

**КОММУНИКАЦИОННЫЕ ОПЕРАЦИИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА,  
ПОРОЖДАЕМЫЕ ОДНОРОДНЫМИ ЗАВИСИМОСТЯМИ**

(Представлено членом-корреспондентом Л. А. Яновичем)

Параллельные алгоритмы для компьютеров с распределенной памятью (в частности, для белорусско-российских суперкомпьютеров семейства СКИФ) должны быть зернистыми, т.е. операции алгоритма должны быть разбиты на множества, называемые зернами вычислений или тайлами [1–5]. Для таких алгоритмов операции одного тайла выполняются атомарно, как одна единица вычислений, а обмен данными происходит массивами. Возникает задача генерации (включения) коммуникационных операций в параллельный зернистый алгоритм. Таким образом, необходимо формализовать новые операции для включения их в алгоритм.

В этой работе данная задача решена для коммуникационных операций, определяемых однородными информационными зависимостями. Разработан метод формализации такого вида коммуникационных операций получения и отправки массивов данных в параллельном зернистом алгоритме. Сформулированы и доказаны утверждения, позволяющие в явном виде записать новые коммуникационные операции. Ранее исследовалась проблема формализации операций пересылки элементов массивов в алгоритме, операции которого не разбиты на тайлы [6].

**Организация параллельных вычислительных процессов**

Будем считать, что алгоритм задан последовательной программой, основную вычислительную часть которой составляет многомерный цикл произвольной структуры вложенности, а границы изменения параметров циклов задаются неоднородными формами, линейными по совокупности параметров циклов и внешних переменных. Пусть в гнезде циклов имеется  $K$  выполняемых операторов  $S_\beta$ , Область изменения параметров гнезда циклов для выполняемого оператора  $S_\beta$  будем обозначать  $V_\beta$ ,  $1 \leq \beta \leq K$ .

Вхождением  $(a, S_\beta, q)$  будем называть  $q$ -е вхождение массива  $a$  в оператор  $S_\beta$ . Индексы элементов массива, относящегося к вхождению  $(a, S_\beta, q)$ , будем выражать аффинной функцией  $\bar{F}_{a, S_\beta, q}(J)$  от вектора параметров цикла, где  $J \in V_\beta$ . Реализацию (выполнение) оператора  $S_\beta$  при конкретных значениях  $\beta$  и вектора параметров цикла  $J$  будем называть операцией и обозначать  $S_\beta(J)$ . Выполнение всех операций, зависящих от  $J$ , называется  $J$ -й итерацией.

Пусть пара вхождений  $(a, S_\alpha, 1)$  и  $(a, S_\beta, q)$  порождает истинную однородную зависимость  $S_\alpha(I) \rightarrow S_\beta(J)$ . Это означает, что

$S_\alpha(I)$  выполняется раньше  $S_\beta(J)$ ;

$S_\alpha(I)$  переопределяет (изменяет) элемент массива  $a$ , а  $S_\beta(J)$  использует в качестве аргумента тот же элемент массива;

между операциями  $S_\alpha(I)$  и  $S_\beta(J)$  этот элемент не переопределяется, операторы  $S_\alpha$  и  $S_\beta$  окружены одним и тем же набором циклов;

пары итераций, которым принадлежат зависимые операции, можно задать некоторым вектором  $\varphi$  и множеством  $V_{(a, S_\alpha, 1), (a, S_\beta, q)} = \{J \in Z^{n_\beta} \mid \exists S_\alpha(J - \varphi) \rightarrow S_\beta(J)\}$ , определяющим вторые элементы пары.

Если понятно, какие вхождения порождают зависимость, то множество  $V_{(a,S_\alpha,1),(a,S_\beta,q)}$  будем обозначать  $V_{\alpha,\beta}$ .

**Тайлинг.** Тайлинг применяется для получения макроопераций, называемых зернами вычислений или тайлами. Тайлинг – это такое преобразование алгоритма, при котором каждый цикл разбивается на два цикла: глобальный, параметр которого определяет на данном уровне вложенности порядок вычисления тайлов, и локальный, в котором параметр исходного цикла изменяется в границах одного тайла. Допускается вырожденное разбиение цикла, при котором все итерации относятся к глобальному циклу или все итерации относятся к локальному циклу. Такие циклы будем называть соответственно глобальными не разбиваемыми и локальными не разбиваемыми.

Пусть в гнезде циклов имеется  $\Theta$  наборов выполняемых операторов, и в окружении каждого набора есть хотя бы один разбиваемый цикл. Под набором операторов будем понимать один или несколько операторов, окруженных одним и тем же множеством циклов. Наборы операторов линейно упорядочены расположением их в записи алгоритма. Обозначим:  $V^\vartheta$ ,  $1 \leq \vartheta \leq \Theta$ , – области изменения параметров циклов, окружающих наборы операторов,  $n^\vartheta$  – размерность области  $V^\vartheta$ , число циклов, окружающих  $\vartheta$ -й набор операторов.

По смыслу тайлинга, для каждого набора операторов локальные циклы должны быть самыми внутренними. Поэтому общие локальные циклы распределяются между циклами каждого набора операторов; локальные циклы переставляются с глобальными и становятся самыми внутренними.

Следующие величины и множества используются для формализации тайлинга.

$m_\zeta^\vartheta = \min_{J(j_1, j_2, \dots, j_{n^\vartheta}) \in V^\vartheta} j_\zeta$ ,  $M_\zeta^\vartheta = \max_{J(j_1, j_2, \dots, j_{n^\vartheta}) \in V^\vartheta} j_\zeta$ ,  $1 \leq \zeta \leq n^\vartheta$ , – предельные значения изменения параметров циклов;

$r_1^\vartheta, \dots, r_{n^\vartheta}^\vartheta$  – заданные натуральные числа, определяющие размеры тайла;  $r_\zeta^\vartheta$  обозначает число значений параметра  $j_\zeta$ , приходящихся на один тайл  $\vartheta$ -го набора операторов;  $r_\zeta^\vartheta$  может принимать фиксированное значение в пределах от 1 до  $r_\zeta^{\vartheta, \max}$  включительно, где  $r_\zeta^{\vartheta, \max} = M_\zeta^\vartheta - m_\zeta^\vartheta + 1$ ; если  $r_\zeta^\vartheta = 1$ , то цикл с параметром  $j_\zeta$  является глобальным не разбиваемым; если  $r_\zeta^\vartheta = r_\zeta^{\vartheta, \max}$ , то цикл с параметром  $j_\zeta$  является локальным не разбиваемым; если два набора операторов имеют общий цикл с параметром  $j_\zeta$ , то  $r_\zeta^{\vartheta_1} = r_\zeta^{\vartheta_2}$ ;

$Q_\zeta^\vartheta = \lceil (M_\zeta^\vartheta - m_\zeta^\vartheta + 1) / r_\zeta^\vartheta \rceil$ ,  $1 \leq \zeta \leq n^\vartheta$ , – число частей, на которые при формировании тайлов разбивается область значений параметра  $j_\zeta$  цикла, окружающего  $\vartheta$ -й набор операторов;

$V^{\vartheta, gl} = \{ J^{gl}(j_1^{gl}, \dots, j_{n^\vartheta}^{gl}) \mid 1 \leq j_\zeta^{gl} \leq Q_\zeta^\vartheta, 1 \leq \zeta \leq n^\vartheta \}$ , – области изменения параметров глобальных, т.е. уровня тайлов, циклов;

$V_{j^{gl}}^\vartheta = \{ J(j_1, \dots, j_{n^\vartheta}) \in V^\vartheta \mid m_\zeta^\vartheta + (j_\zeta^{gl} - 1)r_\zeta^\vartheta \leq j_\zeta \leq m_\zeta^\vartheta - 1 + j_\zeta^{gl}r_\zeta^\vartheta, 1 \leq \zeta \leq n^\vartheta \}$ ,  $J^{gl} \in V^{\vartheta, gl}$ , – области изменения параметров локальных (уровня операций тайлов) циклов при фиксированных значениях параметров глобальных циклов. Множество операций, выполняемых на итерациях множества  $V_{j^{gl}}^\vartheta$ , будем также обозначать  $V_{j^{gl}}^\vartheta$ . Множества  $V_{j^{gl}}^\vartheta$  называются тайлами  $V_{j^{gl}}^\vartheta$  или тайлами  $J^{gl}$ . Тайлы  $V_{j^{gl}}^\vartheta$  будем называть тайлами  $\vartheta$ -го типа.

Опишем структуру многомерного цикла после применения к нему преобразования тайлинга. Параметры циклов  $j_\zeta^{gl}$  изменяются в соответствии с неравенствами  $1 \leq j_\zeta^{gl} \leq Q_\zeta^\vartheta$ , для каждого набора операторов имеется столько локальных циклов, сколько  $r_1^\vartheta, \dots, r_{n^\vartheta}^\vartheta$  превосходят единицу.

Отметим, что некоторые множества  $V_{J^{gl}}^g$  могут быть пустыми; такой подход, при котором допускаются избыточные области изменения параметров глобальных циклов, называется методом окаймления [7].

**Последовательности зернистых вычислений.** Определим последовательности зернистых вычислений следующим образом [8, 9]: к одной последовательности отнесем вычисления тайлов с одинаковыми значениями функций  $\text{Pr}^g(J^{gl})$ ,  $1 \leq g \leq \Theta$ , отображающих тайлы на процессоры.

Для каждого  $g$  зафиксируем число  $\xi$ ,  $1 \leq \xi \leq n^g$ . Будем полагать

$$\text{Pr}^g(J^{gl}(j_1^{gl}, \dots, j_{n^g}^{gl})) = j_\xi^{gl} \quad (1)$$

или

$$\text{Pr}^g(J^{gl}(j_1^{gl}, \dots, j_{n^g}^{gl})) = Q_\xi^g - j_\xi^{gl} + 1. \quad (2)$$

Функция  $\text{Pr}^g$  вида (1) или (2) задает вычислительный процесс выполнения на процессоре с номером  $\text{Pr}^g(J^{gl})$  операций тайлов  $V_{J^{gl}}^g$  с одинаковыми значениями  $\xi$ -й координаты  $j_\xi^{gl}$  векторов  $J^{gl}$ ,  $J^{gl} \in V_{J^{gl}}^g$ . Этот вычислительный процесс будем также обозначать  $\text{Pr}^g(J^{gl})$ .

Последовательности зернистых вычислений назовем параллельными, если асимптотически, т.е. при большом размере задачи и без учета разгона вычислений и торможения вычислений, в каждый момент времени выполняются операции тайлов всех последовательностей. Условия, при выполнении которых последовательности зернистых вычислений являются параллельными, приводятся в работах [8, 9].

### Формализация коммуникационных операций

Коммуникационные операции зернистого алгоритма порождаются информационными зависимостями между тайлами. Глобальные (уровня тайлов) зависимости задаются векторами  $\varphi^{gl}$ , которые можно найти следующим образом [10].

Пусть  $\varphi$  – фиксированный вектор зависимостей, относящийся к  $g$ -му набору операторов,

$P^\varphi$  – количество индексов  $\zeta \in \{1, 2, \dots, n^g\}$  таких, что  $r_\zeta^g \neq r_\zeta^{g, \max}$  и  $\frac{\varphi_\zeta}{r_\zeta^g}$  не является целым

числом. Тогда вектор  $\varphi$  порождает  $2^{P^\varphi}$  глобальных векторов зависимостей; множество этих векторов содержит все различные векторы, у которых  $\zeta$ -я координата равна:

$$\left\lfloor \frac{\varphi_\zeta}{r_\zeta^g} \right\rfloor \text{ или } \left\lceil \frac{\varphi_\zeta}{r_\zeta^g} \right\rceil, \text{ если } r_\zeta^g \neq r_\zeta^{g, \max} \text{ и } \frac{\varphi_\zeta}{r_\zeta^g} \text{ не является целым числом;}$$

$$\frac{\varphi_\zeta}{r_\zeta^g}, \text{ если } r_\zeta^g \neq r_\zeta^{g, \max} \text{ и } \frac{\varphi_\zeta}{r_\zeta^g} - \text{целое число;}$$

$$0, \text{ если } r_\zeta^g = r_\zeta^{g, \max}.$$

Рассмотрим произвольный фиксированный вектор зависимостей  $\varphi$ . Пусть он порождается вхождениями  $(a, S_\alpha, 1)$  и  $(a, S_\beta, q)$ , где  $S_\alpha$  и  $S_\beta$  – операторы фиксированного  $g$ -го набора. Будем предполагать (не ограничивая случаев практического использования), что множество итераций  $J$  таких, что аргументы выполняемых на них операций являются результатами операций, выполняемых на итерации  $J - \varphi$ , имеет следующий вид:

$$V_{\alpha, \beta} = \{J \in \mathbb{Z}^{n^g} \mid \Lambda J + \lambda \leq J \leq P J + \rho\},$$

где  $\Lambda$  и  $P$  – нижние треугольные матрицы с нулевыми элементами на главной диагонали,  $\lambda$  и  $\rho$

–  $n^g$ -мерные векторы, неравенства векторов понимаются как неравенства соответствующих координат векторов.

Введем в рассмотрение множества

$$V_{J^{gl}, \varphi, \varphi^{gl}}^{in} = \left\{ J \in Z^{n^g} \mid \max \left\{ \Lambda J + \lambda, m^g + R^g(j^{gl} - 1_{n^g}) - \min \{0, R^g \varphi^{gl} - \varphi\} \right\} \leq J \leq \right. \\ \left. \min \{PJ + \rho, m^g + R^g j^{gl} - 1_{n^g} - \max \{0, R^g \varphi^{gl} - \varphi\}\} \right\}, \quad (3)$$

$$V_{J^{gl}, \varphi, \varphi^{gl}}^{out} = \left\{ J \in Z^{n^g} \mid \max \left\{ \Lambda(J + \varphi) + \lambda - \varphi, m^g + R^g(j^{gl} - 1_{n^g}) + \max \{0, R^g \varphi^{gl} - \varphi\} \right\} \leq J \leq \right. \\ \left. \min \{P(J + \varphi) + \rho - \varphi, m^g + R^g j^{gl} - 1_{n^g} + \min \{0, R^g \varphi^{gl} - \varphi\}\} \right\}, \quad (4)$$

где  $1_{n^g} = (1, 1, \dots, 1)$  –  $n$ -мерный вектор с единичными координатами,  $R^g = \text{diag}(r_1^g, \dots, r_{n^g}^g)$  – диагональная матрица,

**Теорема.** Пусть вычислительные процессы заданы функциями  $\text{Pr}^g$  вида (1) или (2) и зафиксированы произвольные вектор  $\varphi^{gl}$  и тайл  $J^{gl}$ , относящиеся к  $\mathcal{G}$ -му набору операторов. Если  $\varphi_\xi^{gl} \neq 0$ , то вектор  $\varphi^{gl}$  порождает коммуникационную операцию получения процессом  $\text{Pr}^g(J^{gl})$  массива  $a(F_{a, S_\beta, q}(J))$ , где  $J \in V_{J^{gl}, \varphi, \varphi^{gl}}^{in}$ , от процесса  $\text{Pr}^g(J^{gl} - \varphi^{gl})$ . Если  $\varphi_\xi^{gl} \neq 0$ , то вектор  $\varphi^{gl}$  порождает также коммуникационную операцию отправки процессом  $\text{Pr}^g(J^{gl})$  массива  $a(F_{a, S_\alpha, 1}(J))$ , где  $J \in V_{J^{gl}, \varphi, \varphi^{gl}}^{out}$ , процессу  $\text{Pr}^g(J^{gl} + \varphi^{gl})$ .

Если  $\varphi_\xi^{gl} = 0$ , то вектор  $\varphi^{gl}$  коммуникационных операций между процессами не порождает.

**Доказательство.** Рассмотрим множество итераций тайла  $J^{gl}$  таких, что аргументы выполняемых на них операций являются результатами операций тайла  $J^{gl} - \varphi^{gl}$ . Из результатов работы [10] следует, что итерации этого множества должны удовлетворять неравенствам

$$m^g + R^g(J^{gl} - 1_{n^g}) - \min \{0, R^g \varphi^{gl} - \varphi\} \leq J \leq m^g + R^g J^{gl} - 1_{n^g} - \max \{0, R^g \varphi^{gl} - \varphi\};$$

кроме того, должно выполняться условие  $J \in V_{\alpha, \beta}$ . Таким образом, рассматриваемое множество выражается в виде (3).

Аналогично, итерации тайла  $J^{gl}$  такие, что результаты выполняемых на них операций являются аргументами операций тайла  $J^{gl} + \varphi^{gl}$ , должны удовлетворять неравенствам

$$m^g + R^g(J^{gl} - 1_{n^g}) + \max \{0, R^g \varphi^{gl} - \varphi\} \leq J \leq m^g + R^g J^{gl} - 1_{n^g} + \min \{0, R^g \varphi^{gl} - \varphi\}$$

и  $J + \varphi \in V_{\alpha, \beta}$ . Поэтому множество таких итераций выражается в виде (4).

Согласно функциям (1) и (2), тайлы  $J^{gl}$ ,  $J^{gl} - \varphi^{gl}$ ,  $J^{gl} + \varphi^{gl}$  принадлежат последовательностям зернистых вычислений  $\text{Pr}^g(J^{gl})$ ,  $\text{Pr}^g(J^{gl} - \varphi^{gl})$ ,  $\text{Pr}^g(J^{gl} + \varphi^{gl})$  соответственно; номер последовательности  $\text{Pr}^g(J^{gl})$  отличается от номеров последовательностей  $\text{Pr}^g(J^{gl} - \varphi^{gl})$  и  $\text{Pr}^g(J^{gl} + \varphi^{gl})$  на  $\varphi_\xi^{gl}$ . При  $\varphi_\xi^{gl} = 0$  это одна и та же последовательность; она реализуется одним вычислительным процессом, так что обменов не требуется. Рассматриваемый вектор зависимостей  $\varphi$  порождается вхождениями  $(a, S_\alpha, 1)$  и  $(a, S_\beta, q)$ . Поэтому на итерациях  $V_{J^{gl}, \varphi, \varphi^{gl}}^{in}$  в качестве аргументов требуются элементы массива  $a(F_{a, S_\beta, q}(J))$ , где  $J \in V_{J^{gl}, \varphi, \varphi^{gl}}^{in}$ , а на итерациях  $V_{J^{gl}, \varphi, \varphi^{gl}}^{out}$  вычисляются элементы массива  $a(F_{a, S_\alpha, 1}(J))$ , где  $J \in V_{J^{gl}, \varphi, \varphi^{gl}}^{out}$ .

Таким образом, в параллельном алгоритме, задающем параллельные последовательности

зернистых вычислений, перед записью тайла  $J^{gl}$  требуется для каждого  $\varphi^{gl}$  такого, что  $\varphi_\xi^{gl} \neq 0$ , записать коммуникационную операцию получения массива данных

$$\text{receive}\left(\text{Pr}^g\left(J^{gl} - \varphi^{gl}\right); a\left(F_{a, S_\beta, q}(J)\right), J \in V_{J^{gl}, \varphi, \varphi^{gl}}^{in}; \left|V_{J^{gl}, \varphi, \varphi^{gl}}^{in}\right|\right),$$

где первый аргумент обозначает процесс, в котором вычислялся массив, второй аргумент обозначает пересылаемый массив, третий аргумент указывает объем (число элементов) массива. После записи тайла  $J^{gl}$  требуется для каждого  $\varphi^{gl}$  записать коммуникационную операцию отправки массива данных

$$\text{send}\left(\text{Pr}^g\left(J^{gl} + \varphi^{gl}\right); a\left(F_{a, S_\alpha, 1}(J)\right), J \in V_{J^{gl}, \varphi, \varphi^{gl}}^{out}; \left|V_{J^{gl}, \varphi, \varphi^{gl}}^{out}\right|\right),$$

где первый аргумент обозначает процесс, которому потребуется вычисленные элементы массива, второй аргумент обозначает пересылаемый массив, третий аргумент указывает объем массива.  $\square$

**Пример.** Один из вариантов алгоритма локально-одномерного метода численного решения двумерных параболических уравнений можно представить в схематичном, но отражающем информационные зависимости, виде:

$$\begin{aligned} &do\ j_1 = 1, j_0 \\ &\quad do\ j_2 = 1, N_2 - 1 \\ &\quad\quad do\ j_3 = 1, N_1 - 1 \\ &\quad\quad\quad S_1: \quad \gamma(j_2, j_3 + 1) = \gamma(j_2, j_3) + y_{(2)}(j_3, j_2) \\ &\quad\quad do\ j_2 = 1, N_2 - 1 \\ &\quad\quad\quad do\ j_3 = 1, N_1 - 1 \\ &\quad\quad\quad\quad S_2: \quad y_{(1)}(N_1 - j_3, j_2) = \gamma(N_1 - j_3 + 1, j_2) + y_{(1)}(N_1 - j_3 + 1, j_2) \\ &\quad\quad do\ j_2 = 1, N_1 - 1 \\ &\quad\quad\quad do\ j_3 = 1, N_2 - 1 \\ &\quad\quad\quad\quad S_3: \quad \delta(j_3 + 1) = \delta(j_3) + y_{(2)}(j_2, j_3) \\ &\quad\quad do\ j_3 = 1, N_2 - 1 \\ &\quad\quad\quad S_4: \quad y_{(2)}(j_2, N_2 - j_3) = \delta(N_2 - j_3 + 1) y_{(2)}(j_1, N_2 - j_3 + 1) \end{aligned}$$

Зависимости, порождаемые парами вхождений  $((\gamma, S_1, 1), (\gamma, S_1, 2))$ ,  $((y_{(1)}, S_2, 1), (y_{(1)}, S_2, 2))$ ,  $((\delta, S_3, 1), (\delta, S_3, 2))$ ,  $((y_{(2)}, S_4, 1), (y_{(2)}, S_4, 2))$  являются однородными и задаются вектором  $\varphi = (0, 0, 1)$ .

Все четыре выполняемых оператора окружены несовпадающими множествами циклов ( $\Theta = 4$ ). Пусть  $\xi = 3$  для  $\mathcal{S} = 1, 2$ , и  $\xi = 2$  для  $\mathcal{S} = 3, 4$ . Так как вторая координата вектора  $\varphi = (0, 0, 1)$  равна нулю, то  $\varphi_2^{gl} = 0$  независимо от выбора размеров тайлов. Поэтому истинные зависимости, определяемые парами вхождений  $((\delta, S_3, 1), (\delta, S_3, 2))$  и  $((y_{(2)}, S_4, 1), (y_{(2)}, S_4, 2))$ , коммуникационных операций не порождают.

Положим для  $\mathcal{S} = 1, 2$ :  $r_1^{\mathcal{S}} = 1$ ,  $1 < r_2^{\mathcal{S}} < r_2^{\mathcal{S}, max}$ ,  $1 < r_3^{\mathcal{S}} < r_3^{\mathcal{S}, max}$ . Тогда вектор  $\varphi = (0, 0, 1)$  порождает два ( $P^\varphi = 1$ ) глобальных вектора  $\varphi^{gl}(0, 0, 0)$  и  $\varphi^{gl}(0, 0, 1)$ . Вектор  $\varphi^{gl}(0, 0, 1)$  порождает коммуникационные операции элементов массивов, так как  $\xi = 3$ ,  $\varphi_3^{gl} \neq 0$ . Множества операций, порождающие глобальные зависимости, имеют следующий вид:

$$V_{j_1^{gl}, \varphi(0, 0, 1), \varphi^{gl}(0, 0, 1)}^{in} = \{(j_1, j_2, j_3) \in Z^3 \mid j_1 = j_1^{gl},$$

$$1 + r_2^g(j_2^{gl} - 1) \leq j_2 \leq \min\{N_2 - 1, r_2^g j_2^{gl}\}, \max\{2, 1 + r_3^g(j_3^{gl} - 1)\} \leq j_3 \leq r_3^g(j_3^{gl} - 1) + 1\},$$

$$V_{j_1^{gl}, \varphi(0,0,1), \varphi^{gl}(0,0,1)}^{out} = \{(j_1, j_2, j_3) \in Z^3 \mid j_1 = j_1^{gl},$$

$$1 + r_2^g(j_2^{gl} - 1) \leq j_2 \leq \min\{N_2 - 1, r_2^g j_2^{gl}\}, r_3^g j_3^{gl} \leq j_3 \leq \min\{N_1 - 2, r_3^g j_3^{gl}\}\}.$$

Положим для  $g=3,4$ :  $r_1^g=1$ ,  $1 < r_2^g < r_2^{g,max}$ ,  $r_3^g = r_3^{g,max}$ . Как описано выше, в этих циклах коммуникационных операций не добавляется.

Зададим число частей  $Q_\zeta^g$ , на которые при формировании тайлов разбиваются области значений параметров циклов  $j_\zeta$ , окружающие  $g$ -е наборы операторов:  $Q_3^1 = Q_3^2 = Q_2^3 = Q_2^4 = P$ , где  $P$  – количество вычислительных процессов. Зададим также функции отображения тайлов на процессы:  $Pr^1(j_1^{gl}, j_2^{gl}, j_3^{gl}) = j_3^{gl}$ ,  $Pr^2(j_1^{gl}, j_2^{gl}, j_3^{gl}) = P - j_3^{gl} + 1$ ,  $Pr^g(j_1^{gl}, j_2^{gl}, j_3^{gl}) = j_2^{gl}$ ,  $g=3,4$ . Параллельный алгоритм, содержащий как вычислительные, так и коммуникационные операции, для реализации на компьютерах с распределенной памятью можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \text{if } 1 \leq p \leq P \\ & \text{do } j_1^{gl} = 1, j_0 \\ & \quad \text{do } j_2^{gl} = 1, Q_2^1 \\ & \quad \quad \text{if } p > 1 \text{ receive}(p-1; \gamma(j_2, 1 + (p-1)r_3^1), 1 + (j_2^{gl} - 1)r_2^1 \leq j_2 \leq \\ & \quad \quad \quad \min\{N_2 - 1, j_2^{gl}r_2^1\}; \min\{N_2 - 1 - r_2^1(q-1), r_2^1\}) \\ & \quad \quad \text{do } j_2 = 1 + (j_2^{gl} - 1)r_2^1, \min(N_2 - 1, j_2^{gl}r_2^1) \\ & \quad \quad \quad \text{do } j_3 = 1 + (p-1)r_3^1, \min(N_1 - 1, pr_3^1) \\ & \quad \quad \quad \quad S_1: \gamma(j_2, j_3 + 1) = \gamma(j_2, j_3) + y_{(2)}(j_3, j_2) \\ & \quad \quad \text{if } p < P \text{ send}(p+1; \gamma(j_2, 1 + pr_3^1), 1 + (j_2^{gl} - 1)r_2^1 \leq j_2 \leq \\ & \quad \quad \quad \min\{N_2 - 1, j_2^{gl}r_2^1\}; \min\{N_2 - 1 - r_2^1(q-1), r_2^1\}) \\ & \quad \text{do } j_2^{gl} = 1, Q_2^2 \\ & \quad \quad \text{if } p < P \text{ receive}(p+1; y_{(1)}(N_1 - (P - p + 1)r_3^2, j_2), 1 + (j_2^{gl} - 1)r_2^2 \leq j_2 \leq \\ & \quad \quad \quad \min\{N_2 - 1, j_2^{gl}r_2^2\}; \min\{N_2 - 1 - r_2^2(j_2^{gl} - 1), r_2^2\}) \\ & \quad \quad \text{do } j_2 = 1 + (j_2^{gl} - 1)r_2^2, \min(N_2 - 1, j_2^{gl}r_2^2) \\ & \quad \quad \quad \text{do } j_3 = 1 + (P - p)r_3^2, \min(N_1 - 1, (P - p + 1)r_3^2) \\ & \quad \quad \quad \quad S_2: y_{(1)}(N_1 - j_3, j_2) = \gamma(N_1 - j_3 + 1, j_2) + y_{(1)}(N_1 - j_3 + 1, j_2) \\ & \quad \quad \text{if } p > 1 \text{ send}(p-1; y_{(1)}(N_1 - (P - p)r_3^2, j_2), 1 + (j_2^{gl} - 1)r_2^2 \leq j_2 \leq \\ & \quad \quad \quad \min\{N_2 - 1, j_2^{gl}r_2^2\}; \min\{N_2 - 1 - r_2^2(j_2^{gl} - 1), r_2^2\}) \\ & \quad \text{do } j_2 = 1 + (p-1)r_2^3, \min(N_1 - 1, pr_2^3) \\ & \quad \quad \text{do } j_3 = 1, N_2 - 1 \\ & \quad \quad \quad S_3: \delta(j_3 + 1) = \delta(j_3) + y_{(2)}(j_2, j_3) \\ & \quad \quad \text{do } j_3 = 1, N_2 - 1 \end{aligned}$$

$$S_4: y_{(2)}(j_2, N_2 - j_3) = \delta(N_2 - j_3 + 1) y_{(2)}(i_1, N_2 - j_3 + 1)$$

Таким образом, в статье указаны правила формализации и включения в схему алгоритма коммуникационных операций уровня тайлов.

#### Литература

1. Irigoin F., Triolet R. Supernode partitioning // Proceedings of the ACM SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages. P. 319–329. San Diego, California, Jan. 1988.
2. Lim A. W., Liao S.W., Lam M.S. Blocking and array contraction across arbitrary nested loops using affine partitioning // Proceedings of the ACM SIGPLAN Symposium on Principles and Practice of Parallel Programming. P. 103–112. Snowbird, Utah, June, 2001.
3. Hodzic E. Shang W. // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. 2002. Vol. 13, № 12. P. 1220–1223.
4. Xue J., Cai W. // Parallel Computing. 2002. Vol. 28, № 5. P. 915–939.
5. Соболевский П.И., Баханович С.В., Горбач А.Н. // Кибернетика и системный анализ, 2010. Т.46, №1, С.163-171.
6. Лиходед Н.А., Толстикова А.А. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 2. С. 107–112.
7. Renganarayanan L., Kim D.G., Rajopadhye S., Strout M.M. Parameterized Tiled Loops for Free // ACM SIGPLAN Conference on Programming Language Design and Implementation. San Diego, California, USA, June 2007. P. 126–138.
8. Лиходед Н.А., Толстикова А.А. // Информатика. 2008. Т. 15, № 2. С. 129-136.
9. Лиходед Н.А., Толстикова А.А. // Доклады НАН Беларуси. 2010. Т. 54, № 4. С. 36-41.
10. Лиходед Н.А., Соболевский П.И. // Доклады НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 2. С. 22-26.

#### SUMMARY

A method for the generation of communication operations in parallel grained algorithm for the case of the operations determined by inform dependencies is developed. Propositions to formalize the communication operations send and receive data arrays are stated and proved.

Likhoded N.A., Sobolevsky P.I., Tolstikov A.A.

Parallel algorithm communication operations generated by uniform dependencies

УДК 519.6

Лиходед Н.А., Соболевский П.И., Толстиков А.А. Коммуникационные операции параллельного алгоритма, порождаемые однородными зависимостями // Доклады НАН Беларуси. 2011?. Т. 55?. № ?. С. ?.

Разработан метод генерации коммуникационных операций в параллельном зернистом алгоритме для случая операций, определяемых однородными информационными зависимостями. Сформулированы и доказаны утверждения, позволяющие формализовать коммуникационные операции получения и отправки массивов данных.

Библиогр. – 10 назв.