

В случае когда выполняется (20), уравнения (9) и (13) являются уравнениями Риккати, а (16) – это второе уравнение Пенлеве. В случае (21) уравнения (11) и (15) – это уравнения Риккати, а (10) – второе уравнение Пенлеве. ⊗

Теорема 2. Система $G_{2,PII}$ имеет следующие семейства алгебраических решений:

$$(*) = (0, \frac{1}{2}(t_1 \pm \frac{\sqrt{2\alpha_1}}{\sqrt{t_1-t_2}}), \pm \sqrt{\frac{t_1-t_2}{2}}, \mp \frac{\alpha_1}{\sqrt{2(t_1-t_2)}}, t_1, t_2, \alpha_1, \frac{1}{2} - \alpha_1, \frac{1}{2}), \tag{22}$$

$$(*) = (\frac{1}{t_1}, \frac{t_1}{2}, i\sqrt{\frac{t_1-t_2}{2}} \operatorname{tg}(c - i\sqrt{\frac{t_1-t_2}{2}} \frac{t_1+2t_2}{3}), 0, t_1, t_2, 0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), \tag{23}$$

$$(*) = (\sqrt{\frac{t_1-t_2}{2}} \operatorname{tg}(c - \sqrt{\frac{t_1-t_2}{2}} \frac{2t_1+t_2}{3}), 0, \frac{1}{t_2}, \frac{t_2}{2}, t_1, t_2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0). \tag{24}$$

Доказательство. Подставим $q_1 = q_1(t_1)$ в (18), тогда сумма (14) и (16) примет вид $\alpha_1(2q_2(t_1, t_2)^2 - 2q_1(t_1)^2 + t_2 - t_1) = 0$. При $\alpha_1 = 0$ получим решения из леммы 2, а при $q_2(t_1, t_2) = \pm \sqrt{\frac{2q_1^2(t_1) + t_1 - t_2}{2}}$ уравнение (9) имеет вид $(1 \pm q_1(t_1) \sqrt{\frac{2}{2q_1^2(t_1) + t_1 - t_2}})q_1'(t_1) = 0$. Тогда $q_1(t_1) = c = \text{const}$. Подставив полученные значения в (18), получим, что сумма (10) и (16) имеет вид $(1 \pm \sqrt{\frac{2}{2c^2 + t_1 - t_2}}c)\alpha_1 + \alpha_2 - ct_1 - 2c^3 - \frac{1}{2} = 0$.

Тогда $c = 0, \alpha_2 = \alpha_1 - \frac{1}{2}$. Подставив это в (18), получим (22).

Решения (23) и (24) получаются из (20) и (21) решением уравнений (9) и (11) – уравнений Риккати с коэффициентами, являющимися комбинациями начальных решений *PII* [4]: $q_1(t_1) = \frac{1}{t_1}, \alpha_2 = \frac{3}{2}$ и $q_2(t_2) = \frac{1}{t_2}, \alpha_1 = -\frac{1}{2}$ соответственно. ⊗

При помощи преобразований (6)–(8) на основе решений (22)–(24) можно строить цепочки новых алгебраических решений. Также можно строить цепочки решений уравнений Риккати (9) и (11) на основе начальных решений (23) и (24).

Исследования, проведенные в работе, частично поддержаны грантом FP-7-PEOPLE-2012-IRSES-316338.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Sano Y. Symmetric Hamiltonian of the Garnier system and its degenerate systems in two variables // arXiv: 0706.0799. Vol. 3. P. 19.
2. Suzuki T. Affine Weyl group symmetry of the Garnier system // Funkcial. Ekvac. 48 (2005). P. 203–230.
3. Noumi M., Yamada Y. Higher order Painleve equations of type $A_n^{(3)}$ // Funkcial. Ekvac. 41 (1998). P. 483–503.
4. Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. Painleve Differential Equations in the Complex Plane // Walter de Gruyter. 2002. P. 114.

Поступила в редакцию 05.09.13.

Валерий Иванович Громак – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений.

Александр Игоревич Лапуцкий – аспирант кафедры дифференциальных уравнений. Научный руководитель – В. И. Громак.

УДК 681.3.06:519

Н. С. КОВАЛЕНКО, П. А. ПАВЛОВ

МОДЕЛЬ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ОБРАБОТКИ НЕОДНОРОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ МАКРОКОНВЕЙЕРНОГО ТИПА

Предлагается математическая модель организации вычислений неоднородных конкурирующих процессов в многопроцессорных системах макроконвейерного типа и решение задач определения характеристик такой организации по времени реализации процессов при ограниченном числе каналов обмена. Предлагаемая модель включает следующие основные параметры: число процессоров, процессов, блоков и каналов обмена; матрицы времен счета и обмена; условия взаимодействия процессов, процессоров, блоков и каналов обмена; синхронные и асинхронный режимы взаимодействия процессов, процессоров и каналов. В условиях предлагаемой модели получены аналитические методы и формулы расчета минимального общего времени реализации заданных объемов вычислений при ограниченном числе каналов обмена в условиях асинхронного режима взаи-

действия процессов, процессоров и каналов. Полученные формулы являются отправной точкой для решения оптимизационных задач по параметрам модели, а также задач балансировки времен счета и обмена, числа каналов и процессоров.

Ключевые слова: параллелизм; программный ресурс; многопроцессорная система; масштабируемость; макроконвейер; структурирование.

The mathematical model of the organization of calculations of non-uniform competing processes in the multiprocessor systems of makrokonveyerny type and the solution of problems of definition of characteristics of such organization on time of realization of processes is offered at limited number of channels of an exchange. The offered model includes the following key parameters: number of processors, processes, blocks and exchange channels; matrixes of times of the account and exchange; conditions of interaction of processes, processors, blocks and exchange channels; synchronous and asynchronous modes of interaction of processes, processors and channels. In the conditions of offered model analytical methods and formulas of calculation of the minimum general time of realization of the set volumes of calculations are received at limited number of channels of an exchange in the conditions of an asynchronous mode of interaction of processes, processors and channels. The received formulas are a starting point for the solution of optimizing tasks on model parameters, and also problems of balancing of times of the account and an exchange, number of channels and processors.

Key words: parallelism; program resource; multiprocessor system; scalability; macroconveyor; structuring.

В настоящее время среди наиболее перспективных концепций параллельной обработки – *макроконвейерная* организация вычислений над структурами данных. Этот подход впервые предложен в начале 80-х годов прошлого века академиком В. М. Глушковым и его учениками [1]. Интерес к этой концепции постоянно растет в связи с развитием и широким использованием локальных и глобальных сетей, созданием вычислительных многопроцессорных систем (МС) и комплексов, сетевого аппаратного и прикладного программного обеспечения. Основная идея концепции *макроконвейерной* организации вычислений заключается в том, что при распараллеливании и распределении вычислений между процессорами (процессорными узлами) «каждому отдельному процессору на очередном шаге вычислений дается такое задание, которое позволяет ему длительное время работать автономно без взаимодействия с другими процессорами» [1]. Уменьшение числа и объемов обмена сообщениями, которыми обмениваются параллельно работающие узлы, как правило, приводит к уменьшению общего времени выполнения заданных объемов вычислений, что является одним из главных критериев качества распараллеливания вычислений.

В работе предлагается математическая модель организации вычислений *неоднородных* конкурирующих процессов в многопроцессорных системах макроконвейерного типа, а также решение задач нахождения числовых характеристик такой организации процессов по времени их реализации при ограниченном числе каналов обмена.

1. Метод структурирования программных ресурсов и макроконвейерная обработка. *Структурирование (декомпозиция)* – это основной способ уменьшения сложности больших задач, программ, систем и т. д. Основная идея состоит в структурировании программного ресурса на блоки Q_1, Q_2, \dots, Q_s специальным способом и организации параллельного использования этих блоков множеством конкурирующих процессов [2].

Макроконвейерная технология вычислений предполагает декомпозицию структуры данных на большие информационно-слабозависимые подструктуры, способные занимать процессор длительное время. Работа процессоров при этом организуется таким образом, чтобы обмен данными между ними занимал небольшое время по сравнению с временем вычислений.

Пусть PR – программный ресурс, который могут использовать два и более конкурирующих процесса, причем их число $n \geq 2$; $p \geq 2$ – число процессоров макроконвейерной системы, имеющих как локальную, так и общую память. Применительно к программным ресурсам, одновременно используемым множеством процессов, при макроконвейерной обработке возможны следующие способы организации вычислений.

1. Каждому i -му процессу, $i = \overline{1, n}$, предоставляется отдельная копия программного ресурса PR. При такой стратегии, в случае $p \geq n$, все n процессов могут выполняться одновременно при условии, что в МС достаточно памяти для размещения n копий программного ресурса (в случае с общей памятью) или память каждого процессора МС вмещает отдельную копию программного ресурса (в случае с распределенной памятью). Если же $p < n$, то возможна организация циклического выполнения n процессов группами по p .

2. Программный ресурс PR может быть структурирован на блоки Q_1, Q_2, \dots, Q_s , а вычисления в этом случае организуются в соответствии с методом структурирования. Эта стратегия может применяться при организации вычислений в МС всякий раз, если имеются ограничения на оперативную память, как общую, так и память каждого процессора.

Заметим, что вторая стратегия является более предпочтительной при организации вычислений в МС конвейерного и макроконвейерного типов с целью эффективного использования основных вычислительных ресурсов, а также при организации процессов в операционных системах, при распараллеливании и конвейеризации циклов.

Пусть МС характеризуется следующими параметрами: p – число процессоров, каждый из которых имеет собственную локальную память, $p \geq 2$; k – число каналов, через которые каждый из процессоров имеет доступ к внешней памяти, общей для всех процессоров, $k \geq 1$.

Предполагается, что в МС выполняется n процессов, $n \geq 2$, каждый из которых состоит из s блоков обмена и s блоков счета, $s \geq 1$. Времена обмена и счета для каждого из процессов представлены в виде матриц $t = [t_{ij}]_{n \times s}$ и $T = [T_{ij}]_{n \times s}$ размерности $n \times s$, в которых i -е строки соответствуют i -му процессу.

Взаимодействие процессов с каналами и процессорами характеризуется следующими условиями: 1) к выполнению одновременно готовы p процессов из n ; 2) в каждый момент времени k процессов из n , одновременно протекающих в МС, выполняются синхронно, остальные в очереди ждут освобождения каналов; 3) во время обмена каждый процесс монополизует один и тот же канал, во время счета – процессор; 4) очередной j -й блок счета на каждом процессоре выполняется только после завершения соответствующего j -го блока обмена, а каждый $(j+1)$ -й блок обмена выполняется после завершения j -го блока счета; 5) процессы считаются равноприоритетными, а режим работы каналов является циклическим.

Условия 1–5 определяют *асинхронный* режим взаимодействия процессов, каналов и процессоров, который допускает как простои каналов из-за занятости процессоров, так и простои процессоров из-за занятости каналов обмена.

В этих предположениях рассмотрим решение задач получения математических соотношений для вычисления минимального общего времени реализации множества конкурирующих процессов.

2. Время реализации асинхронных процессов в макроконвейерных системах с одним каналом обмена. Обозначим через $T_n(k)$ общее время выполнения всех n процессов, которые используют k каналов. Заметим, что при $p \geq k \geq n$ в рамках принятой модели макроконвейерных вычислений $T_n(k)$ составит величину $T_n(k) = T_n(n) = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^s (t_{ij} + T_{ij})$. Если окажется, что $p > k > n$, то $k - n$ каналов будут не задействованы, а $p - n$ процессоров будут простаивать.

Пусть имеется один канал, т. е. $k = 1$. Предположим, что $n \leq p$. На рис. 1 приведена несовмещенная диаграмма Ганта, отображающая взаимодействие n процессов (номер процесса изображен справа в прямоугольнике) с одним каналом и p процессорами. Причем каждый процесс состоит из $2s$ блоков, $s \geq 1$, которые периодически повторяются в порядке обмен, счет. При этом осуществляется конвейеризация каждого из блоков счета по всем n процессорам с одновременным выполнением n блоков счета.

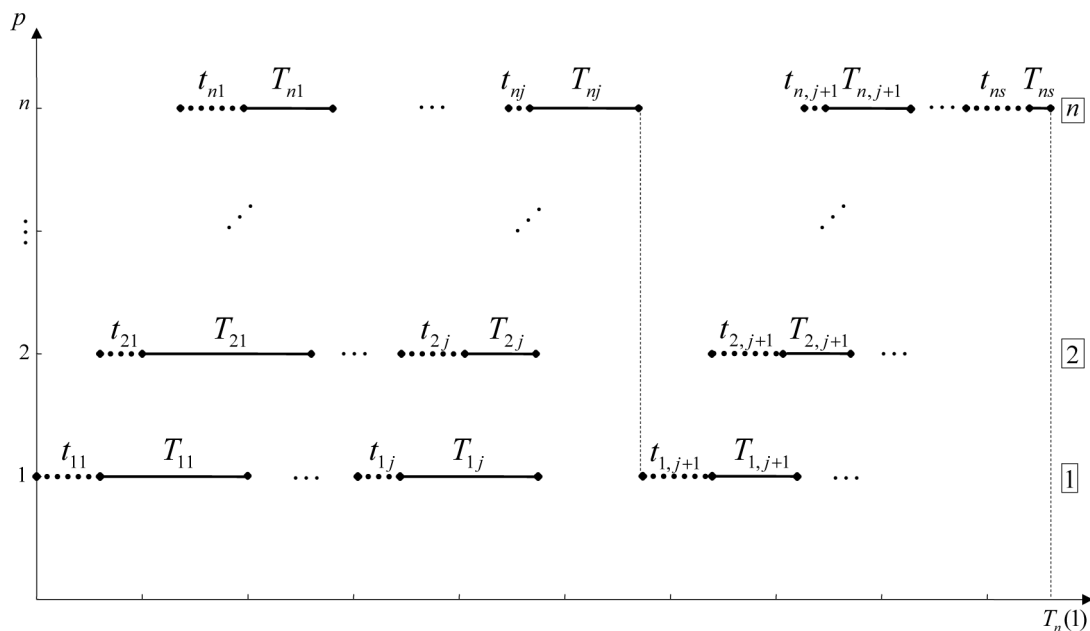


Рис. 1. Несовмещенная диаграмма Ганта с одним каналом обмена

Из анализа диаграммы следует, что $T_n(1)$ можно существенно сократить, если воспользоваться совмещением соседних диаграмм Ганта, начиная со второй, справа налево на максимально возможную величину, не нарушающую условий 1–5. Для этого необходимо составить расписание моментов начала выполнения j -го блока обмена, $j = \overline{1, s}$, для i -го процесса, $i = \overline{1, n}$ [3].

Анализируя две соседние диаграммы Ганта (см. рис. 1), соответствующие j -му и $(j+1)$ -му блокам обмена и счета, с временами t_{ij} , T_{ij} и $t_{i,j+1}$, $T_{i,j+1}$ соответственно, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, s-1}$, видно, что моменты

начала выполнения *первого* блока обмена для каждого процесса определяются из соотношений:

$$sb_{11} = 0, sb_{21} = sb_{11} + t_{11}, \dots, sb_{i1} = sb_{i-1,1} + t_{i-1,1}, \dots, sb_{n1} = sb_{n-1,1} + t_{n-1,1};$$

для *второго* блока обмена:

$$sb_{12} = \max(sb_{11} + t_{11} + T_{11}, sb_{31} + t_{31}), sb_{22} = \max(sb_{21} + t_{21} + T_{21}, sb_{12} + t_{12}), \dots,$$

$$sb_{i2} = \max(sb_{i1} + t_{i1} + T_{i1}, sb_{i-1,2} + t_{i-1,2}), \dots, sb_{n2} = \max(sb_{n1} + t_{n1} + T_{n1}, sb_{n-1,2} + t_{n-1,2}); \dots;$$

для *s-го* блока обмена:

$$sb_{1s} = \max(sb_{1,s-1} + t_{1,s-1} + T_{1,s-1}, sb_{3,s-1} + t_{3,s-1}), sb_{2s} = \max(sb_{2,s-1} + t_{2,s-1} + T_{2,s-1}, sb_{1s} + t_{1s}), \dots,$$

$$sb_{i3} = \max(sb_{i,s-1} + t_{i,s-1} + T_{i,s-1}, sb_{i-1,s} + t_{i-1,s}), \dots, sb_{ns} = \max(sb_{n,s-1} + t_{n,s-1} + T_{n,s-1}, sb_{n-1,s} + t_{n-1,s}).$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Общее время выполнения n ($n \geq 2$) процессов p ($p \geq 2$) процессорами, конкурирующими за использование одного канала, в случае $n \leq p$ определяется по формуле*

$$T_n(1) = \max_{1 \leq i \leq n} (sb_{is} + t_{is} + T_{is}), \tag{1}$$

где sb_{ij} – моменты начала выполнения j -го блока обмена для i -го процесса, определяемые из соотношений:

$$sb_{11} = 0, sb_{i1} = sb_{i-1,1} + t_{i-1,1}, sb_{ij} = \max(sb_{1,j-1} + t_{1,j-1} + T_{1,j-1}, sb_{n,j-1} + t_{n,j-1}), \tag{2}$$

$$sb_{ij} = \max(sb_{i,j-1} + t_{i,j-1} + T_{i,j-1}, sb_{i-1,j} + t_{i-1,j}), i = \overline{2, n}, j = \overline{2, s}.$$

В результате совмещения диаграмма Ганта будет иметь вид (рис. 2):

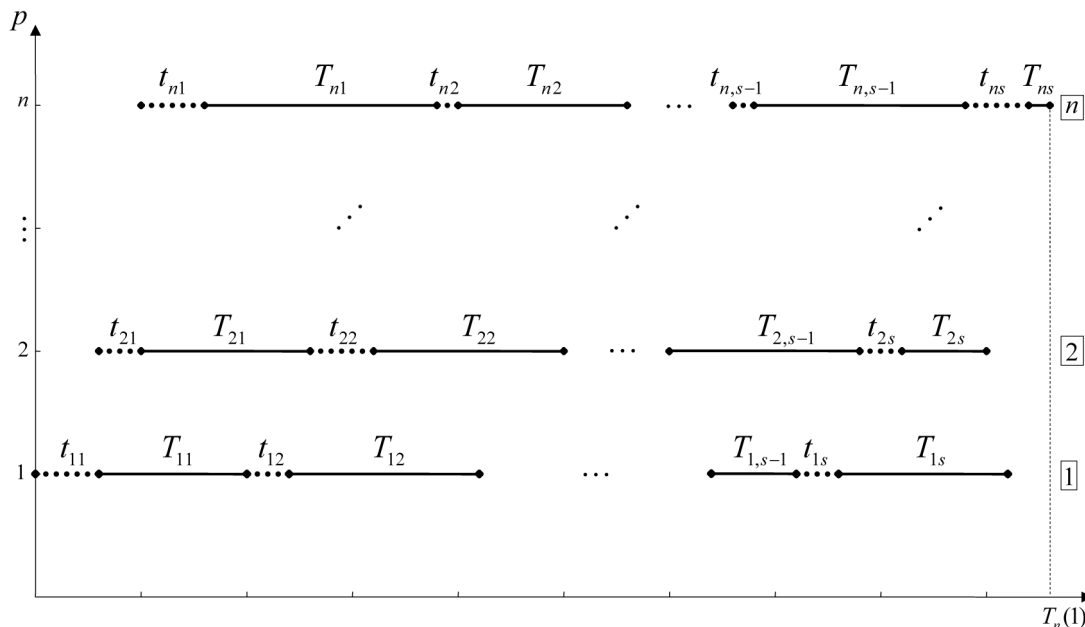


Рис. 2. Совмещенная диаграмма Ганта с одним каналом обмена

3. Макроконвейерные системы с ограниченным числом каналов обмена. Из физических соображений наибольший интерес в рамках концепции макроконвейерных вычислений представляет случай ограниченного числа каналов, т. е. когда $k \ll n, n = mk, m > 1$, что означает, что процессы конкурируют за использование каналов. Будем считать, что $n \leq p$. Рассмотрим следующие способы взаимодействия процессов с каналами и процессорами.

При *первом способе* каждый g -й канал, $g = \overline{1, k}$, обслуживает очередные m процессов, которые выполняются на m процессорах, т. е. 1 -й канал обслуживает процессы с номерами $1, 2, \dots, m$, 2 -й – с номерами $m+1, m+2, \dots, 2m$, k -й – с номерами $(k-1)m+1, (k-1)m+2, \dots, n$. На рис. 3 показано взаимодействие процессов с каналами и процессорами после совмещения.

Теорема 2. *Общее время выполнения p процессорами ($p \geq 2$) $n = mk$ ($m > 1$) процессов, которые конкурируют за использование k каналов ($k \geq 1$), в случае $n \leq p$ определяется из соотношения*

$$T_n(k) = \max_{1 \leq g \leq k} T_m^g(1) = \max_{1 \leq g \leq k} \left(\max_{(g-1)m+1 \leq i \leq gm} (sb_{is} + t_{is} + T_{is}) \right), \tag{3}$$

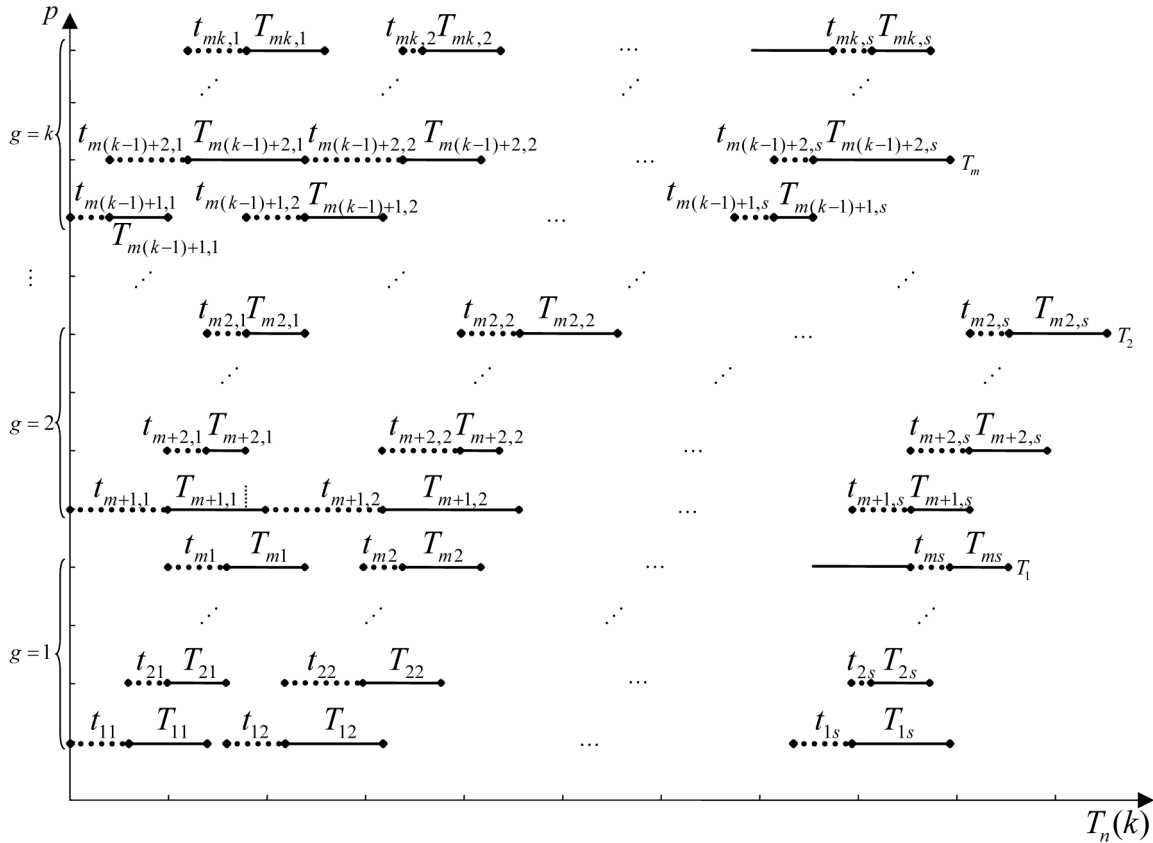


Рис. 3. Первый способ взаимодействия процессов, каналов и процессоров

где sb_{ij} – моменты начала выполнения j -го блока обмена для i -го процесса, определяемые из соотношений

$$sb_{gm+1,1} = 0, \quad g = \overline{0, k-1},$$

$$sb_{i1} = sb_{i-1,1} + t_{i-1,1}, \quad sb_{(g-1)m+1,j} = \max(sb_{(g-1)m+1,j-1} + t_{(g-1)m+1,j-1} + T_{(g-1)m+1,j-1}, sb_{mg,j-1} + t_{mg,j-1}),$$

$$sb_{ij} = \max(sb_{i,j-1} + t_{i,j-1} + T_{i,j-1}, sb_{i-1,j} + t_{i-1,j}), \quad i = \overline{(g-1)m+2, gm}, \quad j = \overline{2, s}, \quad g = \overline{1, k}.$$

Доказательство теоремы следует из того факта, что каждый g -й канал, $g = \overline{1, k}$, согласно формулам (1)–(2), обслуживает группу из m процессов m процессорами за время $T_m^g(1)$, определяемое по формулам:

$$T_m^1(1) = \max_{1 \leq i \leq m} (sb_{is} + t_{is} + T_{is}),$$

где $sb_{11} = 0$, $sb_{i1} = sb_{i-1,1} + t_{i-1,1}$, $sb_{1j} = \max(sb_{1,j-1} + t_{1,j-1} + T_{1,j-1}, sb_{mg,j-1} + t_{mg,j-1})$,

$$sb_{ij} = \max(sb_{i,j-1} + t_{i,j-1} + T_{i,j-1}, sb_{i-1,j} + t_{i-1,j}), \quad i = \overline{2, m}, \quad j = \overline{2, s};$$

$$T_m^2(1) = \max_{m+1 \leq i \leq 2m} (sb_{is} + t_{is} + T_{is}),$$

где $sb_{m+1,1} = 0$, $sb_{i1} = sb_{i-1,1} + t_{i-1,1}$, $sb_{m+1,j} = \max(sb_{m+1,j-1} + t_{m+1,j-1} + T_{m+1,j-1}, sb_{2m,j-1} + t_{2m,j-1})$,

$$sb_{ij} = \max(sb_{i,j-1} + t_{i,j-1} + T_{i,j-1}, sb_{i-1,j} + t_{i-1,j}), \quad i = \overline{m+2, 2m}, \quad j = \overline{2, s}; \dots;$$

$$T_m^k(1) = \max_{(k-1)m+1 \leq i \leq mk} (sb_{is} + t_{is} + T_{is}),$$

где $sb_{(k-1)m+1,1} = 0$, $sb_{i1} = sb_{i-1,1} + t_{i-1,1}$, $sb_{(k-1)m+1,j} = \max(sb_{(k-1)m+1,j-1} + t_{(k-1)m+1,j-1} + T_{(k-1)m+1,j-1}, sb_{mk,j-1} + t_{mk,j-1})$,

$$sb_{ij} = \max(sb_{i,j-1} + t_{i,j-1} + T_{i,j-1}, sb_{i-1,j} + t_{i-1,j}), \quad i = \overline{(k-1)m+2, mk}, \quad j = \overline{2, s}.$$

Следовательно, общее время $T_n(k)$ будет равно $\max_{1 \leq g \leq k} T_m^g(1)$.

Рассмотрим интерпретацию формул (3) и (4) на числовом примере.

Пример. Пусть $n = p = 9$, $k = 3$, $s = 5$, а времена обмена и счета заданы матрицами:

$$t_{9 \times 5} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad T_{9 \times 5} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 4 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Тогда каждый из трех каналов будет обслуживать группу из трех процессов, т. е. $m = 3$.

Пусть $g = 1$, тогда $j = \overline{2,5}$, $i = 2,3$. По формулам (4) находим моменты начала выполнения блоков обмена для 1, 2 и 3 процессов, обслуживаемых *первым* каналом:

$$sb_{11} = 0, sb_{21} = 3, sb_{31} = 5, sb_{12} = 8, sb_{22} = 11, sb_{32} = 15, sb_{13} = 17, sb_{23} = 19, sb_{33} = 24, \\ sb_{14} = 25, sb_{24} = 30, sb_{34} = 33, sb_{15} = 37, sb_{25} = 40, sb_{35} = 43.$$

Используя (3), находим минимальное общее время выполнения процессов *первым* каналом:

$$T_3^1(1) = \max(37 + 3 + 5, 40 + 1 + 3, 43 + 2 + 3) = 48.$$

Для $g = 2$ $j = \overline{2,5}$, а $i = 5,6$. Тогда для 4, 5 и 6 процессов, обслуживаемых *вторым* каналом, моменты начала выполнения блоков обмена:

$$sb_{41} = 0, sb_{51} = 5, sb_{61} = 7, sb_{42} = 10, sb_{52} = 16, sb_{62} = 20, sb_{43} = 23, sb_{53} = 26, sb_{63} = 29, \\ sb_{44} = 33, sb_{54} = 35, sb_{64} = 37, sb_{45} = 40, sb_{55} = 43, sb_{65} = 46.$$

Тогда $T_3^2(1) = \max(40 + 3 + 3, 43 + 3 + 4, 46 + 2 + 5) = 53$.

Для $g = 3$ $j = \overline{2,5}$, а $i = 8,9$. Для *третьего* канала имеем

$$sb_{71} = 0, sb_{81} = 2, sb_{91} = 6, sb_{72} = 9, sb_{82} = 12, sb_{92} = 17, sb_{73} = 18, sb_{83} = 21, sb_{93} = 24, \\ sb_{74} = 26, sb_{84} = 28, sb_{94} = 30, sb_{75} = 34, sb_{85} = 36, sb_{95} = 39; \\ T_3^3(1) = \max(34 + 2 + 2, 36 + 2 + 7, 39 + 2 + 3) = 45.$$

Таким образом, общее время выполнения 9 процессов на 9 процессорах, использующих 3 канала, составит: $T_9(3) = \max(48, 53, 45) = 53$.

На рис. 4 приведена совмещенная диаграмма Ганта для примера 2, отображающая взаимодействие в МС 9 процессов с 3 каналами и 9 процессорами.

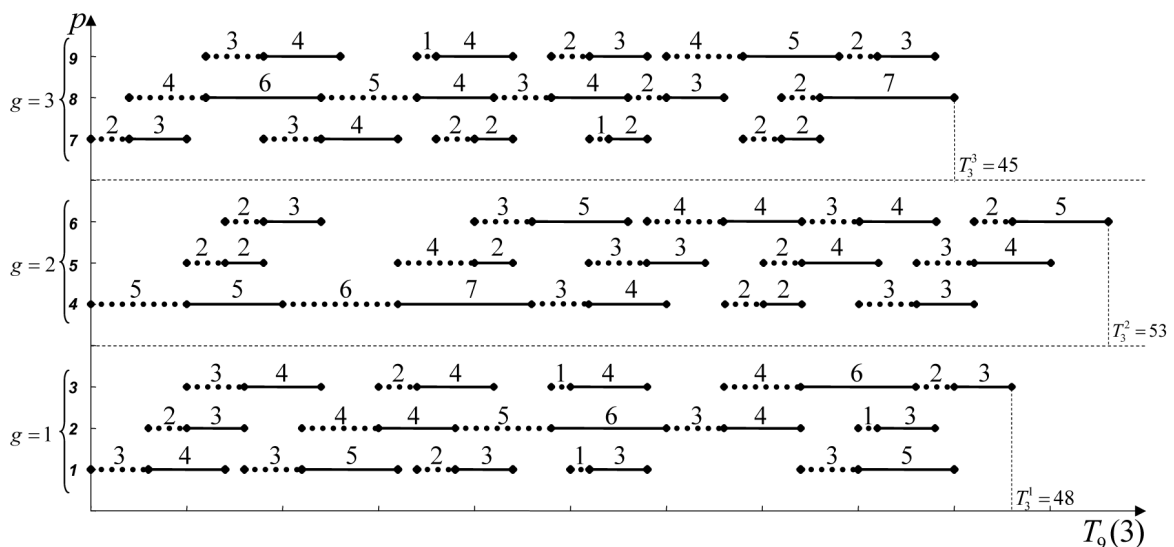


Рис. 4. Диаграмма Ганта (9 процессов, 3 канала)

При втором способе взаимодействия процессов, каналов и процессоров все множество из n процессов разбивается на k групп по m процессов в каждой. Причем каждый g -й канал, $g = \overline{1, k}$, обслуживает группу из m процессов с номерами $(l-1)k + g$, где $l = \overline{1, m}$.

В этом случае, согласно формулам (1)–(2), время, затраченное на выполнение каждой группы из m процессов m процессорами каждым g -м каналом, $g = \overline{1, k}$, составит:

$$T_m^1(1) = \max_{1 \leq l \leq m} (sb_{[(l-1)k+1],s} + t_{[(l-1)k+1],s} + T_{[(l-1)k+1],s}),$$

где $sb_{11} = 0$, $sb_{lk+1,1} = sb_{[(l-1)k+1],1} + t_{[(l-1)k+1],1}$,

$$sb_{[(l-1)k+1],j} = \max(sb_{[(l-1)k+1],j-1} + t_{[(l-1)k+1],j-1} + T_{[(l-1)k+1],j-1}, sb_{lk+1,j-1} + t_{lk+1,j-1}),$$

$$sb_{lk+1,j} = \max(sb_{lk+1,j-1} + t_{lk+1,j-1} + T_{lk+1,j-1}, sb_{[(l-1)k+1],j} + t_{[(l-1)k+1],j}), \quad l = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{2, s};$$

$$T_m^2(1) = \max_{1 \leq l \leq m} (sb_{[(l-1)k+2],s} + t_{[(l-1)k+2],s} + T_{[(l-1)k+2],s}),$$

где $sb_{21} = 0$, $sb_{lk+2,1} = sb_{[(l-1)k+2],1} + t_{[(l-1)k+2],1}$,

$$sb_{[(l-1)k+2],j} = \max(sb_{[(l-1)k+2],j-1} + t_{[(l-1)k+2],j-1} + T_{[(l-1)k+2],j-1}, sb_{lk+2,j-1} + t_{lk+2,j-1}),$$

$$sb_{lk+2,j} = \max(sb_{lk+2,j-1} + t_{lk+2,j-1} + T_{lk+2,j-1}, sb_{[(l-1)k+2],j} + t_{[(l-1)k+2],j}), \quad l = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{2, s}; \dots;$$

$$T_m^k(1) = \max_{1 \leq l \leq m} (sb_{lk,s} + t_{lk,s} + T_{lk,s}),$$

где $sb_{k1} = 0$, $sb_{(l+1)k,1} = sb_{lk,1} + t_{lk,1}$, $sb_{lk,j} = \max(sb_{lk,j-1} + t_{lk,j-1} + T_{lk,j-1}, sb_{(l+1)k,j-1} + t_{(l+1)k,j-1})$,

$$sb_{(l+1)k,j} = \max(sb_{(l+1)k,j-1} + t_{(l+1)k,j-1} + T_{(l+1)k,j-1}, sb_{lk,j} + t_{lk,j}), \quad l = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{2, s}.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Общее время выполнения p процессорами ($p \geq 2$) $n = mk$ ($m > 1$) процессов, которые конкурируют за использование k каналов ($k \geq 1$), в случае $n \leq p$ определяется из соотношения*

$$T_m^g(1) = \max_{1 \leq l \leq m} (sb_{[(l-1)k+g],s} + t_{[(l-1)k+g],s} + T_{[(l-1)k+g],s}),$$

где sb_{ij} – моменты начала выполнения j -го блока обмена для i -го процесса, определяемые из соотношений:

$$sb_{g1} = 0, \quad sb_{lk+g,1} = sb_{[(l-1)k+g],1} + t_{[(l-1)k+g],1},$$

$$sb_{[(l-1)k+g],j} = \max(sb_{[(l-1)k+g],j-1} + t_{[(l-1)k+g],j-1} + T_{[(l-1)k+g],j-1}, sb_{lk+g,j-1} + t_{lk+g,j-1}),$$

$$sb_{lk+g,j} = \max(sb_{lk+g,j-1} + t_{lk+g,j-1} + T_{lk+g,j-1}, sb_{[(l-1)k+g],j} + t_{[(l-1)k+g],j}), \quad l = \overline{1, m-1}, \quad j = \overline{2, s}, \quad g = \overline{1, k}.$$

Построенная модель организации макроконвейерных вычислений над структурами данных при ограниченном числе каналов обмена и разработанные аналитические методы расчета общего времени выполнения множества неоднородных конкурирующих процессов являются основой для постановки и решения ряда важных практических задач по расчету оптимальной балансировки числа процессоров и каналов, оптимизации числа блоков счета и обмена, минимизации общего времени выполнения процессов и др.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Капитонова Ю. В., Летичевский А. А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. М., 1988.
2. Коваленко Н. С., Павлов П. А. Математическое моделирование параллельных процессов // LAP Lambert Academic Publishing GmbH. Saarbrücken, 2011.
3. Ганаев В. С., Сотсков Ю. Н., Струсевич В. А. Теория расписаний. Многостадийные системы. М., 1989.

Поступила в редакцию 18.09.13.

Николай Семенович Коваленко – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики БГЭУ, профессор кафедры общей математики и информатики БГУ.

Павел Александрович Павлов – кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики и информационных технологий Полесского государственного университета (г. Пинск).