE(3) // Lect. Note. Contr. Inform. Sci. 2001. Vol. 258. P. 23–34.

6. Pesenson I. Variational splines on Riemannian manifolds with applications to integral geometry // Advances in Applied Mathematics. 2004. Vol. 33. № 3. P. 548–572.

7. Jakubiak J., Silva Leite F., Rodrigues R. C. A two-step algorithm of smooth spline generation on Riemannian manifolds // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2006. Vol. 194. № 2. P. 177–191.

8. Flöry S., Hofer M. Constrained Curve Fitting on Manifolds // Computer-Aide Design. 2008. Vol. 40. № 1. P. 25–34.

9. Дубровин В. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: методы и приложения. 2-е изд., перераб. М., 1986.

10. Горбацевич В. В., Онищик А. Л. Группы Ли-преобразований // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М., 1988. Т. 20. С. 103–240.

11. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М., 2001.

Поступила в редакцию 20.02.13.

Александр Павлович Побегайло – кандидат технических наук, доцент кафедры технологий программирования.

УДК 514.765

В. В. БАЛАЩЕНКО, П. А. ДУБОВИК

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ *f*-СТРУКТУРЫ НА 5-МЕРНОЙ ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА H(2,1)

В статье рассмотрены специальные *f*-структуры (в смысле К. Яно, т. е. $f^3 + f = 0$) на 5-мерной группе Гейзенберга H(2,1). Группа Ли H(2,1) снабжена левоинвариантной римановой структурой, которая индуцирована естественной евклидовой метрикой на соответствующей алгебре Ли. Мы представляем группу H(2,1) как риманово однородное *k*-симметрическое пространство двумя способами, а именно как 4- и 6-симметрические однородные пространства. Используя теорию канонических структур, на однородных *k*-симметрических пространствах построены соответствующие левоинвариантные канонические *f*-структуры. Доказано, что все эти структуры являются эрмитовыми *f*-структурами на H(2,1). Кроме того, вычислены тензоры Нейенхёйса для этих *f*-структур и указаны те канонические *f*-структуры, которые являются интегрируемыми. Следует отметить, что 5-мерная группа Гейзенберга H(2,1) представляет особый интерес для теории гетеротических струн в теоретической физике.

Ключевые слова: 5-мерная группа Гейзенберга; однородное *k*-симметрическое пространство; левоинвариантная риманова метрика; левоинвариантная *f*-структура; каноническая *f*-структура; эрмитова *f*-структура.

In this paper, special *f*-structures (in the sense of K. Yano, i. e. $f^3 + f = 0$) on the 5-dimensional Heisenberg group H(2,1) are considered. The Lie group H(2,1) is equipped with the left-invariant Riemannian structure induced by the natural Euclidean metric on the corresponding Lie algebra . We represent the group H(2,1) as a Riemannian homogeneous *k*-symmetric space in two ways, namely, as 4- and 6-symmetric homogeneous spaces. Using the theory of canonical structures on homogeneous *k*-symmetric spaces, the corresponding left-invariant canonical *f*-structures on these spaces were constructed. It was proved that all these structures are Hermitian *f*-structures on H(2,1). Besides, we calculate the Nijenhuis tensors of these *f*-structures and indicate those canonical *f*-structures which are integrable. It should be mentioned that the 5-dimensional Heisenberg group H(2,1) is of especial interest in the theory of heterotic strings in theoretical physics.

Key words: the 5-dimensional Heisenberg group; homogeneous *k*-symmetric space; left-invariant Riemannian metric; left-invariant *f*-structure; canonical *f*-structure; Hermitian *f*-structure.

1. Метрические *f*-структуры на многообразиях

Приведем кратко некоторые сведения из обобщенной эрмитовой геометрии, относящиеся к метрическим *f*-структурам на гладких многообразиях. Как известно, *аффинорной структурой* на многообразии называется тензорное поле типа (1,1), или, что эквивалентно, поле эндоморфизмов, действующих в его касательном расслоении.

Мы рассматриваем так называемые *f*-структуры, т. е. аффинорные структуры *f*, которые удовлетворяют равенству $f^3 + f = 0$ [1]. Такие структуры обобщают широко известные почти комплексные структуры $J\,(J^2 = -1)$.

Пусть M – *f*-многообразие, $\boldsymbol{B}(M)$ – модуль гладких векторных полей на M. Тогда $\boldsymbol{B}(M) = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$ [2], где $\mathrm{Im} f$ и $\mathrm{Ker} f$ – взаимно дополнительные распределения, которые обычно называют *первым* и *вторым фундаментальным распределением* *f*-структуры соответственно. Заметим, что сужение F заданной *f*-структуры на $\mathrm{Im} f$ есть почти комплексная структура, т. е. $F^2 = -id$.

Тензор Нейенхёйса для *f*-структуры определяется формулой [1]

$$N(X,Y) = [fX, fY] - f[X, fY] - f[fX, Y] + f^2[X,Y]\,, \tag{1}$$

где $X, Y \in \boldsymbol{B}(M)$. При этом критерием интегрируемости *f*-структуры является условие $N(X,Y)=0$ для всех $X, Y \in \boldsymbol{B}(M)$ [1].

Напомним, что *f*-структура на римановом многообразии $(M,\ g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется *метрической* *f*-структурой, если $\langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0$, где $X, Y \in \boldsymbol{B}(M)$ (см. [2]). В этом случае тройка (M, g, f) называется *метрическим f-многообразием.*

Далее через ∇ будем обозначать связность Леви-Чивита риманова многообразия $(M, g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Тогда для *f*-структуры *f* имеем

$$\nabla_X(f)Y = \nabla_X fY - f\nabla_X Y. \tag{2}$$

Тензор T типа (2,1) на *f*-многообразии, определенный формулой [2]

$$T(X,Y) = \frac{1}{4} f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y)\ ,\ X, Y \in \boldsymbol{B}(M), \tag{3}$$

называется *композиционным тензором.*

Будем рассматривать далее класс **Hf** эрмитовых *f*-структур, определяемых условием $T(X,Y)=0$ для любых $X, Y \in \boldsymbol{B}(M)$ [2], [3]. Заметим, что $\mathbf{Hf} \subset \mathbf{Kf}$, где **Kf** – класс келеровых *f*-структур ($\nabla f = 0$).

2. Однородные Ф-пространства

Здесь мы кратко сформулируем некоторые основные определения и результаты, относящиеся к однородным Ф-пространствам и каноническим структурам на них. Более подробную информацию можно найти в [4], [3].

Пусть G – связная группа Ли, Φ – ее (аналитический) автоморфизм. Обозначим через G^Φ подгруппу всех неподвижных точек автоморфизма Φ, а через G_o^Φ – связную компоненту единицы подгруппы G^Φ. Предположим, что замкнутая подгруппа H группы G удовлетворяет условию

$$G_o^\Phi \subset H \subset G^\Phi .$$

Тогда G/H называется *однородным Ф-пространством.*

Однородные Ф-пространства содержат однородные симметрические пространства ($\Phi^2 = id$) и, более общо, *однородные Ф-пространства порядка k* ($\Phi^k = id$) или, в иной терминологии, *однородные k-симметрические пространства* (см. [5]).

Пусть G/H – однородное Ф-пространство порядка k ($k \geq 2$), $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ – соответствующие алгебры Ли, $\varphi = d\Phi_e$ – автоморфизм алгебры Ли $\boldsymbol{g}$. Рассмотрим линейный оператор $A = \varphi - id$. Известно [6], что любое однородное Ф-пространство порядка k редуктивно, при этом соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли $\boldsymbol{g}$ имеет вид: $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h} \oplus \boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m} = A(\boldsymbol{g})$. Такое разложение называется *каноническим редуктивным разложением* алгебры Ли $\boldsymbol{g}$ однородного Ф-пространства G/H. Заметим, что однородные k-симметрические пространства входят в более широкий класс регулярных Ф-пространств (см. [4], [3]).

Обозначим через θ ограничение φ на $\boldsymbol{m}$, где $\boldsymbol{m}$ отождествим с касательным пространством $T_o(G/H)$ в точке $o = H$. Пусть F – инвариантная аффинорная структура на однородном многообразии G/H. Тогда F вполне определяется своим значением F_o в точке o, где F_o инвариантно относительно $Ad(H)$. Для удобства всюду в дальнейшем будем обозначать одинаково любую инвариантную структуру на G/H и ее значение в точке o.

Напомним далее, что инвариантная аффинорная структура F на регулярном Ф-пространстве G/H называется *канонической* [4], если ее значение в точке $o = H$ является полиномом от θ.

Отметим, что все канонические структуры классического типа (в том числе и *f*-структуры) на регулярных Ф-пространствах полностью описаны [4]. В частности, для однородных *k*-симметрических пространств предъявлены точные вычислительные формулы. Приведем основной результат для *f*-структур. Пусть *G/H* – однородное *k*-симметрическое пространство. Используем следующее обозначение:

$$u = \begin{cases} n, & \text{если } k = 2n+1, \\ n-1, & \text{если } k = 2n. \end{cases}$$

Теорема 1 [4]. *Пусть G/H – однородное Ф-пространство порядка k. Тогда все нетривиальные канонические f-структуры на G/H могут быть заданы операторами*

$$f = \frac{2}{k}\sum_{m=1}^{u}\Big(\sum_{j=1}^{u}\zeta_j \sin\frac{2\pi m j}{k}\Big)(\theta^m - \theta^{k-m}),$$

где $\zeta_j \in \{-1:0:1\}$, $j = 1,2,...,u$, *причем не все коэффициенты* ζ_j *равны нулю.*

Следствие 1 [4]. Пусть *G/H* – однородное Ф-пространство порядка 3. Единственной (с точностью до знака) канонической *f*-структурой на *G/H* является классическая почти комплексная структура

$$J = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^2).$$

Отметим, что данная каноническая почти комплексная структура была впервые обнаружена в конце 1960-х гг. Н. А. Степановым и независимо Дж. Вольфом и А. Греем.

Следствие 2 [4]. Пусть *G/H* – однородное Ф-пространство порядка 4. Единственная (с точностью до знака) каноническая *f*-структура на *G/H* имеет вид

$$f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3).$$

Следствие 3. Пусть *G/H* – однородное Ф-пространство порядка 6. Имеются (с точностью до знака) только следующие канонические *f*-структуры на *G/H*:

$$f_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\theta - \theta^2 + \theta^4 - \theta^5),\ f_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\theta + \theta^2 - \theta^4 - \theta^5),\ f_3 = f_1 + f_2,\ \ f_4 = f_1 - f_2.$$

Укажем важный частный случай однородных Ф-пространств. Если $G^{\Phi}=\{e\}$, то $H=\{e\}$ и $G/H=G$. В этом случае группу Ли *G* можно рассматривать как однородное Ф-пространство порядка *k* ($\Phi^k = id$). Тогда $\boldsymbol{m} = A(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}$ – алгебра Ли группы Ли *G* и $\theta = \varphi$.

Пусть *G/H* – однородное редуктивное пространство, $\boldsymbol{g}=\boldsymbol{h}\oplus \boldsymbol{m}$ – редуктивное разложение алгебры Ли $\boldsymbol{g}$, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ – инвариантная риманова метрика на *G/H*. Тогда связность Леви-Чивита ∇ на римановом многообразии (*G/H*, *g*) определяется формулой [7, с. 187]

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]_m + U(X,Y), \tag{4}$$

где *U* – симметрическое билинейное отображение из $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{m}$ в $\boldsymbol{m}$, определенное формулой

$$2\langle U(X,Y),Z\rangle = \langle X,[Z,Y]_m\rangle + \langle [Z,X]_m, Y\rangle\ \ \forall X,Y,Z \in \boldsymbol{m}. \tag{5}$$

3. Группа Гейзенберга H(2,1)

Одним из примеров групп Ли является классическая трехмерная группа Гейзенберга:

$$\mathrm{H}_3 = \{\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}.$$

Группа названа именем физика-теоретика *Вернера Гейзенберга* (1901–1976), который использовал ее в квантовой механике. Группа Гейзенберга используется для описания одномерных квантово-механических систем.

Алгебра Ли $\boldsymbol{h}$ группы H_3 состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ x,y,z \in \mathbb{R}.$$

Группа Ли H_3 не коммутативна и диффеоморфна $\mathbb{R}^3$. Ее алгебра Ли $\boldsymbol{h}$ нильпотентна с индексом нильпотентности 2, т. е. $\boldsymbol{h}^2=[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}^1]=0$.

В данной работе мы рассматриваем 5-мерную группу Гейзенберга:

$$\mathrm{H}(2,1)=\{\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_2 & z\\ 0 & 1 & 0 & y_1\\ 0 & 0 & 1 & y_2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid x_i, y_i, z\in\mathbb{R}\}.$$

Отметим, что именно эта обобщенная группа Гейзенберга H(2,1) используется при конструировании 6-мерного компактного нильмногообразия, на котором решаются гетеротические уравнения движения со специальными свойствами в теории струн [8].

Группа Ли H(2,1) имеет алгебру Ли $\boldsymbol{h}$(H(2,1)), состоящую из матриц вида

$$\begin{pmatrix}0 & a & b & c\\ 0 & 0 & 0 & d\\ 0 & 0 & 0 & e\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \text{ где } a,b,c,d,e\in\mathbb{R}.$$

Алгебра Ли $\boldsymbol{h}$(H(2,1)) нильпотентна с индексом нильпотентности 2. Пусть e_1 – вектор из $\boldsymbol{h}$, для которого $a=1$, $b=c=d=e=0$, e_2 – вектор из $\boldsymbol{h}$, для которого $b=1$, $a=c=d=e=0$ и т. д., e_5 – вектор, для которого $e=1$ и все остальные элементы – нули. Нетрудно показать, что $[e_1, e_4]=[e_2, e_5]=e_3$, остальные скобки Ли равны 0.

Замечание 1. Очевидно, что центр $Z(\boldsymbol{h})$ алгебры $\boldsymbol{h}$(H(2,1)) натянут на вектор e_3.

4. Группа H(2,1) как однородное Ф-пространство порядка 4

Пусть H(2,1) – группа Гейзенберга, $\boldsymbol{h}$ – алгебра Ли группы Ли H(2,1). Пусть e_i, $i=\overline{1,5}$, – базис алгебры $\boldsymbol{h}$, определенный выше. Рассмотрим на $\boldsymbol{h}$ евклидову метрику¸ определенную тем условием, что базис e_i, $i=\overline{1,5}$, является ортонормированным.

Определим линейное преобразование φ алгебры $\boldsymbol{h}$ условиями: $\varphi(e_1)=e_2$, $\varphi(e_2)=-e_1$, $\varphi(e_3)=-e_3$, $\varphi(e_4)=-e_5$, $\varphi(e_5)=e_4$. Легко показать, что φ – автоморфизм алгебры Ли $\boldsymbol{h}$ порядка 4, согласованный с указанной выше евклидовой метрикой. Также очевидно, что автоморфизм φ не имеет неподвижных ненулевых векторов. Так как H(2,1) – связная и односвязная группа Ли, то [9] существует ее автоморфизм Ф такой, что $d\Phi_e=\varphi$. Поскольку подгруппа неподвижных точек автоморфизма Ф связна (см. [10]), то в нашем случае подгруппа G^Φ группы Ли H(2,1) тривиальна. Это означает, что группу Ли H(2,1) можно рассматривать как однородное Ф-пространство порядка 4. Согласно следствию 2 единственная (с точностью до знака) каноническая f-структура задается формулой

$$f=\frac{1}{2}(\varphi-\varphi^3). \tag{6}$$

Поскольку φ – изометрический автоморфизм относительно выбранной на $\boldsymbol{h}$ евклидовой метрики, то f является метрической f-структурой [3]. Используя формулу (6), легко вычислить значения канонической f-структуры на базисных векторах алгебры $\boldsymbol{h}$: $f(e_1)=e_2, f(e_2)=-e_1, f(e_3)=0, f(e_4)=-e_5, f(e_5)=e_4$.

Замечание 2. Очевидно, что $\operatorname{Ker} f=\{\gamma e_3 \mid \gamma\in\mathbb{R}\}$ и $\dim \operatorname{Ker} f=1$. Это означает, что ядро f-структуры совпадает с центром $Z(\boldsymbol{h})$ алгебры $\boldsymbol{h}$.

Лемма 1. *Для любых $X,Y\in Z(\boldsymbol{h})^\perp$ векторы U(X, Y), определенные равенством* (5)*, равны нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, для любых $X,Y\in Z(\boldsymbol{h})^\perp$ и любого $Z\in\boldsymbol{h}$ имеют место равенства: $\langle X,[Z,Y]\rangle=\langle [Z,X],Y\rangle=0$. В силу формулы (5) получим $\langle U(X,Y),Z\rangle=0$. Таким образом, вектор $U(X,Y)$ ортогонален любому вектору алгебры $\boldsymbol{h}$, а значит, $U(X,Y)=0$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Если центр $Z(\boldsymbol{h})$ алгебры $\boldsymbol{h}(H(2,1))$ принадлежит ядру f-структуры, то данная f-структура является эрмитовой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как упоминалось выше, эрмитовость f-структуры означает равенство нулю композиционного тензора T для любых $X,Y\in\boldsymbol{h}$. Пусть $Z(\boldsymbol{h})\subset \operatorname{Ker} f$. Прежде всего заметим, что в этом случае

$$f([X, Y])=0,\ \forall X,Y\in\boldsymbol{h}. \tag{7}$$

В самом деле, алгебра Ли $\boldsymbol{h}$ нильпотентна индексу 2. Это означает, что $\boldsymbol{h}^1=[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}]\subset Z(\boldsymbol{h})$. Таким образом, $[\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}]\subset \operatorname{Ker} f$. Отметим также, что

$$U(fX, fY)=0,\ \forall X, Y \in \boldsymbol{h}. \qquad (8)$$

Это следует из леммы 1 и того, что образ f-структуры ортогонален ядру.

Вычислим композиционный тензор T, используя (2) и (3). Для выражения $\nabla_{fX}(f)fY$ с учетом леммы 1, а также равенств (4), (7) и (8) получим

$$\nabla_{fX}(f)fY = \nabla_{fX}(f^2Y) - f\nabla_{fX} fY = \frac{1}{2}[fX, f^2Y] + U(fX, f^2Y) - f(\frac{1}{2}[fX, fY] + U(fX, fY)) = \frac{1}{2}[fX, f^2Y].$$

Аналогично получим: $\nabla_{f^2X}(f)f^2Y = -\frac{1}{2}[f^2X, fY]$. Следовательно, композиционный тензор T имеет вид

$$T(X,Y) = \frac{1}{8} f([fX, f^2Y] + [f^2X, fY]).$$

Откуда в силу равенства (7) следует, что $T(X, Y)=0$ для любых $X, Y \in \boldsymbol{h}$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Каноническая f-структура, определенная равенством* (*6*), *является эрмитовой f-структурой на H*(*2,1*).

Доказательство. Согласно замечанию 2 $\mathrm{Ker} f = Z(\boldsymbol{h})$ и в силу теоремы 2 f-структура f является эрмитовой. Теорема доказана.

Теорема 4. *Тензор Нейенхёйса N*(*X, Y*) *для канонической f-структуры, определенной равенством* (*6*), *имеет на H*(*2,1*) *следующий вид:*

$$N(X, Y) = -[X, Y],\ \text{причем}\ N(fX, fY) = [X, Y]\ \text{для любых}\ X, Y \in \boldsymbol{h}.$$

Следовательно, данная f-структура не является ни интегрируемой, ни частично интегрируемой.

Доказательство. Так как центр алгебры $\boldsymbol{h}$ совпадает с ядром f-структуры f (см. замечание 2) и в силу равенства (7), тензор Нейенхёйса примет вид $N(X, Y)=[fX, fY]$.

Пусть $X = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i e_i$, $Y = \sum_{i=1}^{5} \beta_i e_i$ – разложение векторов X и Y по базису e_i алгебры Ли $\boldsymbol{h}$. Тогда $fX = -\alpha_2 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_5 e_4 - \alpha_4 e_5$, $fY = -\beta_2 e_1 + \beta_1 e_2 + \beta_5 e_4 - \beta_4 e_5$. Вычислим скобку Ли $[fX, fY] = (\alpha_5\beta_2 - \alpha_2\beta_5 + \beta_1\alpha_4 - \alpha_1\beta_4)e_3 = -[X, Y]$. Аналогично, вычисляя скобку Ли $[f^2X, f^2Y]$, получим: $N(fX, fY) = [f^2X, f^2Y] = [X, Y]$. Теорема доказана.

5. Группа H(2,1) как однородное Ф-пространство порядка 6

Аналогично п. 4 представим группу H(2,1) как однородное Ф-пространство порядка 6. Рассмотрим следующий автоморфизм ψ алгебры Ли $\boldsymbol{h}$:

$$\psi(e_1) = \frac{1}{2}e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_5,\ \psi(e_2) = -e_1,\ \psi(e_3) = -e_3,\ \psi(e_4) = \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_5,\ \psi(e_5) = e_4.$$

В данном случае $\psi^6=id$. Отметим, что ψ также согласован с евклидовой метрикой на $\boldsymbol{h}$. Воспользуемся формулами для канонических f-структур следствия 3. Имеем 4 канонические f-структуры:

$$f_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\psi - \psi^2 + \psi^4 - \psi^5),\ f_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\psi + \psi^2 - \psi^4 - \psi^5),\ f_3 = f_1 + f_2,\ f_4 = f_1 - f_2.$$

Замечание 3. Нетрудно показать, что $Z(\boldsymbol{h}) \subset \mathrm{Ker} f_i$, $i=1, 2$, и $Z(\boldsymbol{h}) = \mathrm{Ker} f_i$, $i=3, 4$.

Доказательство следующей теоремы следует из замечания 3 и теоремы 2.

Теорема 5. *Канонические f-структуры* f_1, f_2, f_3, f_4 *являются эрмитовыми f-структурами на H*(*2,1*).

Теорема 6. *Тензор Нейенхёйса N*(*X,Y*) *для f-структур* f_1, f_2, f_3, f_4 *равен соответственно:*

$$N_{f_1}(X,Y) = 0,\ N_{f_2}(X,Y) = 0,\ N_{f_3}(X,Y) = -[X,Y],\ N_{f_4}(X,Y) = [X,Y],$$

$\forall X, Y \in \boldsymbol{h}$. *Таким образом, структуры* f_1 *и* f_2 *являются интегрируемыми, в то время как структуры* f_3 *и* f_4 *таковыми не являются.*

Доказательство. Докажем соответствующее равенство для f-структуры f_4. В силу замечания 3 тензор Нейенхёйса, определенный для f-структур формулой (1), примет вид $N_{f_4}(X,Y) = [f_4X, f_4Y]$.

Пусть $X = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i e_i$, $Y = \sum_{i=1}^{5} \beta_i e_i$ – разложение векторов X и Y по базису e_i алгебры Ли $\boldsymbol{h}$. Тогда $f_4X = -\alpha_4 e_1 + \alpha_5 e_2 + \alpha_1 e_4 - \alpha_2 e_5$, $f_4Y = -\beta_4 e_1 + \beta_5 e_2 + \beta_1 e_4 - \beta_2 e_5$. Вычисляем скобку Ли

$[f_4X, f_4Y] = (-\alpha_5\beta_2 + \alpha_2\beta_5 - \beta_1\alpha_4 + \alpha_1\beta_4)e_3 = [X, Y]$. Аналогично доказываются соответствующие равенства для *f*-структур f_1, f_2, f_3. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Яно К., Кон М. CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях. М., 1990. С. 192.
2. Кириченко В. Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии. М., 1986. Т. 18. С. 25–71.
3. Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Однородные пространства: теория и приложения: монография. Ханты-Мансийск, 2008. С. 280.
4. Балащенко В. В., Степанов Н. А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах // Мат. сб. 1995. Т. 186. № 11. С. 3–34.
5. Ковальский О. Обобщенные симметрические пространства. М., 1984. С. 240.
6. Степанов Н. А. Основные факты теории φ-пространств // Известия вузов. Математика. 1967. № 3. С. 88–95.
7. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. Т. 2. М., 1981. С. 414.
8. Fernandez M., Ivanov S., Ugarte L., Villacampa R. Non-Kaehler heterotic-string compactifications with non-zero fluxes and constant dilaton // Commun. Math. Phys. 2009. Vol. 288. P. 677–697.
9. Шевалле К. Теория групп Ли: в 3 т. М., 1948. Т. 1. С. 315.
10. Рашевский П. К. Теорема о связности подгруппы односвязной группы Ли, перестановочной с каким-либо ее автоморфизмом // Тр. ММО. 1974. Т. 30. С. 3–22.

Поступила в редакцию 02.05.13.

Виталий Владимирович Балащенко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики.

Павел Андреевич Дубовик – преподаватель кафедры алгебры и геометрии Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка.

УДК 511.53+517.524

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ, Н. В. КОНДРАТЁНОК

КОНЕЧНЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ В ЕВКЛИДОВЫХ КОЛЬЦАХ

Для широкого класса евклидовых колец доказаны критерии существования разложения данного элемента поля частных евклидова кольца в обобщенную цепную дробь фиксированной длины по элементам кольца. Ключевая идея доказательства состоит в нахождении класса преобразований элемента поля частных, не изменяющих разрешимость диофантова уравнения с неизвестной цепной дробью в левой части, а также в использовании свойств дробных частей поля частных евклидова кольца. Для рассматриваемых евклидовых колец установлен аналог теоремы Кронекера о минимальной длине обобщенного алгоритма Евклида, а именно, минимальная длина обобщенного алгоритма Евклида равна длине алгоритма Евклида с выбором минимального по норме остатка на каждом шаге. Показано, что евклидовы кольца, рассматриваемые в статье, охватывают кольца целых чисел, целых гауссовых чисел, многочленов над полем.

Ключевые слова: евклидово кольцо; обобщенные цепные дроби; обобщенный алгоритм Евклида.

For a large class of Euclidean domains there are proved criteria of the existence of an expansion for a fixed element of fractions field of the Euclidean domain to a generalized continued fraction with the fixed length over domain's elements. The main idea of the proof consists in finding a class of transformations of the fractions field element that doesn't change the solvability of the Diophantine equation with unknown continued fraction in the left-hand side and in using the properties of fractional parts in the fractions field of the Euclidean domain. For the class of Euclidean domains there are obtained an analogue of the Kronecker theorem about the minimal length of the generalized Euclid algorithm, i.e. the minimal length of the generalized Euclid algorithm is equal to the length of the Euclid algorithm with choosing the residue with the minimal value of the norm on each step. There are shown that the Euclidean domains, which are considered in the paper, contain the rings of integers, Gaussian integers and polynomials over a field.

Key words: Euclidean domain; generalized continued fractions; generalized Euclid algorithm.

В работе исследуется существование разложения данного элемента поля частных евклидова кольца в обобщенную цепную дробь фиксированной длины по элементам кольца. Данные исследования тесно связаны с задачей о минимальности длины алгоритма Евклида и выбором наименьшего по норме остатка. Эта задача решена в работе [1] для колец целых чисел и многочленов над полем, в работе [2] – для кольца целых гауссовых чисел. В статьях [3, 4] установлено, что проблема о минимальности длины алгоритма Евклида имеет положительное решение во всех квадратичных мнимых евклидовых кольцах, за исключением кольца $Z[i\sqrt{11}]$. В [5] рассматриваются свойства алгоритма Евклида в произвольных евклидовых кольцах. В настоящей работе, в отличие от [1–4], цепные дроби и алгоритм Евклида изучаются в произвольных евклидовых кольцах. Основной результат, изложенный в статье, – критерии существования разложения в обобщенную цепную дробь фиксированной длины элемента поля частных евклидовых колец, удовлетворяющих приведенным ниже условиям *A* или *B*.

Пусть K – евклидово кольцо с нормой $\upsilon: K \to N \bigcup \{0, -\infty\}$. Через F обозначим поле частных кольца K. Предположим, что $m, n \in K$, $n \neq 0$, НОД$(m,n) = 1$. *Дробной частью* в F назовем функцию $\mathrm{fr}: F \to F$, удовлетворяющую следующим условиям: