УДК 519.8

*В. А. ЕМЕЛИЧЕВ, В. В. КОРОТКОВ*

# АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ НОРМЫ ГЕЛЬДЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ РЕШЕНИЙ

Рассматривается многокритериальная булева задача с линейными критериями, состоящая в поиске множества Парето. Исследуется тот тип устойчивости задачи, который является дискретным аналогом свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу точечно-множественного отображения, которое каждому набору параметров задачи ставит в соответствие множество ее эффективных решений. Получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости задачи в случае произвольной нормы Гельдера $l_p$, $1 \le p \le \infty$, заданной в пространстве решений задачи. Достижимость найденных оценок доказана путем указания соответствующих классов задач, для которых радиус устойчивости становится равным или нижней, или верхней оценке. В качестве следствий приводятся некоторые ранее опубликованные результаты.

***Ключевые слова:*** многокритериальная булева задача; линейный критерий; множество Парето; радиус устойчивости задачи; норма Гельдера, норма Чебышева.

We consider a multicriteria Boolean problem with linear criteria that finds Pareto set. We investigate a type of the problem stability such that is a discrete analogue of the upper Hausdorff semicontinuity property of point-set mapping, which puts in correspondence the set of efficient solutions to each point of the space of problem parameters. The lower and upper bounds of the stability radius of the problem in the case of any Hölder norm $l_p$, $1 \le p \le \infty$ in the space of problem solutions are obtained. The attainability of obtained bounds is proved by showing relevant classes of problems, for that the stability radius is equaling to the lower or upper bound. As a corollary we give some previously published results.

***Key words:*** multicriteria Boolean problem; linear criteria; Pareto set; stability radius of the problem; Hölder norm; Chebyshev norm.

В работе [1] найдены нижняя и верхняя достижимые оценки радиуса устойчивости многокритериальной линейной булевой задачи с лексико-графическим принципом оптимальности в случае нормы $l_1$ в пространстве решений. В данной статье проведен количественный анализ устойчивости той же многокритериальной задачи, но с паретовским принципом оптимальности в случае произвольной нормы Гельдера $l_p$, $1 \le p \le \infty$, заданной в пространстве решений задачи. Найдены достижимые оценки (снизу и сверху) такого радиуса. В качестве следствий приведены некоторые ранее известные результаты.

Пусть $\mathbf{R}^m$ – критериальное пространство, $\mathbf{R}^n$ – пространство решений, $C = [c_{ij}]$ – матрица размера $m \times n$ со строками $C_i \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m = \{1, 2, \dots, m\}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbf{E}^n$, $\mathbf{E} = \{0,1\}$, $|X| \ge 2$. Под $m$-критериальной булевой задачей с $n$ переменными

$$Z^m(C):\ Cx = (C_1x, C_2x, \dots, C_mx)^T \to \min_{x \in X}$$

будем понимать задачу поиска множества эффективных решений (множества Парето):

$$P^m(C) = \{x \in X:\ X(x, C) = \varnothing\},$$

где $X(x, C) = \{x' \in X:\ Cx \ge Cx'\ \&\ Cx \ne Cx'\}$.

В пространстве решений $\mathbf{R}^n$ зададим произвольную норму Гельдера $l_p$, $1 \le p \le \infty$, а в критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ – традиционную для подобных исследований (см., например, [2–5]) норму Чебышева $l_\infty$. Тем самым получаем

$$\|C\|_{p\infty} = \left\| (\|C_1\|_p, \|C_2\|_p, \dots, \|C_m\|_p) \right\|_\infty,$$

$$\|C_i\|_p = \begin{cases} \left( \sum\limits_{j \in N_n} |c_{ij}|^p \right)^{1/p}, & \text{если } 1 \le p < \infty, \\ \max\{|c_{ij}| : j \in N_n\}, & \text{если } p = \infty, \end{cases} \qquad i \in N_m.$$

Известно, что метрика $l_p$, заданная в пространстве $\mathbf{R}^n$, порождает метрику $l_q$ в сопряженном пространстве $(\mathbf{R}^n)^*$, причем числа $p$ и $q$ связаны условиями

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ 1 < p < \infty.$$

При этом, как обычно, полагаем $q = 1$, если $p = \infty$, и $q = \infty$, если $p = 1$. В этих предположениях будем допускать, что $1/p = 0$ при $p = \infty$.

В дальнейшем нам потребуется известное неравенство Гельдера

$$ab \le \|a\|_p \|b\|_q, \tag{1}$$

где $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T \in \mathbf{R}^n$.

Следуя [2, 6, 7], радиусом устойчивости задачи $Z^m(C)$, $m \geq 1$, к возмущениям параметров векторного критерия $Cx$ назовем число

$$\rho = \rho(m,n,p) = \begin{cases} \sup \Xi_p, & \text{если } \Xi_p \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } \Xi_p = \varnothing, \end{cases}$$

где

$$\Xi_p = \{\varepsilon > 0 : \forall C' \in \Omega_p(\varepsilon) \ \ (P^m(C + C') \subseteq P^m(C))\},$$

$$\Omega_p(\varepsilon) = \{C' \in \mathbf{R}^{m \times n} : \ \|C'\|_{p\infty} < \varepsilon\} -$$

множество возмущающих матриц. Тем самым радиус устойчивости задачи задает предельный уровень возмущений элементов матрицы $C$, не приводящих к появлению новых эффективных решений.

Легко понять, что при $P^m(C) = X$ радиус устойчивости задачи бесконечен. Задачу $Z^m(C)$, для которой $P^m(C) \neq X$, будем называть нетривиальной. Для такой задачи положим

$$\varphi(m,n,p) = \min_{x \notin P^m(C)} \max_{x' \in P^m(x,C)} \min_{i \in N_m} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_q},$$

где

$$P^m(x,C) = P^m(C) \cap X(x,C).$$

Очевидно, что $\varphi(m,n,p) \geq 0$.

**Теорема 1.** *При любых* $m, n \in \mathbf{N}$ *и* $p \in [1,\infty]$ *для радиуса устойчивости* $\rho(m,n,p)$ *многокритериальной нетривиальной задачи* $Z^m(C)$ *справедливы следующие оценки:*

$$\varphi(m,n,p) \leq \rho(m,n,p) \leq n^{1/p}\varphi(m,n,\infty).$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство $\rho \geq \varphi(m,n,p)$, которое очевидно при $\varphi(m,n,p) = 0$. Пусть $\varphi(m,n,p) > 0$ и $C' \in \Omega_p(\varphi(m,n,p))$. Тогда согласно определению числа $\varphi(m,n,p)$ для любого решения $x \notin P^m(C)$ существует такое эффективное решение $x' \in P^m(x,C)$, что выполняются неравенства

$$\frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_q} \geq \varphi(m,n,p) > \|C'\|_{p\infty} \geq \|C'_i\|_p, \ i \in N_m.$$

Отсюда, используя (1), получаем

$$(C_i + C'_i)(x - x') \geq C_i(x - x') - \|C'_i\|_p \|x - x'\|_q > 0, \quad i \in N_m.$$

Таким образом, $x$ не является эффективным решением задачи $Z^m(C + C')$. Следовательно, $P^m(C + C') \subseteq P^m(C)$ при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega_p(\varphi(m,n,p))$, т. е. $\rho \geq \varphi(m,n,p)$.

Далее докажем неравенство $\rho \leq n^{1/p}\varphi(m,n,\infty)$. Согласно определению числа $\varphi(m,n,\infty)$ существует такой вектор $x^0 \notin P^m(C)$, что для любого вектора $x \in P^m(x^0,C)$ найдется индекс $l = l(x) \in N_m$ с условием

$$C_l(x^0 - x) \leq \varphi(m,n,\infty)\|x^0 - x\|_1. \tag{2}$$

Теперь, полагая $\varepsilon > n^{1/p}\varphi(m,n,\infty)$, рассмотрим возмущающую матрицу $C^0 = [c^0_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$, элементы которой определим следующим образом:

$$c^0_{ij} = \begin{cases} -\delta, & \text{если } i \in N_m, \ x^0_j = 1, \\ \delta, & \text{если } i \in N_m, \ x^0_j = 0, \end{cases}$$

где $\varphi(m,n,\infty) < \delta < \varepsilon / n^{1/p}$. Тогда $\|C^0_i\|_p = n^{1/p}\delta = \|C^0\|_{p\infty}$, $i \in N_m$, $C^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$,

$$C^0_i(x^0 - x) = -\delta\|x^0 - x\|_1 < 0, \quad i \in N_m. \tag{3}$$

Отсюда, учитывая (2), имеем

$$(C_l + C^0_l)(x^0 - x) = C_l(x^0 - x) + C^0_l(x^0 - x) \leq (\varphi(m,n,\infty) - \delta)\|x^0 - x\|_1 < 0.$$

Поэтому получаем

$$\forall x \in P^m(x^0,C) \ \ (x \notin X(x^0, C + C^0)). \tag{4}$$

Пусть теперь $x \notin P^m(x^0,C)$. Возможны следующие два случая.

*Случай 1.* $Cx^0 = Cx$ . Тогда соотношения (3) влекут

$$(C_i + C_i^0)(x^0 - x) < 0, \quad i \in N_m.$$

*Случай 2*. Существует такой индекс $k \in N_m$, что $C_k x^0 < C_k x$ . Тогда, вновь используя (3), имеем $(C_k + C_k^0)(x^0 - x) < 0$ .

Тем самым $x \notin X(x^0, C + C^0)$ , если $x \notin X(x^0, C)$ . Это вместе с (4) дает $X^m(x^0, C + C^0) = \varnothing$ , т. е. $x^0$ является эффективным решением возмущенной задачи $Z^m(C + C^0)$ . Отсюда в связи с $x^0 \notin P^m(C)$ заключаем

$$\forall \varepsilon > n^{1/p}\varphi(m,n,\infty) \quad \exists C^0 \in \Omega_p(\varepsilon) \quad (P^m(C + C^0) \not\subseteq P^m(C)).$$

Следовательно, справедливо неравенство $\rho \le n^{1/p}\varphi(m,n,\infty)$ . Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекают ранее известные результаты.

*Следствие 1* [8]. $\rho(m,n,\infty) = \varphi(m,n,\infty)$ .

*Следствие 2* [9]. $\varphi(m,n,1) \le \rho(m,n,1) \le n\varphi(m,n,1)$ .

О достижимости нижней оценки $\varphi(m,n,p)$ при любом $p \in [1,\infty]$ свидетельствует следующая теорема.

**Теорема 2 [7].** *Если многокритериальная нетривиальная задача $Z^m(C)$ имеет единственное эффективное решение $x^0$, то при любых $m, n \in \mathbf{N}$ и $p \in [1,\infty]$ справедлива формула*

$$\rho(m,n,p) = \varphi(m,n,p).$$

Покажем, что при любом $p \in [1,\infty]$ верхняя оценка $n^{1/p}\varphi(m,n,\infty)$ достижима при .

**Теорема 3.** *При любом числе $p \in [1,\infty]$ существует такой класс скалярных задач $Z^1(C)$, что для радиуса устойчивости любой задачи из этого класса справедлива формула*

$$\rho' = \rho(1,n,p) = n^{1/p}\varphi(1,n,\infty). \tag{5}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 для доказательства равенства (5) достаточно указать класс задач с условием $\rho' \ge n^{1/p}\varphi(1,n,\infty)$ .

Пусть $X = \{x^*, x^1, x^2, \ldots, x^n\} \subset \mathbf{E}^n$ , где $x^* = (0,\ldots,0)^T \in \mathbf{R}^n$ , $x^j = e^j$ , $j \in N_n$ . Здесь $e^j$ – единичный вектор-столбец пространства $\mathbf{R}^n$ , т. е. $e^j$ – $j$ -й столбец единичной матрицы размера $n \times n$ . Положим $C = (-a,-a,\ldots,-a) \in \mathbf{R}^n$ , $a > 0$ . Тогда $x^* \notin P^1(C)$ , $x^j \in P^1(x^*, C)$ , $j \in N_n$ , $\varphi(1,n,\infty) = a$ . Пусть теперь $C' = (c_1', c_2', \ldots, c_n')$ – произвольная возмущающая вектор-строка из множества строк $\Omega_p(n^{1/p}a)$, т. е. $\|C'\|_p < n^{1/p}a$. Методом от противного легко доказать, что существует хотя бы один такой индекс $l \in N_n$ , что $|c_l'| < a$. Поэтому выводим

$$(C + C')(x^* - x^l) = a - c_l' > 0,$$

т. е. $x^* \notin P^1(C + C')$ для любой возмущающей строки $C' \in \Omega_p(n^{1/p}\varphi(1,n,\infty))$ . Следовательно, ввиду $x^* \notin P^1(C)$ получаем $\rho' \ge n^{1/p}\varphi(1,n,\infty)$ . Теорема 3 доказана.

*Замечание.* Особенностью используемой здесь нормы является известное неравенство Гельдера (см. (1)), позволившее обобщить некоторые ранее известные результаты.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф11К-095).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Емеличев В. А., Коротков В. В. О радиусе устойчивости лексикографической булевой задачи в случае метрики $l_1$ в пространстве решений // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2012. № 1. С. 117–119.

2. Сергиенко И. В., Шило В. П. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования. Киев, 2003.

3. Emelichev V., Podkopaev D. Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming // Discrete Optimization. 2010. Vol. 7. № 1-2. P. 48–63.

4. Емеличев В. А., Коротков В. В. Об одном типе устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями Вальда // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20. № 2. С. 10–17.

5. Емеличев В. А., Коротков В. В. О радиусе устойчивости эффективного решения векторной квадратичной булевой задачи на узкие места // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18. № 6. С. 3–16.

6. Емеличев В. А., Коротков В. В. Устойчивость векторной инвестиционной булевой задачи с критериями Вальда // Дискрет. мат. 2012. Т. 24. № 3. С. 3–16.

7. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. О радиусе устойчивости векторной задачи целочисленного линейного программирования в случае регулярности нормы в критериальном пространстве // Кибернетика и системный анализ. 2010. № 1. С. 82–89.

8. Емеличев В. А., Подкопаев Д. П. О количественной мере устойчивости векторной задачи целочисленного программирования // Журн. вычисл. мат. и мат. физ. 1998. Т. 38. № 11. С. 1801–1805.

9. Емеличев В. А., Коротков В. В. О мере устойчивости многокритериальной инвестиционной задачи с критериями эффективности Вальда // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 2012. Т. 32. № 6. С. 88–98.

Поступила в редакцию 16.09.13.

***Владимир Алексеевич Емеличев*** – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической кибернетики.
***Владимир Владимирович Коротков*** – ассистент кафедры общей математики и информатики.

*УДК 510.52*

*А. Н. КУРБАЦКИЙ, А. Г. ГОЛОВНЁВ*

# ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ЗАДАЧ MAX-2-SAT И MAX-2-CSP ОТНОСИТЕЛЬНО СРЕДНЕЙ СТЕПЕНИ ПЕРЕМЕННЫХ

Задачи MAX-2-SAT и MAX-2-CSP являются важными NP-трудными оптимизационными задачами, обобщающими многие задачи на графах. Несмотря на большое количество попыток, единственный алгоритм, решающий эти задачи за время, меньшее $2^n$, использует экспоненциальную память. Скотт и Соркин предложили алгоритм со временем работы $2^{n(1-\frac{2}{d+1})}$ и полиномиальной памятью для решения этих задач. Мы улучшаем эту оценку до $2^{n(1-\frac{10/3}{d+1})}$ и $2^{n(1-\frac{3}{d+1})}$ для задач MAX-2-SAT и MAX-2-CSP соответственно. Так как задача MAX-CUT является частным случаем задачи MAX-2-CSP, то предложенный алгоритм дает для нее новую оценку $2^{n(1-\frac{3}{d+1})}$.

***Ключевые слова:*** алгоритм; выполнимость; максимальная выполнимость; выполнимость условий; максимальная выполнимость условий.

MAX-2-SAT and MAX-2-CSP are important NP-hard optimization problems generalizing many graph problems. Despite many efforts, the only known algorithm (due to Williams) solving them in less than $2^n$ steps uses exponential space. Scott and Sorkin give an algorithm with $2^{n(1-\frac{2}{d+1})}$ time and polynomial space for these problems, where d is the average variable degree. We improve this bound to $2^{n(1-\frac{10/3}{d+1})}$ for MAX-2-SAT and $2^{n(1-\frac{3}{d+1})}$ for MAX-2-CSP. Since MAX-CUT is a special case of MAX-2-CSP, we also get an improved upper bound $2^{n(1-\frac{3}{d+1})}$ for MAX-CUT.

***Key words:*** algorithm; satisfiability; maximum satisfiability; maximum constraint satisfiability.

## Введение

### *Постановка задачи*

Задача MAX-SAT формулируется следующим образом: по заданной формуле в конъюнктивной нормальной форме (КНФ) определить максимальное число одновременно выполнимых клозов. MAX-2-SAT – задача определения максимального числа одновременно выполнимых клозов формулы, заданной в 2-КНФ (конъюнктивная нормальная форма с не более чем двумя литералами в каждом клозе). Задачи MAX-SAT и MAX-2-SAT являются NP-трудными задачами. Более того, на данный момент неизвестны алгоритмы, решающие задачу MAX-2-SAT за время $2^n$ с использованием полиномиальной памяти. Задача MAX-2-SAT является частным случаем задачи Maximum 2-constraint satisfaction (MAX-2-CSP). Задачу MAX-2-CSP можно сформулировать в терминах графа следующим образом. Задан граф $G$ на $n$ вершинах и $S$ – множество функций $\{0,1\}\to Z$ для каждой из вершин и $\{0,1\}^2\to Z$ для каждого ребра. Необходимо выбрать такое означивание переменных, которое максимизирует сумму значений $S$ по всем вершинам и ребрам. Заметим, что задачу MAX-2-SAT можно задать аналогичным способом. Отличия будут заключаться в том, что в задаче MAX-2-SAT в $S$ допустимы не все функции, а лишь дизъюнкции, и в том, что в случае MAX-2-SAT могут появиться кратные ребра. Далее будем использовать следующие обозначения: $n$ – количество вершин в графе, $m$ – количество ребер, $\Delta$ – максимальная степень вершины, $d = \frac{2m}{n}$ – средняя степень вершины. Отметим, что при подсчете степени вершины мы учитываем кратные ребра, то есть степень вершины – это количество 2-клозов, в которые входит соответствующая ей переменная.

### *Известные результаты*

Рассмотрим известные на данный момент алгоритмы решения поставленных задач. Алгоритм, предложенный Williams в [1], решает задачи MAX-2-SAT и MAX-2-CSP за время $O^*(2^{\frac{\omega n}{3}})$, где $\omega \approx 2.373$ – экспонента перемножения матриц. Однако данный алгоритм использует экспоненциальную память, что делает его неприменимым на практике. Далее будем рассматривать лишь полиномиальные по памяти алгоритмы.