

приемлемым для задач, носящих прикладной характер. Отметим также, что задачи, связанные с рассмотрением кубически анизотропных твердых деформируемых тел, недостаточно полно изучены к настоящему времени. В связи с этим проведенное исследование вносит определенный вклад в изучение такого рода твердых деформируемых тел.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Ландау Л. Д., Лифшиц И. М. Теория упругости. М., 1987.
2. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М., 1981.
3. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. Киев, 1982.
4. Каюк Я. Ф. Некоторые вопросы методов разложения по параметру. Киев, 1980.
5. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М., 1975.
6. Новацкий В. Теория упругости. М., 1971.

Поступила в редакцию 09.06.13.

Михаил Анатольевич Журавков – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики, первый проректор.

Сергей Михайлович Босяков – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики.

Игнат Михайлович Мартыненко – ассистент кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета.

УДК 539.3

В. В. КОРОЛЕВИЧ (ЧЕХИЯ), Д. Г. МЕДВЕДЕВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА 2-го РОДА В ЗАДАЧАХ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ ДИСКОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В данной работе решается в общем виде задача вынужденных нерезонансных несимметричных малых изгибных колебаний полярно-ортотропных дисков переменной толщины. Дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее вынужденные изгибные колебания диска под воздействием гармонической поперечной нагрузки, сводится сначала к дифференциальному уравнению в частных производных для амплитуды прогибов. Затем амплитуды прогибов раскладываются в ряды Фурье по угловой координате. В результате получается бесконечная система неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка для радиальных функций амплитуды прогибов. Данные дифференциальные уравнения сводятся к линейным интегральным уравнениям Вольтерра 2-го рода. Решения этих интегральных уравнений записываются с использованием резольвенты. Приводятся расчетные формулы для изгибающих и крутящих моментов, поперечных усилий и функции прогиба, а также формулы расчета нормальных и касательных динамических напряжений в диске. В случае нулевой поперечной нагрузки имеем задачу расчета спектра частот свободных колебаний диска.

Ключевые слова: анизотропия; цилиндрическая ортотропия; дифференциальные и интегральные уравнения изгибных колебаний; резольвента; изгибающие и крутящие моменты; поперечные силы; функция прогиба; нормальные и касательные динамические напряжения; свободные колебания диска.

In this work is solved in general form the problem of forced non-resonant asymmetrical small flexural vibrations of polar-orthotropic disks of variable thickness. A differential equation in partial derivatives, describing the forced flexural vibrations of the disk under the influence of a harmonic transverse loading, comes down at first to the differential equation in partial derivatives for the amplitude of bending. Then the amplitude of bending are laid out in Fourier series by the angular coordinate. As a result it turns out in an infinite system of inhomogeneous ordinary differential equations of the 4-th kind for radial functions of the amplitude of bending. Given differential equations come down to linear Volterra integral equations of the 2-nd kind. Solutions of these integral equations are written using the resolvent. The calculated formulas for bending moments and torsion moments, shear forces, for the function of bending and formulas for calculating the normal and tangential dynamic stresses in the disk are given. In the case of zero transverse loading have the problem of calculating the spectrum of free vibrations of disc.

Key words: anisotropy; cylindrical orthotropy; differential and integral equations of bending vibrations; resolvent; bending and torsional moments; shear forces; bending function; normal and tangential dynamic stresses; free vibrations of disc.

Рассмотрим задачу несимметричных малых изгибных колебаний тонкого кольцевого анизотропного диска переменной толщины $h(r)$, зависящей от радиального расстояния r . Диск изготовлен из материала, обладающего цилиндрической анизотропией, причем ось анизотропии совпадает с геометрической осью диска, и в каждой точке имеются три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии – так называемая цилиндрическая ортотропия. Внутренний радиус кольцевого диска обозначим r_0 , а внешний – R . Толщина диска на внутреннем контуре равна h_0 .

Изгибающая нагрузка в общем случае может состоять из поверхностных и объемных нагрузок, нормальных к срединной поверхности диска, а также из нагрузок, распределенных по краям диска, в виде изгибающих моментов и поперечных сил.

Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z , поместив начало в точке пересечения оси анизотропии со срединной плоскостью диска.

Расчеты дисков будем проводить в рамках классической теории тонких пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа.

Обозначим перемещения точек срединной поверхности диска в направлении оси z через $w(r, \theta, t)$, при этом дифференциальное уравнение малых изгибных колебаний полярно-ортотропного диска переменной толщины под воздействием внешней распределенной и переменной во времени поперечной нагрузки $q_z(r, \theta, t)$ имеет вид [1]

$$\begin{aligned} D_{11}(r) \left[\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{k^2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{k^2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2(c + \nu_{\theta r})}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2(c + \nu_{\theta r})}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{2(\tilde{n} + \nu_{\theta r} + k^2)}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{k^2}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right] + \frac{dD_{11}}{dr} \left[2 \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{(2 + \nu_{\theta r})}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{k^2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{2(c + \nu_{\theta r})}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{[2(c + \nu_{\theta r}) + k^2]}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right] + \frac{d^2 D_{11}}{dr^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_{\theta r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] + \\ + \rho h(r) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_z(r, \theta, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $D_{11}(r) = \frac{E_0 h^3(r)}{12(k^2 - \nu_{\theta r}^2)}$ – цилиндрическая жесткость изгиба полярно-ортотропной пластины;

$c = \frac{2(k^2 - \nu_{\theta r}^2)G_{r\theta}}{E_0}$; $k^2 = \frac{E_\theta}{E_r}$; E_r, E_θ – модули Юнга для растяжения – сжатия тела в направлении осей r и

θ соответственно; $G_{r\theta}$ – модуль сдвига; $\nu_{\theta r}$ – коэффициент Пуассона; ρ – плотность материала диска.

Выразим изгибающие M_r, M_θ , крутящий $M_{r\theta}$ моменты и поперечные усилия Q_r, Q_θ через функцию прогиба $w(r, \theta, t)$ диска [2]:

$$\begin{aligned} M_r(r, \theta, t) &= -D_{11}(r) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_{\theta r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ M_\theta(r, \theta, t) &= -D_{11}(r) \left[\nu_{\theta r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + k^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ M_{r\theta}(r, \theta, t) &= -c D_{11}(r) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ Q_r(r, \theta, t) &= -D_{11}(r) \left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + (c + \nu_{\theta r}) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - k^2 \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] - \frac{dD_{11}}{dr} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_{\theta r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ Q_\theta(r, \theta, t) &= -D_{11}(r) \left[(c + \nu_{\theta r}) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + k^2 \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right) \right] - \\ &\quad - c \frac{dD_{11}}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть изгибающая нагрузка $q_z(r, \theta, t)$ изменяется во времени по гармоническому закону с частотой Ω , не совпадающей ни с одной из собственных частот колебаний диска («нерезонансный случай»):

$$q_z(r, \theta, t) = q_0(r, \theta) \sin \Omega t, \quad (3)$$

вследствие чего диск будет испытывать в общем случае *вынужденные несимметричные изгибные колебания*. Тогда функцию прогиба $w(r, \theta, t)$ можно представить в виде

$$w(r, \theta, t) = W(r, \theta) \sin \Omega t. \quad (4)$$

Подстановка выражений (3) и (4) в уравнение (1) даст дифференциальное уравнение для амплитуды $W(r, \theta)$ несимметричных изгибных колебаний полярно-ортотропного диска переменной толщины:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 W}{\partial r^4} + \frac{2(c + v_{\theta r})}{r^2} \frac{\partial^4 W}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{k^2}{r^4} \frac{\partial^4 W}{\partial \theta^4} + 2 \left(\frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{1}{r} \right) \frac{\partial^3 W}{\partial r^3} + 2(c + v_{\theta r}) \left(\frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{1}{r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 W}{\partial r \partial \theta^2} + \\ & + \left[\frac{D''_{11}}{D_{11}} + \frac{(2 + v_{\theta r})}{r} \frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{k^2}{r^2} \right] \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \left[v_{\theta r} \frac{D''_{11}}{D_{11}} - \frac{[2(c + v_{\theta r}) + k^2]}{r} \frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{2(c + v_{\theta r} + k^2)}{r^2} \right] \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \\ & + \left(v_{\theta r} \frac{D''_{11}}{D_{11}} - \frac{k^2}{r} \frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{k^2}{r^2} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\rho h(r) \Omega^2}{D_{11}(r)} W = \frac{q_0(r, \theta)}{D_{11}(r)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Представим амплитуду $W(r, \theta)$ несимметричных колебаний диска и распределенную поперечную нагрузку $q_0(r, \theta)$ в виде следующих рядов Фурье:

$$\begin{aligned} W(r, \theta) &= W_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} W_n^{(1)}(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} W_n^{(2)}(r) \sin n\theta, \\ q_0(r, \theta) &= q_0^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{(1)}(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{(2)}(r) \sin n\theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Первое слагаемое в разложении $W(r, \theta)$ учитывает осесимметричную составляющую изгиба диска. Слагаемые, содержащие $\cos n\theta$, соответствуют симметричным составляющим функции $W(r, \theta)$ относительно плоскости $\theta = 0$, а слагаемые, содержащие $\sin n\theta$, – наоборот симметричным.

Подставляя разложения (6) в уравнение (5), получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка для функций $W_0(r), W_n^{(i)}(r)$ ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} (n = 0) \quad & \frac{d^4 W_0}{dr^4} + 2 \left(\frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{1}{r} \right) \frac{d^3 W_0}{dr^3} + \left[\frac{D''_{11}}{D_{11}} + \frac{(2 + v_{\theta r})}{r} \frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{k^2}{r^2} \right] \frac{d^2 W_0}{dr^2} + \\ & + \left[v_{\theta r} \frac{D''_{11}}{D_{11}} - \frac{k^2}{r} \frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{k^2}{r^2} \right] \frac{1}{r} \frac{dW_0}{dr} - \frac{\rho h(r) \Omega^2}{D_{11}(r)} W_0 = \frac{q_0^{(0)}(r)}{D_{11}(r)}. \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (n > 0) \quad & \frac{d^4 W_n^{(i)}}{dr^4} + 2 \left(\frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{1}{r} \right) \frac{d^3 W_n^{(i)}}{dr^3} + \left[\frac{D''_{11}}{D_{11}} + \frac{(2 + v_{\theta r})}{r} \frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{[2(c + v_{\theta r})n^2 + k^2]}{r^2} \right] \frac{d^2 W_n^{(i)}}{dr^2} + \\ & + \left[\frac{v_{\theta r}}{r} \frac{D''_{11}}{D_{11}} - \frac{[2(c + v_{\theta r})n^2 + k^2]}{r^2} \frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{[2(c + v_{\theta r})n^2 + k^2]}{r^3} \right] \frac{dW_n^{(i)}}{dr} - \\ & - \left[n^2 \frac{v_{\theta r}}{r^2} \frac{D''_{11}}{D_{11}} - \frac{[2(c + v_{\theta r}) + k^2]n^2}{r^3} \frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{[2(c + v_{\theta r} + k^2) - k^2 n^2]n^2}{r^4} + \frac{\rho h(r) \Omega^2}{D_{11}(r)} \right] W_n^{(i)} = \frac{q_n^{(i)}(r)}{D_{11}(r)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Осесимметричные изгибные колебания полярно-ортотропных дисков переменной толщины, описываемые дифференциальным уравнением (7), были нами ранее рассмотрены в работе [3].

Запишем уравнение (8) в виде

$$\frac{d^4 W_n^{(i)}}{dr^4} + a_1(r) \frac{d^3 W_n^{(i)}}{dr^3} + a_2^{(n)}(r) \frac{d^2 W_n^{(i)}}{dr^2} + 2a_3^{(n)}(r) \frac{dW_n^{(i)}}{dr} + 6a_4^{(n)}(r) W_n^{(i)} = \frac{q_n^{(i)}(r)}{D_{11}(r)}, \quad (9)$$

$$\text{где } a_1(r) = 2 \left(\frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{1}{r} \right), \quad a_2^{(n)}(r) = \left[\frac{D''_{11}}{D_{11}} + \frac{(2 + v_{\theta r})}{r} \frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{[2(c + v_{\theta r})n^2 + k^2]}{r^2} \right],$$

$$a_3^{(n)}(r) = \frac{1}{2} \left[\frac{v_{\theta r}}{r} \frac{D''_{11}}{D_{11}} - \frac{[2(c + v_{\theta r})n^2 + k^2]}{r^2} \frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{[2(c + v_{\theta r})n^2 + k^2]}{r^3} \right],$$

$$a_4^{(n)}(r) = -\frac{1}{6} \left[n^2 \frac{v_{\theta r}}{r^2} \frac{D_{11}''}{D_{11}} - \frac{[2(c + v_{\theta r}) + k^2] n^2}{r^3} \frac{D_{11}'}{D_{11}} + \frac{[2(c + v_{\theta r} + k^2) - k^2 n^2] n^2}{r^4} + \frac{\rho h(r) \Omega^2}{D_{11}(r)} \right].$$

Сведем задачу решения дифференциального уравнения (9) к решению соответствующего линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода. Полагаем

$$\frac{d^4 W_n^{(i)}}{dr^4} = b_n^{(i)}(r). \quad (10)$$

Последовательно интегрируя выражение (10), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^3 W_n^{(i)}}{dr^3} &= \int_{r_0}^r b_n^{(i)}(s) ds + \ddot{W}_n^{(i)}(r_0), \\ \frac{d^2 W_n^{(i)}}{dr^2} &= \int_{r_0}^r (r-s) b_n^{(i)}(s) ds + \ddot{W}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0) + \dot{W}_n^{(i)}(r_0), \\ \frac{dW_n^{(i)}}{dr} &= \frac{1}{2} \int_{r_0}^r (r-s)^2 b_n^{(i)}(s) ds + \frac{1}{2} \ddot{W}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0)^2 + \dot{W}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0) + W_n^{(i)}(r_0), \\ W_n^{(i)}(r) &= \frac{1}{6} \int_{r_0}^r (r-s)^3 b_n^{(i)}(s) ds + \frac{1}{6} \ddot{W}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0)^3 + \frac{1}{2} \dot{W}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0)^2 + \\ &\quad + \dot{W}_n^{(i)}(r_0)(r-r_0) + W_n^{(i)}(r_0). \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь использовалось известное тождество Дирихле [4]:

$$\underbrace{\int_{r_0}^r dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \dots \int_{r_0}^{r_{n-1}} f(r_n) dr_n}_{n \text{ раз}} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{r_0}^r (r-s)^{n-1} f(s) ds.$$

Подставив в уравнение (9) вместо функции $W_n^{(i)}(r)$ и ее производных правые части выражений (10) и (11), получим искомые интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода:

$$b_n^{(i)}(r) = \lambda \int_{r_0}^r K_n(r, s) b_n^{(i)}(s) ds + g_n^{(i)}(r), \quad (12)$$

где числовые параметры: $\lambda = -1; n = 1, 2, 3, \dots; i = 1, 2$.

$K_n(r, s) = \left[a_1(r) + a_2^{(n)}(r)(r-s) + a_3^{(n)}(r)(r-s)^2 + a_4^{(n)}(r)(r-s)^3 \right]$ – ядро интегральных уравнений;
 $g_n^{(i)}(r)$ – свободные члены интегральных уравнений, имеющие вид

$$\begin{aligned} g_n^{(i)}(r) &= \frac{\partial^3 K_n(r, r_0)}{\partial s^3} W_n^{(i)}(r_0) - \frac{\partial^2 K_n(r, r_0)}{\partial s^2} \dot{W}_n^{(i)}(r_0) + \frac{\partial K_n(r, r_0)}{\partial s} \ddot{W}_n^{(i)}(r_0) - K_n(r, r_0) \ddot{W}_n^{(i)}(r_0) + \\ &\quad + \frac{q_n^{(i)}(r)}{D_{11}(r)}. \end{aligned}$$

Так, при изменении толщины $h(r)$ диска по степенному закону

$$h(r) = h_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha, \quad \alpha \in R,$$

ядро $K_n(r, s)$ интегрального уравнения (12) имеет вид

$$\begin{aligned} K_n(r, s) &= \left\{ \left[\frac{(A_1 + A_2^{(n)} + A_3^{(n)} + A_4^{(n)})}{r} + \frac{A_\Omega}{r^{2\alpha-3}} \right] - \left[\frac{(A_2^{(n)} + 2A_3^{(n)} + 3A_4^{(n)})}{r^2} + \frac{3A_\Omega}{r^{2\alpha-2}} \right] \cdot s + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{(A_3^{(n)} + 3A_4^{(n)})}{r^3} + \frac{3A_\Omega}{r^{2\alpha-1}} \right] \cdot s^2 - \left(\frac{A_4^{(n)}}{r^4} + \frac{A_\Omega}{r^{2\alpha}} \right) \cdot s^3 \right\}, \end{aligned}$$

где $A_1 = 2(3\alpha + 1)$, $A_2^{(n)} = \left\{ (9\alpha^2 + 1) + \left[(3\alpha v_{\theta k} - k^2) - 2(c + v_{\theta r}) \cdot n^2 \right] \right\}$,

$$A_3^{(n)} = \frac{1}{2}(3\alpha - 1) \left[(3\alpha v_{\theta r} - k^2) - 2(c + v_{\theta r}) \cdot n^2 \right],$$

$$A_4^{(n)} = -\frac{n^2}{6} \left\{ (3\alpha - 1) \left[(3\alpha v_{\theta r} - k^2) - 2(c + v_{\theta r}) \right] - (n^2 - 1)k^2 \right\},$$

$$A_\Omega = -\frac{2(k^2 - v_{\theta r}^2) \rho r_0^{2\alpha} \Omega^2}{E_\theta h_0^2}.$$

Общее решение линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (12) запишется с помощью резольвенты $R_n(r, s; \lambda)$ в виде [4]:

$$b_n^{(i)}(r) = \lambda \int_{r_0}^r R_n(r, s; \lambda) g_n^{(i)}(s) ds + g_n^{(i)}(r). \quad (13)$$

Здесь функция $R_n(r, s; \lambda)$ определяется функциональным рядом

$$R_n(r, s; \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m K_{m+1}^{(n)}(r, s), \quad (14)$$

который сходится абсолютно и равномерно для непрерывного ядра $K_n(r, s)$.

Повторяющиеся или итерированные ядра $K_m^{(n)}(r, s)$ определяются по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} K_1^{(n)}(r, s) &= K_n(r, s), \\ K_2^{(n)}(r, s) &= \int_s^r K_n(r, t) K_1^{(n)}(t, s) dt, \\ &\dots\dots\dots \\ K_m^{(n)}(r, s) &= \int_s^r K_n(r, t) K_{m-1}^{(n)}(t, s) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Если свободные члены $g_n^{(i)}(r)$ непрерывны в $[r_0, R]$, а ядро $K_n(r, s)$ непрерывно при $r_0 \leq r \leq R$, $r_0 \leq s \leq r$, то линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода (12) имеет при любом параметре λ ($\lambda \neq 0$) единственное непрерывное решение, определяемое формулой (13).

Отметим, что интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода можно решать и другими аналитическими и численными методами, указанными, например, в работе [5].

Представим изгибающие моменты $M_r(r, \theta, t)$, $M_\theta(r, \theta, t)$, крутящие моменты $M_{r\theta}(r, \theta, t) = M_{\theta r}(r, \theta, t)$ и поперечные усилия $Q_r(r, \theta, t)$, $Q_\theta(r, \theta, t)$ в виде следующих рядов Фурье:

$$\begin{aligned} M_r(r, \theta, t) &= \left\{ M_r^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{r,n}^{(1)}(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} M_{r,n}^{(2)}(r) \sin n\theta \right\} \sin \Omega t, \\ M_\theta(r, \theta, t) &= \left\{ M_\theta^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} M_{\theta,n}^{(1)}(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} M_{\theta,n}^{(2)}(r) \sin n\theta \right\} \sin \Omega t, \\ M_{r\theta}(r, \theta, t) &= M_{\theta r}(r, \theta, t) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M_{r\theta,n}^{(1)}(r) \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} M_{r\theta,n}^{(2)}(r) \cos n\theta \right\} \sin \Omega t, \\ Q_r(r, \theta, t) &= \left\{ Q_r^{(0)}(r) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{r,n}^{(1)}(r) \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{r,n}^{(2)}(r) \sin n\theta \right\} \sin \Omega t, \end{aligned}$$

$$Q_\theta(r, \theta, t) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} Q_{\theta,n}^{(1)}(r) \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{\theta,n}^{(2)}(r) \cos n\theta \right\} \sin \Omega t.$$

Здесь $M_r^{(0)}(r), M_{r,n}^{(i)}(r), M_\theta^{(0)}(r), M_{\theta,n}^{(i)}(r), M_{r\theta,n}^{(i)}(r), Q_r^{(0)}(r), Q_{r,n}^{(i)}(r), Q_{\theta,n}^{(i)}(r)$ выражаются через разре-
шающие функции $b_n^{(i)}(r), X(r)$ по формулам:

$$\begin{aligned} M_r^{(0)}(r) &= -D_{11}(r) \left[\int_{r_0}^r K_{M_r}^{(0)}(r, s) X(s) ds + K_{M_r}^{(0)}(r, r_0) \ddot{W}_0(r_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial K_{M_r}^{(0)}(r, r_0)}{\partial s} \dot{W}_0(r_0) + \frac{\partial^2 K_{M_r}^{(0)}(r, r_0)}{\partial s^2} \dot{W}_0(r_0) \right], \\ M_{r,n}^{(i)}(r) &= -D_{11}(r) \left[\int_{r_0}^r K_{M_r}^{(n)}(r, s) b_n^{(i)}(s) ds + K_{M_r}^{(n)}(r, r_0) \ddot{W}_n^{(i)}(r_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial K_{M_r}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s} \dot{W}_n^{(i)}(r_0) + \frac{\partial^2 K_{M_r}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s^2} \dot{W}_n^{(i)}(r_0) - \frac{\partial^3 K_{M_r}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s^3} W_n^{(i)}(r_0) \right], \\ M_\theta^{(0)}(r) &= -D_{11}(r) \left[\int_{r_0}^r K_{M_\theta}^{(0)}(r, s) X(s) ds + K_{M_\theta}^{(0)}(r, r_0) \ddot{W}_0(r_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial K_{M_\theta}^{(0)}(r, r_0)}{\partial s} \dot{W}_0(r_0) + \frac{\partial^2 K_{M_\theta}^{(0)}(r, r_0)}{\partial s^2} \dot{W}_0(r_0) \right], \\ M_{\theta,n}^{(i)}(r) &= -D_{11}(r) \left[\int_{r_0}^r K_{M_\theta}^{(n)}(r, s) b_n^{(i)}(s) ds + K_{M_\theta}^{(n)}(r, r_0) \ddot{W}_n^{(i)}(r_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial K_{M_\theta}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s} \dot{W}_n^{(i)}(r_0) + \frac{\partial^2 K_{M_\theta}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s^2} \dot{W}_n^{(i)}(r_0) - \frac{\partial^3 K_{M_\theta}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s^3} W_n^{(i)}(r_0) \right], \\ M_{r\theta,n}^{(i)}(r) &= (-1)^{i-1} D_{11}(r) \left[\int_{r_0}^r K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r, s) b_n^{(i)}(s) ds + K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r, r_0) \ddot{W}_n^{(i)}(r_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s} \dot{W}_n^{(i)}(r_0) + \frac{\partial^2 K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s^2} \dot{W}_n^{(i)}(r_0) - \frac{\partial^3 K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s^3} W_n^{(i)}(r_0) \right], \\ Q_r^{(0)}(r) &= -D_{11}(r) \left[\int_{r_0}^r K_{Q_r}^{(0)}(r, s) X(s) ds + K_{Q_r}^{(0)}(r, r_0) \ddot{W}_0(r_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial K_{Q_r}^{(0)}(r, r_0)}{\partial s} \dot{W}_0(r_0) + \frac{\partial^2 K_{Q_r}^{(0)}(r, r_0)}{\partial s^2} \dot{W}_0(r_0) \right], \\ Q_{r,n}^{(i)}(r) &= -D_{11}(r) \left[\int_{r_0}^r K_{Q_r}^{(n)}(r, s) b_n^{(i)}(s) ds + K_{Q_r}^{(n)}(r, r_0) \ddot{W}_n^{(i)}(r_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial K_{Q_r}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s} \dot{W}_n^{(i)}(r_0) + \frac{\partial^2 K_{Q_r}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s^2} \dot{W}_n^{(i)}(r_0) - \frac{\partial^3 K_{Q_r}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s^3} W_n^{(i)}(r_0) \right], \\ Q_{\theta,n}^{(i)}(r) &= (-1)^{i-1} D_{11}(r) \left[\int_{r_0}^r K_{Q_\theta}^{(n)}(r, s) b_n^{(i)}(s) ds + K_{Q_\theta}^{(n)}(r, r_0) \ddot{W}_n^{(i)}(r_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial K_{Q_\theta}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s} \dot{W}_n^{(i)}(r_0) + \frac{\partial^2 K_{Q_\theta}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s^2} \dot{W}_n^{(i)}(r_0) - \frac{\partial^3 K_{Q_\theta}^{(n)}(r, r_0)}{\partial s^3} W_n^{(i)}(r_0) \right], \end{aligned}$$

где передаточные (весовые) функции имеют вид

$$\begin{aligned}
K_{M_r}^{(0)}(r,s) &= \left[1 + v_{\theta r} \frac{(r-s)}{2r} \right] (r-s), \quad K_{M_r}^{(n)}(r,s) = \left[1 + v_{\theta r} \frac{(r-s)}{2r} - n^2 v_{\theta r} \frac{(r-s)^2}{6r^2} \right] (r-s); \\
K_{M_\theta}^{(0)}(r,s) &= \left[v_{\theta r} + k^2 \frac{(r-s)}{2r} \right] (r-s), \quad K_{M_\theta}^{(n)}(r,s) = \left[v_{\theta r} + k^2 \frac{(r-s)}{2r} - n^2 k^2 \frac{(r-s)^2}{6r^2} \right] (r-s); \\
K_{M_{r\theta}}^{(n)}(r,s) &= nc \left[\frac{(r-s)^2}{2r} - \frac{(r-s)^3}{6r^2} \right]; \quad K_{Q_r}^{(0)}(r,s) = \left[1 + \left(\frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{1}{r} \right) (r-s) + \left(v_{\theta r} \frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{k^2}{r} \right) \frac{(r-s)^2}{2r} \right], \\
K_{Q_r}^{(n)}(r,s) &= \left[1 + \left(\frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{1}{r} \right) (r-s) + \left(v_{\theta r} \frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{[(c+v_{\theta r})n^2 + k^2]}{r} \right) \frac{(r-s)^2}{2r} - \right. \\
&\quad \left. - n^2 \left(v_{\theta r} \frac{D'_{11}}{D_{11}} - \frac{[(c+v_{\theta r}) + k^2]}{r} \right) \frac{(r-s)^3}{6r^2} \right]; \\
K_{Q_\theta}^{(n)}(r,s) &= n \left[\frac{(c+v_{\theta r})}{r} + \left(c \frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{k^2}{r} \right) \frac{(r-s)}{2r} - \left(c \frac{D'_{11}}{D_{11}} + \frac{n^2 k^2}{r} \right) \frac{(r-s)^2}{6r^2} \right] (r-s).
\end{aligned}$$

Функция $X(r)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода, рассмотренного в работе [3].

Постоянные величины $W_0(r_0), \dot{W}_0(r_0), \ddot{W}_0(r_0), \ddot{W}_0(r_0), W_n^{(i)}(r_0), \dot{W}_n^{(i)}(r_0), \ddot{W}_n^{(i)}(r_0)$,

$\ddot{W}_n^{(i)}(r_0)$ определяются из граничных условий на контурах диска:

1. Если внутренний и/или внешний контур диска жестко заделан или защемлен, то

$$w(r_i, \theta, t) = 0, \quad \frac{\partial w(r_i, \theta, t)}{\partial r} = 0, \quad (i=1,2),$$

где $r_1 = r_0, \quad r_2 = R$.

2. Для шарнирно опертого края диска

$$w(r_i, \theta, t) = 0, \quad M_r(r_i, \theta, t) = 0.$$

3. Для свободного края диска

$$M_r(r_i, \theta, t) = 0, \quad Q_r(r_i, \theta, t) + \frac{1}{r_i} \frac{\partial M_{r\theta}(r_i, \theta, t)}{\partial \theta} = 0.$$

Удовлетворив найденное решение интегрального уравнения заданным граничным условиям, можем рассчитать по известным формулам нормальные $\sigma_r(r, \theta, z, t), \sigma_\theta(r, \theta, z, t)$ и касательные $\tau_{r\theta}(r, \theta, z, t), \tau_{\theta z}(r, \theta, t), \tau_{rz}(r, \theta, t)$ динамические напряжения в диске, возникающие при его изгибе под воздействием периодически изменяющейся во времени распределенной поперечной нагрузки:

$$\begin{aligned}
\sigma_r(r, \theta, z, t) &= z \frac{12M_r(r, \theta, t)}{h^3(r)}, \quad \sigma_\theta(r, \theta, z, t) = z \frac{12M_\theta(r, \theta, t)}{h^3(r)}, \\
\tau_{r\theta}(r, \theta, z, t) &= z \frac{12M_{r\theta}(r, \theta, t)}{h^3(r)}, \quad \tau_{rz}(r, \theta, t) = \frac{Q_r(r, \theta, t)}{h(r)}, \quad \tau_{\theta z}(r, \theta, t) = \frac{Q_\theta(r, \theta, t)}{h(r)}.
\end{aligned}$$

В случае, если поперечная нагрузка $q_z = 0$, то имеем задачу расчета спектра частот *свободных колебаний* диска. Удовлетворяя найденное решение интегрального уравнения Вольтерра заданным граничным условиям, из условия равенства нулю определителя, составленного из стоящих при постоянных интегрирования значений функций в граничных точках, получим *частотное уравнение*, которое решается аналитическими или численными методами.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Маслов Н. М. Колебания упругих цилиндрически-ортотропных пластин переменной толщины // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел: сб. ст. Саратов, 1965. Вып. 2. С. 101–119.
2. Королевич В. В., Медведев Д. Г. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода в задачах изгиба вращающихся полярно-ортотропных дисков переменной толщины // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2012. № 3. С. 108–116.
3. Королевич В. В. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода в задачах динамики полярно-ортотропных дисков переменной толщины // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций: сб. науч. тр. Днепропетровск, 2012. Вып. 20. С. 192–199.
4. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями. М., 2007.
5. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: справ. пособие. Киев, 1986.

Поступила в редакцию 23.08.13.

Владимир Васильевич Королевич – преподаватель Национального педагогического университета имени М. Драгоманова в Праге (Чехия).

Дмитрий Георгиевич Медведев – кандидат физико-математических наук, доцент, декан механико-математического факультета.

УДК 519.61

В. В. БОБКОВ

К ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Предлагается способ численного моделирования начальных задач, ориентированный на разработку приближенных методов переменного порядка и шага. Отличительной чертой этого способа является конструктивная связь приемов оценки локальной погрешности метода и алгоритма последовательного повышения его порядка точности. В основе способа лежат понятия локальной производной приближенного решения, задаваемого избранным методом, и дифференциальной невязки (как точного решения исходной задачи на моделирующей, так и приближенного на исходной дифференциальной). Дан способ математического описания локальной погрешности замены исходного эволюционного уравнения его аппроксимирующим. Рассмотрены различные варианты представления начальной задачи для локальной погрешности соответствующего метода приближенного решения. Предложены формы задания такой задачи с конструктивным выделением главной части (на шаге дискретизации) погрешности метода и ее производной, базирующиеся на апостериорной информации о моделирующем решении. Построены и исследованы варианты последовательностей локального уточнения приближенного решения исходной задачи Коши, в том числе позволяющих поднимать на два порядка точность приближения на одном этапе уточнения.

Ключевые слова: эволюционное уравнение; начальная задача; численное моделирование; дифференциальная невязка; погрешность аппроксимации; локальная погрешность метода.

In this paper we propose an approach to numerical modeling of initial value problems, oriented to the development of approximate methods of variable order and step size. This approach is characterized by the constructive connection between the local error estimation technique and the algorithm of consecutive increase of the order of exactness. The approach is based on the notions of the local derivative of approximate solution and the differential residual (for both the exact solution on approximate problem and the approximate solution on original differential problem). A way of mathematical description of the local error arising from the replacement of the original evolutionary equation by the approximating one is given. Different options for representation of an initial value problem describing the local error of a corresponding numerical method are considered. A form of such Cauchy problem with constructive representation of main part of the error of method and its derivative, based on a posteriori information about the sought solution, is proposed. Local refinement sequences for the approximate solution of Cauchy problems are constructed and investigated. They include techniques that allow to increase the order of exactness by two on each refinement stage.

Key words: evolutionary equations; initial value problems; numerical modeling; differential residual; approximation error; local error of method.

Будем предполагать, что задача Коши

$$u'(x) = f(x, u(x)), \quad t \leq x \leq t + \tau, \quad (1)$$

$$u(t) = y \quad (2)$$

имеет единственное решение, обладающее необходимой гладкостью. Для ее численного анализа станем использовать методы вида

$$[y(t+h) - y] / h = p(t, h, y, y(t+h)), \quad 0 < h \leq \tau. \quad (3)$$

Функция $y(x) = y(t+h)$ призвана численно моделировать решение $u(x)$ задачи (1), (2) с сохранением наиболее важных его характеристик.

Часто (см., например, [1, с. 214–220], [2, с. 376]) об уровне приближения дифференциального уравнения (1) разностным вида (3) судят по величине невязки $\psi(t+h)$ последнего на точном решении исходной задачи: