УДК 519.6

Н. А. ЛИХОДЕД, А. А. ТОЛСТИКОВ

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗЕРНИСТЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси *Поступило*

Введение. Для распараллеливания алгоритма требуется получить его информационную структуру, исследовать параллельную структуру, учесть особенности целевого суперкомпьютера [1,2]. В качестве целевого компьютера будем рассматривать параллельный компьютер с распределенной памятью. Компьютеры этого класса, в частности, белорусско-российские мультипроцессорные вычислительные системы семейства СКИФ, являются в настоящее время наиболее используемыми.

Информационную структуру алгоритма определяют зависимости между операциями. Параллельную структуру алгоритма составляют сведения о параллельных множествах, параллельных формах алгоритма, параллельных последовательностях вычислений. Особенностью построения параллельных алгоритмов, ориентированных на компьютеры с распределенной памятью, является необходимость решения ряда задач, связанных с обменом данными между процессорами. Одной из основных задач является организация зернистых вычислений. Операции алгоритма должны быть разбиты на множества, называемые зернами вычислений или тайлами [3-6]. Операции одного тайла выполняются атомарно, как одна единица вычислений. Результаты вычислений тайла передаются, если требуется обмен данными, одним пакетом, что позволяет значительно снизить накладные расходы на коммуникационные операции.

В этой работе предлагается метод получения параллельных последовательностей зернистых (т.е. разбитых на тайлы) вычислений. Каждая последовательность вычислений отождествляется с некоторым упорядоченным множеством операций алгоритма. Если последовательности вычислений можно выполнять одновременно, то их называют параллельными. Зависимыми могут быть как операции одной, так и операции разных последовательностей; явного указания операций, выполняемых одновременно, не требуется. Задание параллельных последовательностей зернистых вычислений позволяет организовать параллельные вычислительные процессы на компьютерах с распределенной памятью. В работе разработан математический аппарат для построения последовательностей вычислений, разбитых на тайлы заданного размера и размерности; получены условия параллельности последовательностей, содержащих тайлы нескольких типов.

Тайлы операций. Будем считать, что алгоритм задан последовательной программой, основную вычислительную часть которой составляет многомерный цикл произвольной структуры вложенности. Будем считать, что границы изменения параметров циклов задаются неоднородными (в общем случае) формами, линейными по совокупности параметров циклов и внешних переменных. Пусть в многомерном цикле имеется K операторов. Обозначим: V_β − область изменения параметров циклов для оператора S_β, n_β − число циклов, окружающих оператор S_β. Выполнение оператора S_β при конкретных значениях β и вектора параметров цикла J будем называть операцией и обозначать $S_\beta(J)$.

Операция $S_\beta(J)$, $J \in V_\beta$, зависит от операции $S_\alpha(I)$, $I \in V_\alpha$, если: 1) $S_\alpha(I)$ выполняется раньше $S_\beta(J)$; 2) $S_\alpha(I)$ и $S_\beta(J)$ используют один и тот же элемент какого-либо массива, и, по крайней мере, одно из использований есть переопределение элемента; 3) между операциями $S_\alpha(I)$ и $S_\beta(J)$ этот элемент не переопределяется. Зависимость операции $S_\beta(J)$ от операции $S_\alpha(I)$ будем обозначать $S_\alpha(I) \to S_\beta(J)$.

Выделим S наборов тесно вложенных циклов, удовлетворяющих условию: любой оператор многомерного цикла окружен ровно одним набором циклов. В частности, если имеется одно гнездо тесно вложенных циклов ($S=1$), то может быть выделен один набор из одного или нескольких подряд идущих циклов; этот частный случай исследовался в работах [7, 8]. Выделенные наборы циклов могут иметь общие внешние циклы. Линейно упорядочим наборы: меньший номер имеют циклы, выполняемые раньше при фиксированных значениях параметров общих внешних циклов.

Обозначим:

c_s - число циклов в s-м наборе циклов;

σ_s - суммарное число циклов в s-м наборе циклов и всех внешних по отношению к ним циклов;

$V^s = \left\{ J(j_1,\ldots,j_{\sigma_s}) \right\}$ - область изменения параметров σ_s циклов;

$m^s_\zeta = \min\limits_{J\in V^s} j_\zeta$, $\quad M^s_\zeta = \max\limits_{J\in V^s} j_\zeta$, $\quad \sigma_s - c_s + 1 \le \zeta \le \sigma_s$, - предельные значения изменения параметров циклов $j_{\sigma_s-c_s+1},\ldots, j_{\sigma_s}$;

$Q^s_1,\ldots,Q^s_{c_s}, 1\le s\le S$, - заданные натуральные числа; число Q^s_k показывает на сколько частей при формировании тайлов разбивается область значений параметра k-го цикла в s-м наборе;

$B^s_\zeta = \left\lceil \dfrac{M^s_\zeta - m^s_\zeta + 1}{Q^s_{\zeta-\sigma_s+c_s}} \right\rceil$, $\sigma_s - c_s + 1 \le \zeta \le \sigma_s$ − число значений параметра j_ζ, приходящихся на один тайл;

$$V^s_{\bar{j},\bar{q}} = \{ J(\bar{j}, j_{\sigma_s-c_s+1},\ldots, j_{\sigma_k}) \in V^s \mid m^s_\zeta + (q_{\zeta-\sigma_s+c_s} - 1)B^s_\zeta \le j_\zeta \le m^s_\zeta + q_{\zeta-\sigma_s+c_s} B^s_\zeta,$$

$$\sigma_s - c_s + 1 \le \zeta \le \sigma_s \},\ 1\le s\le S,\ \bar{j} = (j_1,\ldots, j_{\sigma_s-c_s}),\ \bar{q} = (q_1,\ldots,q_{c_s}),\ 1\le q_k \le Q^s_k,\ 1\le k\le c_s.$$

Множество операций, выполняемых на итерациях множества $V^s_{\bar{j},\bar{q}}$, будем также обозначать $V^s_{\bar{j},\bar{q}}$. Не всякое множество операций $V^s_{\bar{j},\bar{q}}$ является тайлом (зерном вычислений): требуется обеспечить атомарность выполнения тайлов.

Л е м м а. *Пусть* $S_\alpha(I(i_1,\ldots,i_{n_\alpha})) \to S_\beta(J(j_1,\ldots,j_{n_\beta}))$ *− любая такая зависимость, что* $i_1 = j_1, \ldots, i_{\sigma_s-c_s} = j_{\sigma_s-c_s}$, S_α *и* S_β *- операторы, окруженные одним и тем же набором из* c_s *циклов. Множества операций* $V^s_{\bar{j},\bar{q}}$ *являются тайлами, если* $j_\zeta - i_\zeta \ge 0$ *для всех* ζ *таких, что* $\sigma_s - c_s + 1 \le \zeta \le \sigma_s$ *и* $Q_{\zeta-\sigma_s+c_s} > 1$.

Действительно, при формировании тайлов может меняться относительно друг друга порядок выполнения операций, зависящих от параметров одних и тех же разбиваемых циклов. Поэтому, при фиксированных значениях параметров общих внешних циклов операции тайлов разных типов упорядочены так же, как наборы разбиваемых циклов. Допустимость тайлинга одного набора разбиваемых циклов гарантирована условием $j_\zeta - i_\zeta \ge 0$ допустимости информационных разрезов $(n_\beta - \sigma_s + c_s)$-мерного подпространства итераций гиперплоскостями, перпендикулярными осям координат, по которым производится разбиение.

Тайлы $V^s_{\bar{j},\bar{q}}$ будем называть тайлами s-го типа. Вектор $\bar{q}$ лексикографически упорядочивает тайлы одного типа при фиксированных вектором $\bar{j}$ значениях параметров внешних (по отношению к c_s циклам) циклов.

Последовательности зернистых вычислений. Для каждого s, $1\le s\le S$, зафиксируем один из параметров циклов j_{ζ_s}, $\zeta_s \in \left\{ \sigma_s - c_s + 1, \ldots, \sigma_s \right\}$, и положим $k_s = \zeta_s - \sigma_s + c_s$. Поставим в соответствие тайлам $V^s_{\bar{j},\bar{q}}$ функции вида

$$\Pr^s(\bar{q}) = \lambda^s q_{k_s} + \sum_{i=1}^{S} b_i^s Q_{k_s}^i + a^s, \tag{1}$$

где λ^s, b_i^s и a^s – параметры функции, $\lambda^s \in \{-1;\ 1\}$, $b_i^s \in \{0;\ 1\}$, $a^s \in \mathrm{Z}$.

Определим последовательности зернистых вычислений: к одной последовательности отнесем операции тайлов с одинаковыми значениями функции (1). Порядок выполнения тайлов одной последовательности определяется в первую очередь лексикографической упорядоченностью векторов $\bar{j}$, затем – параметром s, затем – лексикографической упорядоченностью вектора $\bar{q}$. Отметим, что при фиксированном s операции всех множеств $V_{\bar{j},\bar{q}}^s$ с одинаковым значением координаты q_{k_s} вектора $\bar{q}$ всегда принадлежат одной последовательности.

Функции $\Pr^s$ можно использовать для распределения операций алгоритма между процессорами: организуется вычислительный процесс для выполнения на процессоре с номером $\Pr^s(\bar{q})$ операций тайлов $V_{\bar{j},\bar{q}}^s$. Задача выбора функций $\Pr^s$ – задача распределения операций между процессорами – должна быть согласована с задачей распределения массивов данных между процессорами. От степени согласованности распределения операций и массивов данных зависит локальность параллельных реализаций алгоритмов, одного из важнейших вычислительных свойств параллельных алгоритмов.

Приведем некоторые варианты задания функции вида (1).

Если задать $\lambda^s = 1$, $b_i^s = 0$, $a_s = 0$ для всех i и s, то

$$\Pr^s(\bar{q}) = q_{k_s}. \tag{2}$$

При таком распределении операций между процессорами, последовательности вычислений с тайлами разных типов реализуются на одном множестве процессоров, номера которых задаются в соответствии с возрастанием координаты q_{k_s} тайлов.

Пусть $\lambda^s = 1$, $a_s = 0$ для всех s, $b_i^s = 1$ при $i < s$, и $b_i^s = 0$ при $i \ge s$. Тогда

$$\Pr^s(\bar{q}) = q_{k_s} + \sum_{i=1}^{s-1} Q_{k_s}^i, \tag{3}$$

при $s = 1$ сумма отсутствует. Последовательности разных типов реализуются на разных множествах процессоров.

Пусть s зафиксировано, $\lambda^s = -1$, $a^s = 1$, $b_s^s = 1$, остальные b_i^s нулевые. Тогда для этого s

$$\Pr^s(\bar{q}) = Q_{k_s}^s - q_{k_s} + 1. \tag{4}$$

Последовательность вычисления операций тайлов s-ого типа реализуются на множестве процессоров, номера которых задаются в соответствии с убыванием координаты q_{k_s}.

Рассмотрим пример. Один из вариантов алгоритма локально-одномерного метода численного решения двумерных параболических уравнений имеет следующую структуру:

```
do j1=1,j0
    do j2=1,N
        do j3=1,N
            S1: ….
    do j2=1,N
        do j3=1,N
            S2: ….
    do j2=1,N
        do j3=1,N
            S3: ….
        do j3=1,N
            S4: ….
```

Зависимости алгоритма описываются соотношениями

$$S_\alpha(j_1,j_2,j_3)\to S_\beta(j_1,j_2,j_3+1),\ (\alpha,\beta)\in\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\},$$

$$S_\alpha(j_1,j_2,j_3)\to S_\beta(j_1,j_2,N-j_3+1),\ (\alpha,\beta)\in\{(1,2),(3,4)\},$$

$$S_2(j_1,j_2,j_3)\to S_3(j_1,N-j_3,j_2),\quad S_4(j_1,j_2,j_3)\to S_1(j_1+1,N-j_3,j_2).$$

Выделим три набора циклов $(S=3)$: циклы с параметрами j_2 и j_3, окружающие оператор S_1; циклы с параметрами j_2 и j_3, окружающие оператор S_2; цикл j_2, окружающий операторы S_3 и S_4. Тогда $c_1=c_2=2,\ c_3=1,\ \sigma_1=\sigma_2=3,\ \sigma_3=2,\ m_\zeta^s=1,\ M_\zeta^s=N$.

Пусть все $Q_1^s, Q_2^s\ (s=1,2),\ Q_1^3$ больше 1. Согласно лемме множества операций

$$V^s_{j_1,q_1,q_2}=\{(j_1,j_2,j_3)\,|\,1+(q_{\zeta-1}-1)B^s_\zeta\le j_\zeta\le q_{\zeta-1}B^s_\zeta,\zeta=2,3\},$$

$$1\le j_1\le j_0,\ s=1,\ s=2,\ 1\le q_1\le Q_1^s,\ 1\le q_2\le Q_2^s;$$

$$V^3_{j_1,q_1}=\{(j_1,j_2)\,|\,1+(q_1-1)B_1^3\le j_2\le q_1B_1^3\},1\le j_1\le j_0,\ 1\le q_1\le Q_1^3,$$

являются тайлами.

Зададим функции отображения тайлов на процессоры:

$$\Pr^1(q_1,q_2)=q_2,\ \Pr^2(q_1,q_2)=Q_2^2-q_2+1,\ \Pr^3(q_1)=q_1.$$

Пусть $Q_2^1=Q_2^2=Q_1^3=P$, где P – число последовательностей зернистых вычислений. В каждую последовательность входят тайлы трех типов. Алгоритм реализации всех *p* последовательностей вычислений можно записать единым образом:

```
if  (1 ≤ p ≤ P)
 do  j1 = 1, jo
       do  q1 = 1, Q1^1
             do  j2 = 1 + (q1 - 1)B2^1, min(N, q1B2^1)
                   do  j3 = 1 + (p - 1)B3^1, min(N, pB3^1)
                         S1: ....
             конец тайла 1-го типа
       do  q1 = 1, Q1^2
             do  j2 = 1 + (q1 - 1)B2^2, min(N, q1B2^2)
                   do  j3 = 1 + (P - p)B3^2, min(N, (P - p + 1)B3^2)          (5)
                         S2: ....
             конец тайла 2-го типа
       do  j2 = 1 + (p - 1)B1^3, min(N, pB1^3)
             do  j3 = 1, N
                   S3: ....
             do  j3 = 1, N
                   S4: ....
       конец тайла 3-го типа
```

Параллельность последовательностей зернистых вычислений. Примем, что множество операций любого тайла выполняется за одну единицу времени, и все результаты и аргументы вычислений одного тайла в следующий момент времени могут участвовать в вычислениях любого другого тайла. Последовательности зернистых вычислений назовем параллельными, если асимптотически, т.е. при большом размере задачи и без учета разгона вычислений (когда еще не все последовательности вычислений начали выполняться) и торможения вычислений (когда еще не все последовательности вычислений закончили выполняться) в каждый момент времени выполняются операции тайлов всех последовательностей.

Т е о р е м а. *Если для всех наборов циклов выполнено хотя бы одно из условий:*

a) в s-м наборе циклов количество параметров $Q_i^s > 1$, $i \neq k_s$ больше либо равно 1 и хотя бы для одного такого параметра выполняется $Q_i^s >> Q_{k_s}^s$;

b) в s-м наборе циклов цикл k_s параллельный,

и выполняются условия леммы, то последовательности зернистых вычислений, задаваемые формулами (2) и (4), являются параллельными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $T_{\bar{j}}^s$ время начала выполнения $\bar{j}$-й итерации s-го набора циклов. Тогда время окончания выполнения этого набора циклов задается следующим образом: $E_{\bar{j}}^s = T_{\bar{j}}^s + \dfrac{\prod_{i=1}^{c_s} Q_i^s}{Q_{k_s}^s} + Q_{k_s}^s - 1$. Пусть $T_{\bar{j}}^1$ – время начала вычислений первого набора операторов итерации $\bar{j}$. Тогда можно взять $T_{\bar{j}}^s = E_{\bar{j}}^{s-1}$.

Достаточно показать, что последовательности вычислений являются параллельными для каждой фиксированной итерации $\bar{j}$, при этом потери времени при переходе к новому $\bar{j}$ не будут влиять на параллельность всех последовательностей вычислений. Для параллельности последовательностей вычислений на итерации $\bar{j}$ необходимо распределить тайлы между процессорами таким образом, чтобы, если в какой-то момент времени выполняется некоторое множество циклов (без учета разгона и торможения вычислений), то в вычислениях задействованы все процессоры. В последовательностях вычислений, задаваемых формулами (2) и (4), одновременно выполняется только один цикл, поэтому для параллельности P последовательностей вычислений необходимо, чтобы $Q_{k_s}^s = P$ для всех $1 \le s \le S$.

Для выполнения операций s-го набора циклов, удовлетворяющего условию *b)*, необходимо $\prod_{i=1}^{c_s} Q_i^s \Big/ P$ единиц времени. Это следует из независимости последовательностей вычислений в данном наборе циклов. Для выполнения операций s-го набора циклов, удовлетворяющего условию *a)*, необходимо $\prod_{i=1}^{c_s} Q_i^s \Big/ P + P - 1$ единиц времени [7]. Это следует из выполнения условий леммы.

Таким образом, если среди выделенных наборов циклов встречается M_b наборов циклов, удовлетворяющих условию *b)*, и M_a наборов, удовлетворяющих условию *a)* (и не удовлетворяющих условию *b)*), то общее время выполнения операций при фиксированном $\bar{j}$ равно $T_{\bar{j}} = \sum_{m=1}^{M_a} \prod_{i=1}^{c_{s_m}} Q_i^{s_m} \Big/ P + \sum_{n=1}^{M_b} \left(\prod_{i=1}^{c_{s_n}} Q_i^{s_n} \Big/ P + P - 1 \right)$, при этом будут выполнены операции $W_{\bar{j}} = \sum_{s=1}^{S} \prod_{i=1}^{c_s} Q_i^s$ тайлов. Легко видеть, $\lim T_{\bar{j}} / W_{\bar{j}} = 1/P$ (при выполнении условий *a), b)*), что равносильно параллельности последовательности вычислений при фиксированном $\bar{j}$. Аналогично получаем $\lim \left(\sum_{\bar{j}} T_{\bar{j}} \right) \Big/ \left(\sum_{\bar{j}} W_{\bar{j}} \right) = 1/P$. Тем самым показано, что при выполнении условий теоремы последовательности зернистых вычислений, задаваемые формулами (2) и (4), являются параллельными. Теорема доказана.

В рассмотренном выше примере цикл с параметром j_2 в третьем наборе циклов является параллельным. Если положить $Q_1^1 >> P$ и $Q_1^2 >> P$, то условия теоремы выполнены, так что при реализации алгоритма (5) на параллельном компьютере с распределенной памятью последовательности вычислений, порождающие вычислительные процессы, являются параллельными.

Работа выполнена в рамках государственной комплексной программы научных исследований «Инфотех».

Литература

1. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 600 с.
2. Воеводин В. В. Вычислительная математика и структура алгоритмов. Москва: Изд-во МГУ, 2006. 112 с.
3. HodzIc E. Shang W. // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. 2002. Vol. 13, № 12. P. 1220–1223.
4. Xue J. Cai W. // Parallel Computing. 2002. Vol. 28, № 5. P. 915–939.
5. Лиходед Н. А., Пашкович А. К. // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2008. № 2. С. 121-123.
6. Соболевский П.И., Баханович С.В. // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2008. № 3. С. 112-119.
7. Лиходед Н. А., Толстиков А. А. // Информатика. 2008. Т. 15, № 2 . С. 129-136.
8. Толстиков А. А., Лиходед Н. А. Организация вычислительных процессов при параллельной реализации вложенных циклов // Тезисы докладов Международной научной конференции «X Белорусская математическая конференция». Минск, Республика Беларусь, 3-7 ноября 2008 г. Минск, 2008. С. 27-28.

Likhoded N.A., Tolstikov A.A.
Parallel sequences of grain computations.

SUMMARY

Mathematical tool for the construction of sequences of grain computations is designed. The conditions for parallel implementation of the sequences are obtained.