УДК 517.925/926+517.938

А.П. Садовский, Т.В. Щеглова

Центры полиномиальной дифференциальной системы

Резюме. В статье представлено 8 условий центра для кубической системы с десятью параметрами, а также 12 условий центра для приведенной системы вида $x' = yP_0(x),\ y' = -x + xQ(x)y + P_2(x)y^2$ в случае непостоянных абсолютных иваринтов в методе Черкаса.

Ключевые слова: кубическая система, метод Черкаса, многообразие центра, проблема центра и фокуса, теорема Люрота.

Аннотация. Рассматривается проблема центра и фокуса для системы $x' = y(1 + Dx + Px^2) + Hx^2 + Qx^3$, $y' = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2$ (1). Показано, что (1) приводится к виду $x' = yP_0(x),\ y' = -x + xQ(x)y + {}$ $+P_2(x)y^2$ (2). При условии $DHQ - H^2P - Q^2 = 0$ система (1) принимает вид $x' = (1+Gx)(y + Hx^2 + Rxy)$, $y' = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2$ (3), где $G = Q/H$, $R = PH/Q$. В работе приводится решение проблемы центра и фокуса для системы (1) в случае $Q(x) \equiv 0$, а также 5 достаточных условий центра системы (3) в случае $\left[\left(Q'(x)P_0(x) + Q(x)P_2(x)\right)/x\right]/Q^3(x) \equiv const$. Используя метод Черкаса и теорему Люрота, в случае непостоянных абсолютных инвариантов для системы (2) находятся 12 условий центра.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$x' = yP_0(x),\ y' = -x + xQ(x)y + P_2(x)y^2, \tag{1}$$

где $P_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{8} c_k x^k$, $P_2(x) = \sum_{i=0}^{7} c_i x^i$, $Q(x) = \sum_{j=1}^{4} b_j x^{j-1}$, $a_i, b_j, c_k \in \mathbb{C},\ i = \overline{0,7},\ j = \overline{1,4},\ k = \overline{1,8}$.

Наряду с (1) будем рассматривать кубическую систему вида

$$x' = y(1 + Dx + Px^2) + Hx^2 + Qx^3,\ y' = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2, \tag{2}$$

где $A, B, C, D, H, K, L, M, P, Q \in \mathbb{C}$.

Введем многочлен $\alpha_0(x) = 1 - (A - 2D)x + \left(D^2 - 2AD + 3BH - K + 2P\right)x^2 - \left(AD^2 + CH^2 - 3BDH + {}\right.$ $\left.+2DK - 3HL + 2AP - 2DP - 3BQ\right)x^3 + \left(P^2 - D^2K - H^2M + 3H(DL + BP) - 2P(AD + K) + (3BD - 2CH + 3L)Q\right)\times$ $\times x^4 - \left(CQ^2 + P(2DK - 3HL + AP) - (3DL - 2HM + 3BP)Q\right)x^5 - \left(P^2K + Q^2M - 3LPQ\right)x^6$. Тогда при помощи замен $y = \left(\alpha_0(x)Y - Hx^2 - Qx^3\right)/\left(1 + Dx + Px^2\right)$ и $d\tau = \left(1 + Dx + Px^2\right)dt$, система (2) приводится к системе (1).

Для (2) в начале координат возникает проблема центра и фокуса. Решения проблемы центра и фокуса для различных частных случаев полной кубической системы представлены в работах [1-3]. Для системы (2) при $H = Q = 0$ необходимые и достаточные условия найдены в работе [4], а при $M = P = 0$ - в работе [5]. Условия центра для систем вида (1) при различных многочленах $P_0(x), P_2(x), Q(x)$ указаны в [6-8].

Вычислим фокусные величины системы (1), например, используя программу из [9, с. 109; 10]. Они имеют вид $g_1 = b_2 + a_0 b_1$, $g_2 = 23a_0 b_1^3 + a_0 b_1\left(76a_0^2 + 29a_0c_1 + 3c_1^2 + 7c_2 + a_1\right) - 4b_1a_2 + \left(64a_0^2 + 17a_0c_1 + 3c_1^2 + 23b_1^2 + {}\right.$ $\left.+3c_2 + 9a_1\right)b_2 - 4(7a_0 + 2c_1)b_3 - 12b_4$, g_3 содержит 80 слагаемых, g_4 - 314, g_5 - 1049, g_6 - 3118, g_7 - 8457, g_8 - 21331, g_9 - 50666, g_{10} - 114376, g_{11} - 247131. Введем вектор $p = \left(a_0, a_1, ..., a_7, b_1, ..., b_4, c_1, ..., c_8\right)$ и образуем идеал $I = \langle g_1, g_2, ... \rangle$. Тогда $V(I) = \left\{p \in \mathbb{C}^{20} : \forall g \in I\ g(p) = 0\right\}$ - многообразие центра системы (1) [9, с.109: 11 с.112]. Особая точка 0(0,0) системы (1) является центром тогда и только тогда, когда $p \in V(I)$.

Из равенства нулю первых двух фокусных величин следует выполнение соотношений

$$Q'(x)P_0(x) + Q(x)P_2(x) = xR(x), \quad R'(x)Q(x) - 3R(x)Q'(x) = xS(x),$$

где $Q(x) = b_1 - a_0b_1x + b_3x^2 + b_4x^3$, $R(x) = \sum_{j=0}^{9} r_j x^j$, $S(x) = \sum_{k=0}^{9} s_k x^k$, $r_j, s_k \in \mathbb{C},\ j = \overline{0,9},\ k = \overline{0,9}$.

Из [8, 12] следует, что особая точка 0(0, 0) системы (1) является центром тогда и только тогда, когда система уравнений

$$F(x) = F(y), \quad G(x) = G(y), \tag{3}$$

где $F(x) = R(x)/Q^3(x), G(x) = P_0(x)S(x)/R^2(x)$, имеет аналитическое в окрестности $x = 0$ решение $y = \psi(x)$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = -1$, или хотя бы одно из уравнений системы (3) обращается в тождество.

Пусть 0(0,0) системы (1) является центром. Тогда

$$F(x) = F(\psi(x)), \quad G(x) = G(\psi(x)).$$

Пусть H множество, состоящее из всех рациональных функций $r(x)$ таких, что $r(x) = r(\psi(x))$. Ясно, что H - подполе поля рациональных функций $\mathbb{C}[x]$. Тогда из метода Черкаса и теоремы Люрота [13, с.37] следует, что в случае центра существуют рациональная функция $\varphi(x)$, для которой $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, и рациональные функции $f(z), g(z)$ такие, что

$$F(x) = f(\varphi(x)), \quad G(x) = g(\varphi(x)).$$

Разобьем исследование проблемы центра и фокуса для системы (1) на пять возможных случаев:

I. $Q(x) \equiv 0$. Тогда $V(U_1) \subset V(I)$, где $U_1 = \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$.

II. $Q(x) \neq 0, R(x) \equiv 0$. Тогда $V(U_2) \subset V(I)$, где $U_2 = \langle r_0, r_1, r_2, ..., r_9 \rangle$.

III. $Q(x) \neq 0, R(x) \neq 0, R(x)/Q^3(x) \equiv const$. Тогда $V(U_3) \subset V(I)$, где $U_3 = \langle s_0, s_1, s_2, ..., s_9 \rangle$.

IV. $Q(x)R(x) \neq 0, R(x)/Q^3(x) \neq const, P_0(x)S(x)/R^2(x) \equiv const$. Имеет место тождество

$$\left(P_0 S\right)' R - 2R' P_0 S = \sum_{i=0}^{25} k_i x^i \equiv 0, \quad k_i \in \mathbb{C}, i = \overline{0,25}.$$

V. $R(x)/Q^3(x) \neq const, P_0(x)S(x)/R^2(x) \neq const$, существует рациональная функция $\varphi(x)$ $\left(\varphi(0) = \varphi'(0) = 0\right)$, и рациональные функции f, g, для которых

$$R(x)/Q^3(x) \equiv f(\varphi(x)), \quad P_0(x)S(x)/R^2(x) \equiv g(\varphi(x)). \tag{4}$$

Введем вектор $h = \left(K, L, M, P, Q, H, B, D, C, A\right)$. При преобразовании системы (2) к системе (1) получаем, что $Q(x) = \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 x + \tilde{b}_3 x^2 + \tilde{b}_4 x^3$, где $\tilde{b}_1 = 3B + 2H$, $\tilde{b}_2 = 3BD - 2CH + DH + 3(L+Q)$, $\tilde{b}_3 = 3(DL + BP) - 2(HM + Q(C-D))$, $\tilde{b}_4 = 3LP - Q(2M - P)$.

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$\sqrt{\langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4 \rangle} = \bigcap_{i=1}^{3} J_i,$$

где $J_1 = \langle B, H, L, Q \rangle$, $J_2 = \langle 2C + D, 3B + 2H, M + P, L + Q \rangle$, $J_3 = \langle 3B + 2H, B(2C + D) + 2(L + Q), 9B^2(2CD + D^2 - 2M) + 6B(2C + 3D)Q + 8Q^2, 9B^2 P + 2Q(3BD + 2Q), 1 - Bt \rangle \bigcap \mathbb{C}[h]$.

Доказательство: Найдем базис Гребнера идеала $\langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4 \rangle$ с порядком переменных $K > L > M > P > Q > H > B > D > C > A$. Имеет место включение $\langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4 \rangle \subset (J_2 \cap J_3)$. Используя алгоритмы пересечения и деления идеалов, например,[9,с.83], получаем $\langle \tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4 \rangle : (J_2 \cap J_3) = J_1$. Теорема доказана.

В случае $DHQ - H^2 P - Q^2 = 0$ система (2) принимает вид

$$x' = (1 + Gx)\left(y + Hx^2 + Rxy\right), \; y' = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2 y + Mxy^2, \tag{5}$$

где $G = Q/H$, $R = PH/Q$. Введем вектор $\tilde{h} = \left(K, L, M, R, G, H, B, C, A\right)$ и положим $\delta = A + C$, $\mu = 2A + C$, $\sigma = 3A + 2C$, $\tau = A + 2C$, $w_0 = \left(f_0 v_2 - f_2 v_0\right)/\left(3(3B + 2H)\right)$, $w_1 = \left(f_1 v_2 - f_2 v_1\right)/\left(3(3B + 2H)\right)$, где

$$\begin{gathered}
f_0 = 4G^3H^2\left(12H^2 - 4CR + 3R^2\right) + 2G^2H^2\left(6C\delta^2 + 8H^2(10A + 6C - 7R) - 3(A - \right. \\
\left. -7C)CR + 2(7A + 11C)R^2 - 17R^3\right) + 4H^4\left(\mu^2(\delta + \sigma) - 2\left(10A^2 + 7AC + 4C^2\right)R + \right. \\
\left. +4(5A - 3C)R^2 - 7R^3\right) - 2H^2(C - R)\left(2C\delta^2(\delta + \sigma) - 2C\left(5A\delta + 2C^2\right)R - \left(8A^2 - \right.\right. \\
\left.\left. -AC + 23C^2\right)R^2 + (6A - 23C)R^3 - 7R^4\right) + 27B^3H(\delta + R)\left(\mu(\delta + \sigma) + 6G^2 + G \times \right. \\
\left. \times(14A + 9C - 2R) - R(6A + 7C + 2R)\right) + 2GH^2\left(8AC\delta^2 + \left(12A^2 + 49AC + 19C^2\right) \times \right. \\
\times CR + \left(8A^2 + 12AC - 33C^2\right)R^2 - 2(10A - C)R^3 + 2H^2\left(\mu(22A + 15C) - (48A + \right. \\
\left. \left. +6C - 25R)R\right) + 18R^4\right) - 3BH\left((C - R)\left(4C\delta^2(\delta + \sigma) - 2C\left(2A^2 - AC - C^2\right)R - \right.\right. \\
\left. -\left(8A^2 - AC - 13C^2\right)R^2 + (6A + 13C)R^3 + 2R^4\right) - 2G^3\left(24H^2 - 4CR + 3R^2\right) - G^2 \times \\
\times\left(12C\delta^2 + 4H^2(46A + 30C - 13R) + (7A + 31C)CR + (14A + 17C)R^2 - 8R^3\right) - 2 \times
\end{gathered}$$

$$\times\left(2\mu\sigma(\delta+\sigma)-2\left(18A^2+17AC+3C^2\right)R+3(8A+7C)R^2+9R^3\right)H^2-\left(16AC\delta^2+\right.$$

$$+C\left(32A^2+83AC+33C^2\right)R+\left(8A^2+22AC+13C^2\right)R^2-4(5A+4C)R^3+2H^2\times$$

$$\times\left(2\left(58A^2+75AC+24C^2\right)-(72A+43C-R)R\right)\Big)G\Big)-9B^2\left(C\delta^2(C-R)(\delta+\sigma+\right.$$

$$+3R)-12G^3H^2-G^2\left(C(\delta+R)(3\delta+2R)+2H^2(32A+7R+24C)\right)-G\left(C\delta(4A\delta+\right.$$

$$+(10A+7C)R+5R^2)+H^2\left(100A^2+144AC+51C^2-23CR-28R^2\right)\Big)-H^2\left(48A^3+\right.$$

$$+4A^2(25C-3R)+A\left(68C^2-26CR-12R^2\right)+3\left(5C^3-2C^2R+5CR^2+4R^3\right)\Big)\Big)\Big),$$

$$f_1=81B^3H(\delta+R)-4H^4(10A-C-23R)-4G^2H^2(8C-7R)-2GH^2\left(2\left(3A^2+\right.\right.$$

$$+23AC+12C^2\Big)+44H^2-\left(23A+37(C-R)\right)R\Big)-9B^2\left(\delta\left(4A^2+11AC+5C^2+R\times\right.\right.$$

$$\times(3A+7C)\Big)-H^2(2A-5C-19R)+G\left(\delta(3A+7C)-14H^2+(2A+5C)R\right)\Big)-2\times$$

$$\times\left(8A^3+2A^2(23C-5R)+20C^3+36C^2R-23CR^2-27R^3+\left(54C^2-16CR+11R^2\right)\times\right.$$

$$\times A)H^2-3BH\left(16A^3+A^2(76C-4R)+30C^3+2G^2(8C-7R)-22C^2R+13CR^2+\right.$$

$$+9R^3+4H^2(7A+5C+R)+G\left(2\left(6A^2+33AC+19C^2\right)+16H^2-(19A-9C-R)\times\right.$$

$$\times R\big)+A\left(86C^2+4CR+11R^2\right)\Big),$$

$$f_2=9\tau B^2+6BH(A-7C+2G+5R)+4H^2(9C+2G-13R),$$

$$v_0=2H^4\left(2\delta\mu^2(\mu+\sigma)-2\left(156A^3+199A^2C+70AC^2+13C^3\right)R+\left(412A^2+259AC-\right.\right.$$

$$-C^2\Big)R^2-(267A-26C)R^3+67R^4\Big)-H^2(C-R)\left(2C\delta^3(\mu+\sigma)-4\delta\left(39A^2+36AC+\right.\right.$$

$$+7C^2\Big)CR-4\left(5A^3-51A^2C-30AC^2+10C^3\right)R^2+2\left(73A^2-69AC+24C^2\right)R^3-R^4\times$$

$$\times(133A-151C)+67R^5\Big)+G^2H^2\left(12C\delta^3-6\delta(27A-4C)CR+R^2\left(32A^2+105AC-\right.\right.$$

$$-155C^2\Big)-(283A+360C)R^3+191R^4+4H^2\left(4\delta(11A+6C)-(355A+236C-152R)\times\right.$$

$$\times R\big)\Big)+2G^3H^2\left(12H^2(2\delta-13R)-R\left(28C\delta-(6A+43C-39R)R\right)\right)+27B^3H(\delta+R)\times$$

$$\times\left(\delta\mu(\mu+\sigma)+6G^2(\delta-7R)-\left(73A^2+115AC+47C^2\right)R+(29A+34C)R^2+10R^3+\right.$$

$$G\left(\delta(16A+9C)-(98A+67C-16R)R\right)\Big)+2GH^2\left(10AC\delta^3-2C\delta R\left(26A^2-35AC-\right.\right.$$

$$-19C^2\Big)+2\left(5A^3-37A^2C-202AC^2-112C^3\right)R^2-\left(89A^2+54AC-229C^2\right)R^3+R^4\times$$

$$\times(202A+95C)-90R^5+H^2\left(2\delta\mu(26A+15C)-\left(866A^2+811AC+81C^2\right)R+(763A+\right.$$

$$+358C)R^2-247R^3\Big)\Big)-9B^2\left(C\delta^2(C-R)\left(5A^2+A(8C-29R)+3(C-8R)(C+R)\right)-\right.$$

$$-12G^3H^2(\delta-7R)-H^2\left(\delta\mu(\mu+\delta)(6A+5C)-\left(408A^3+867A^2C+587AC^2+120C^3-\right.\right.$$

$$-2\left(15A^2+92AC+51C^2\right)R-3(45A-4C)R^2+57R^3\Big)R\Big)-G^2\left(\left(3\delta^3-20\delta^2R-39\delta R^2-\right.\right.$$

$$-16R^3\Big)C+4H^2\left(\delta(17A+12C)-2R(53A+37C+11R)\right)\Big)-G\left(\delta C\left(5A\delta^2-(21A-8C)\times\right.\right.$$

$$\times\delta R-4(19A+13C)R^2-40R^3\Big)+H^2\left(\delta\left(116A^2+156AC+51C^2\right)-R\left(761A^2+541C^2+\right.\right.$$

$$+1153AC+(134A+C-149R)R\Big)\Big)\Big)\Big)-3BH\left((C-R)\left(4C\delta^3(\mu+\delta)-4C\delta\left(34A^2+14C^2+\right.\right.\right.$$

$$+43AC\Big)R-2\left(5A^3-27A^2C-57AC^2-35C^3\right)R^2+\left(73A^2+81AC-12C^2\right)R^3-(29A+$$

$$+64C)R^4-10R^5\Big)-H^2\left(4\delta\mu\sigma(\mu+\delta)-2\left(438A^3+732A^2C+361AC^2+45C^3\right)R+R^2\times\right.$$

$$\times\left(648A^2+835AC+255C^2\right)-3(51A+58C)R^3-87R^4\Big)-G^2\left(12C\delta^3-(121A+28C)\times\right.$$

$$\times C\delta R+\left(16A^2-63AC-202C^2\right)R^2-8\left(13A+16C\right)R^3+58R^4+2H^2\left(20\delta\left(\mu+\sigma\right)-\right.$$

$$\left.-\left(707A+460C-148R\right)R\right)\Big)-2G^3\left(6H^2\left(4\delta-27R\right)-R\left(14C\delta-\left(3A+23C-21R\right)R\right)\right)-$$

$$-G\Big(20AC\delta^3-2C\delta\left(47A^2-22AC-27C^2\right)R+2\left(5A^3-113A^2C-255AC^2-89C^3\right)\times$$

$$\times R^2-\left(89A^2+209AC+94C^2\right)R^3+\left(127A+104C\right)R^4-6R^5+H^2\Big(4\delta\Big(68A^2+81AC+$$

$$+24C^2\Big)-\left(2060A^2+2557AC+751C^2-\left(823A+560C\right)R+13R^2\right)R\Big)\Big)\Big),$$

$$v_1=81B^3H\left(7A+6C+2G-6R\right)\left(\delta+R\right)-4H^4\Big(83A^2+96AC+19C^2-\big(132A+80C-$$

$$-97R\big)R\Big)-4G^2H^2\left(28C\delta-\left(17A+54C-38R\right)R\right)-2GH^2\Big(2\delta\left(3A^2+52AC+12C^2\right)+$$

$$+4H^2\left(67A+61C-37R\right)-\left(103A^2+431AC+242C^2\right)R+\left(291A+364C\right)R^2-170R^3\Big)-$$

$$-2H^2\Big(2\delta\left(5A^3+28A^2C+3AC^2-10C^3\right)-2\left(39A^3+150A^2C+49AC^2-40C^3\right)R+R^2\times$$

$$\times\left(123A^2+137AC-154C^2\right)-\left(163A-16C\right)R^3+126R^4\Big)-9B^2\Big(12G^2H^2-H^2\Big(\delta\big(A-$$

$$-16C\big)-\left(81A+40C\right)R+92R^2\Big)+G\Big(\delta^2\left(3A+8C\right)-2H^2\left(20A+23C-29R\right)-\delta\big(23A+$$

$$+52C\big)R-8\left(2A+5C\right)R^2\Big)+\delta\Big(\delta\left(5A^2+13AC+4C^2\right)-\left(29A^2+77AC+32C^2\right)R-8\times$$

$$\times\left(3A+7C\right)R^2\Big)\Big)-3BH\Big(4\delta\left(5A^3+23A^2C+10AC^2-3C^3\right)-4R\Big(34A^3+128A^2C+$$

$$+154AC^2+65C^3\Big)+\left(75A^2+127AC+220C^2\right)R^2-\left(13A+20C\right)R^3-48R^4+2H^2\times$$

$$\times\left(124A^2+189AC+71C^2-5\left(9A+8C\right)R-31R^2\right)+G\Big(2\delta\left(6A^2+63AC+20C^2\right)-$$

$$-\left(149A^2+431AC+184C^2\right)R+\left(109A-40C\right)R^2-8R^3+2\Big(2H^2\big(53A+44C+6G-$$

$$-2R\big)+G\left(28C\delta-\left(17A+60C-44R\right)R\right)\Big)\Big)\Big),$$

$$v_2=18B^2\tau\left(\delta-4R\right)+8GH^2\left(11\delta+R\right)+6BH\Big(\delta\left(29A+4C\right)+2G\left(11A+14C-2R\right)+$$

$$+\left(29A+72C\right)R-28R^2\Big)+4H^2\Big(3\left(9A^2+34AC+23C^2\right)-2\left(19A+34C\right)R+59R^2\Big).$$

Теорема 2. *Пусть V – многообразие центра системы (5). Имеет место включение*

$$\bigcup\nolimits_{i=4}^{8}V(J_i)\subset V,$$

где

$$J_4=\Big\langle 9B^2H\left(\mu+2G-R\right)-3H^2\left(B+2H\right)\left(\mu+2G-R\right)+3BCG\left(3\delta+R\right)+HR\big(5C+$$

$$+2G-R\big)\left(G-R\right)+C\delta\left(2\left(5A+3C+3G\right)H+3B\left(\mu+\sigma+3R\right)\right)-HR\Big(8C^2+A\big(4C-$$

$$-5G+5R\big)\Big)-M\left(3B\tau-2H\left(4A+5C+2G-R\right)\right)-\left(3B+2H\right)\left(5A+4C+2G+2R\right)K,$$

$$3B\delta+H\left(2A+2G-R\right)+3L,\ w_0+w_1M,\ C^2\delta^2\left(9B^2\tau+4C^3\right)-2C^2\delta R\Big(2\left(A-C\right)C^2-$$

$$-9B^2\tau\Big)+\Big(4C^3\left(A\delta+C^2\right)+9B^2\tau\left(A^2+3C\delta\right)\Big)R^2+\left(9B^2\tau^2-4C^2\delta^2\right)R^3+\left(A-2C\right)\times$$

$$\times C\tau R^4-\tau^2R^5-\Big(C\delta^2\left(9B^2\tau+8C^3\right)+\delta\Big(9B^2\tau\left(A+4C\right)-4\left(A-4C\right)C^3\Big)R+3\Big(3B^2\times$$

$$\times\tau\left(A+3C\right)-4AC^3\Big)R^2-2C\left(A^2+2C\tau\right)R^3-2\tau\left(A+4C\right)R^4\Big)G+\Big(4C^3\delta^2+12C^3R\times$$

$$\times\delta-3AC\left(A+4C\right)R^2-\left(A+4C\right)^2R^3\Big)G^2+H^2\Big(2R^5-2R^4\left(3A+C+5G\right)+2R^3\Big(A^2-$$

$$-2AC-5C^2+\left(9A+5C\right)G+8G^2\Big)+2R^2\Big(2A^3+7A^2C+3AC^2-7C^3+\Big(A^2+14AC+$$

$$+21C^2\Big)G-2\sigma G^2\Big)+4C\Big(C\left(A^3-3A^2C-5AC^2-2C^3\right)-A\left(A^2-5AC-C^2\right)G-2G^2\times$$

$$\times\left(A-C\right)^2\Big)+2R\Big(2AC^2\left(5A+6C\right)-\left(2A^3+17A^2C+AC^2-19C^3\right)G-2\delta\left(A+12C\right)\times$$

$$\times G^2\Big)-9B^2\left(3A+4C+2R\right)\Big(\left(\mu-R\right)^2+4G\left(\mu-R+G\right)\Big)+8\left(C-R\right)\left(2C+R\right)G^3\Big)-3B\times$$

$$\times(\delta+R)\left(\tau R^3-R^2\left(4A^2+13AC+4C^2+3(A+4C)G\right)+(\mu+2G)\left(9B^2\tau-2C(A-C)\times\right.\right.$$
$$\left.\times(C-G)\right)-R\left(9B^2\tau+2C^2(5A+4C)-\left(4A^2+23AC+6C^2\right)G-2(A+8C)G^2\right)\Big)H-$$
$$-6B(\mu-R+2G)\left(2\sigma(A+2G)-2(2A+3C)R-R^2+4G^2-C^2\right)H^3-4(A-C-R+$$
$$+2G)(\mu-R+2G)^2H^4,1-w_1(3B+2H)(5A+4C+2R+2G)t\Big)\bigcap\mathbb{C}[\tilde{h}],$$
$$J_5=\Big\langle 3B\delta+(A-C+7G)H,15B\delta+5(A-C)H+21L,3\delta G-M,108B^2\delta^2H+7H\times$$
$$\times\delta^2\left(11A^2+8AC+2C^2\right)+(3A+4C)(11A+10C)H^3-3\delta B\left(7\delta^2\sigma+(53A+52C)H^2\right)+$$
$$+98\delta^2HK,\delta-R,\sigma(\mu+G)(A+2G)(A-C+7G)^2+9B^2\left(\sigma\left(A\mu+(17A+8C)G+\right.\right.$$
$$\left.\left.+26G^2\right)+24G^3\right),1-(A-C+7G)\left(\sigma\left(A\mu+(17A+8C)G+26G^2\right)+24G^3\right)t\Big\rangle\bigcap\mathbb{C}[\tilde{h}],$$
$$J_6=2A\delta\mu+A(6A+5C)G+A\left(2G^2-3(B-H)H\right)+(7A+6C+6G)K,3B\delta+$$
$$+(A-C)H+3L,G(\mu+2G)+M,3B(\delta+G)+(A-C-4G)H,\delta+2G-R,A(A-C-$$
$$-4G)^2(\mu+2G)(\sigma+4G)+9B^2\left(A\mu\sigma-2(11A+6C)(\delta+G)G\right),1-(A-C-4G)\times$$
$$\times(7A+6C+6G)t\Big\rangle\bigcap\mathbb{C}[\tilde{h}],$$
$$J_7=\Big\langle\mu,G-A,R-A,2A^2+3H(B-H)-K,A(B-H)-L,2A^2+M\Big\rangle,$$
$$J_8=\Big\langle A+2R,\sigma+2G,3B-5H,25A^2+36B^2+100K,3B\sigma+10L,A\sigma-2M,$$
$$25A^2\delta^2-9B^2\left(11A^2+14AC+4C^2\right)\Big\rangle.$$

Доказательство: При $\tilde{h}\in\bigcup_{i=4}^{8}V(J_i)$ для системы (5) выполняется тождество $R(x)/Q^3(x)\equiv const$. Теорема доказана.

При $\tilde{h}\in V(J_5)$ имеем кубическую систему с центром, соответствующую системе Жолондека с интегралом Дарбу $CD_{16}^{(11)}$, при $\tilde{h}\in V(J_6)$ – $CD_{23}^{(11)}$, при $\tilde{h}\in V(J_7)$ – $CD_{22}^{(11)}$, при $\tilde{h}\in V(J_8)$ – $CD_{29}^{(12)}$ [14].

Рассмотрим случай V существования центра для системы (1). Укажем при этом некоторые условия центра возникающие для систем вида (1).

Рассуждая аналогично доказательству теоремы 4 из [15] получаем

Лемма 1. *Особая точка 0(0,0) системы (1) является центром тогда и только тогда, когда существуют рациональные функции* $\varphi(x)$, $f(z)$, $v(z)$ с $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$, *для которых*

$$R(x)/Q^3(x)\equiv f(\varphi(x)),\quad P_0(x)(\varphi'(x)/x)/Q^2(x)\equiv v(\varphi(x)). \tag{6}$$

Доказательство: В случае центра $R(x)/Q^3(x)=f(\varphi(x)),P_0(x)S(x)/R^2(x)=g(\varphi(x))$. Продифференцируем первое равенство системы (4), найдем из него $S(x)$ и подставим во второе равенство системы. Получаем $P_0S/R^2=P_0(f'(\varphi)\varphi'Q^4/x)/R^2\in H$. Тогда

$$\frac{P_0f'(\varphi)(\varphi'/x)Q^4}{R^2}\,\frac{R^2}{f'(\varphi)Q^6}=\frac{P_0(\varphi'/x)}{Q^2}\in H.$$

Лемма доказана.

Определение. [13, с.35] *Степенью рациональной функции* $p(x)=p_1(x)/p_2(x)$, *где* $p_1(x)$, $p_2(x)$ *взаимно простые полиномы, называется наибольшая из степеней полиномов* $p_1(x)$, $p_2(x)$.

Штейницем была доказана

Теорема 3 [13, с.35]. *Если рациональные функции* $l(x)$ *и* $q(x)$ *имеют соответственно степени* m *и* n, *то степень функции* $l(q(x))$ *равна* $m\cdot n$.

Рассмотрим наиболее общий случай, когда $\deg[Q(x)]=3$ и $(R(x),Q(x))=1$. Далее условия центра будем искать в предположении, что $b_1\neq 0$. Из первого тождества системы (6) следует, что $\deg[f(\varphi)]=9$. Из теоремы Штейница получаем $\deg[\varphi(x)]\in\{1,3,9\}$. Из условия $\varphi'(0)=0$ следует, что $\deg[\varphi(x)]\neq 1$.

Будем рассматривать случай $\deg[\varphi(x)]=3$. Рациональная функция $\varphi(x)$, которую далее будем называть генератором, принимает вид

$$\varphi(x)=\frac{x^2(1+h_1x)}{1+h_2x+h_3x^2+h_4x^3},$$

где $h_i\in\mathbb{C},\, i=\overline{1,4}.$

Рациональные функции $f(z), v(z)$ системы (6) представим в виде отношений многочленов $f_1(z)$, $f_2(z)$, $v_1(z)$, $v_2(z)$. Тогда (6) примет вид

$$\frac{R(x)}{Q^3(x)}\equiv\frac{f_1(\varphi(x))}{f_2(\varphi(x))},\quad \frac{P_0(x)(\varphi'(x)/x)}{Q^2(x)}\equiv\frac{v_1(\varphi(x))}{v_2(\varphi(x))}. \tag{7}$$

Найдем условия, при которых выполняется тождество

$$Q^3(x)-(1+h_2x+h_3x^2+h_4x^3)^3\, f_2(\varphi)=\sum\nolimits_{i=1}^{10} d_i x^{i-1}\equiv 0,$$

где $d_i\in\mathbb{C}[b_1,b_3,b_4,h_1,...,h_4,\, f_{2,0},\, f_{2,1},\, f_{2,2},\, f_{2,3}],\, i=\overline{1,10},\ f_2(\varphi)=\sum\nolimits_{j=0}^{3} f_{2,j}\varphi^j,\ f_{2,j}\in\mathbb{C},\ j=\overline{0,3}.$

Получаем систему, содержащую 10 уравнений. Из системы $d_i=0, d_7=0, i=\overline{1,5}$ находим $f_{2,0}$, $f_{2,1}$, $f_{2,2}$, $f_{2,3}$, h_2, h_4. Подставляя найденные значения в оставшиеся уравнения системы $d_6=0, d_j=0,\ j=\overline{8,10}$, получим верные равенства. Значения неизвестных h_2 и h_4 равны

$$h_2=-a_0,\ h_4=(b_4-h_1(b_3-b_1h_3))/b_1.$$

Далее найдем условия, при которых выполняется тождество

$$R(x)-(1+h_2x+h_3x^2+h_4x^3)^3\, f_1(\varphi)=\sum\nolimits_{i=1}^{10}\tilde d_i x^{i-1}\equiv 0,$$

где $\tilde d_i\in\mathbb{C}[r_0,r_1,...,r_9,h_1,...,h_4,\, f_{1,0},\, f_{1,1},\, f_{1,2},\, f_{1,3}],\, i=\overline{1,10},\ f_1(\varphi)=\sum\nolimits_{j=0}^{3} f_{1,j}\varphi^j,\ f_{1,j}\in\mathbb{C},\ j=\overline{0,3}.$

Получаем систему линейных уравнений $\tilde d_i=0, i=\overline{1,10}$, относительно переменных $f_{1,0}$, $f_{1,1}$, $f_{1,2}$, $f_{1,3}$, r_1,r_3,r_5,r_7,r_8,r_9. Неизвестные r_1,r_3,r_5,r_7,r_8,r_9 находятся из системы уравнений $u_j=0,\ j=\overline{1,6}$, где

$$\begin{gathered}
u_1=3h_2r_0-r_1,\ u_2=\left(3h_1h_2^2+5h_2^3+3h_1h_3-3h_4\right)r_0-\left(h_1+2h_2\right)r_2+r_3,\ u_3=\Big(3h_2^3\left(4h_1^2+3h_1h_1+\right.\\
\left.+h_2^2\right)+3h_1h_2\left(4h_1+3h_2\right)h_3-3h_2\left(4h_1+3h_2\right)h_4\Big)r_0-\left(h_2\left(4h_1^2+3h_1h_2+h_2^2\right)+2h_1h_3-2h_4\right)r_2+\\
+\left(2h_1+h_2\right)r_4-r_5,\\
u_4=3\Big(h_1^2\left(2h_1+h_2\right)\left(3h_1+5h_2\right)h_2^3+h_1h_2\left(6h_1^3+16h_1^2h_2+6h_1h_2^2+h_2^3\right)h_3+h_1^2\left(3h_1+h_2\right)\times\\
\times h_3^2-\left(h_2\left(6h_1^3+16h_1^2h_2+6h_1h_2^2+h_2^3\right)+2h_1\left(3h_1+h_2\right)h_3\right)h_4+\left(3h_1+h_2\right)h_4^2\Big)r_0-\Big(h_1^2h_2\times\\
\times\left(2h_1+h_2\right)\left(3h_1+5h_2\right)+\left(6h_1^2+6h_1h_2+h_2^2\right)\left(h_1h_3-h_4\right)\Big)r_2+\left(h_1^2\left(3h_1+5h_2\right)+h_1h_3-h_4\right)r_4-\\
-3h_1r_6+r_7,\\
u_5=r_0\Big(9h_1^2\left(2h_1+h_2\right)\left(h_1+2h_2\right)h_2^3+6h_1^2h_2\left(3h_1^3+9h_1^2h_2+5h_1h_2^2+h_2^3\right)h_3+3\left(h_1+h_2\right)\times\\
\times\left(3h_1+h_2\right)\left(h_1^2h_3^2+h_4^2\right)-6h_1\left(h_2\left(3h_1^3+9h_1^2h_2+5h_1h_2^2+h_2^3\right)+\left(h_1+h_2\right)\left(3h_1+h_2\right)h_3\right)h_4\Big)-\\
-\Big(3h_1^3h_2\left(2h_1+h_2\right)\left(h_1+2h_2\right)+2h_1\left(3h_1^2+5h_1h_2+h_2^2\right)\left(h_1h_3-h_4\right)+h_1h_3\left(h_1h_3-2h_4\right)+h_4^2\Big)\times\\
\times r_2+\left(3h_1^3\left(h_1+2h_2\right)+2h_1^2h_3-2h_1h_4\right)r_4-3h_1^2r_6+r_8,\\
u_6=\Big(3h_1^4\left(2h_1+h_2\right)\left(h_1+2h_2\right)h_2^3+3h_1^3h_2\left(2h_1^3+6h_1^2h_2+4h_1h_2^2+h_2^3\right)h_3+h_1^3h_3^2\Big(3\left(h_1+h_2\right)^2+\\
+h_3\Big)-3h_1^2\left(h_2\left(2h_1^3+6h_1^2h_2+4h_1h_2^2+h_2^3\right)+2\left(h_1+h_2\right)^2h_3+h_3^2\right)h_4+3h_1\left(\left(h_1+h_2\right)^2+h_3\right)h_4^2-\\
-h_4^3\Big)r_0-h_1\Big(h_1^3h_2\left(2h_1+h_2\right)\left(h_1+2h_2\right)+h_1^2\left(2h_1^2+4h_1h_2+h_2^2\right)h_3+h_1^2h_3^2-h_1\Big(2h_1^2+4h_1h_2+\\
+h_2^2+2h_3\Big)h_4+h_4^2\Big)r_2+h_1^2\left(h_1^2\left(h_1+2h_2\right)+h_1h_3-h_4\right)r_4-h_1^3r_6+r_9,\ h_2=-a_0,\ h_4=\left(b_4-h_1\left(b_3-b_1h_3\right)\right)/b_1.
\end{gathered}$$

Исследуем второе тождество системы (7). Т.к. $\deg[v(\varphi)]=12$, то $\deg[v_1(z)]=\deg[v_2(z)]=4.$ Находим условия, при которых выполняется тождество

$$Q^2(x)-(1+h_2x+h_3x^2+h_4x^3)^2v_2(\varphi)=\frac{\sum_{i=1}^{13}q_ix^{i-1}}{(1+h_2x+h_3x^2+h_4x^3)^2}\equiv 0,$$

где $q_i\in\mathbb{C}[b_1,b_3,b_4,h_1,\ldots,h_4,v_{2,0},\ldots,v_{2,4}]$, $i=\overline{1,13}$, $v_2(\varphi)=\sum_{j=0}^{4}v_{2,j}\varphi^j$, $v_{2,j}\in\mathbb{C}$, $j=\overline{0,4}$. Получаем систему, содержащую 13 уравнений, в которую подставляем найденные ранее h_2,h_4. Из системы уравнений $q_{2i+1}=0$, $i=\overline{0,4}$, находим значения величин $v_{2,j}$, $j=\overline{0,4}$, и, подставив их в оставшиеся уравнения $q_{2i}=0$, $q_j=0$, $i=\overline{1,5}$, $j=\overline{11,13}$, получаем верные равенства.

Рассуждая аналогично, находим условия, при которых выполняется тождество

$$\frac{P_0(x)(2+(3h_1+h_2)x+2h_1h_2x^2+(h_1h_3-h_4)x^3)}{(1+h_2x+h_3x^2+h_4x^3)^2}-(1+h_2x+h_3x^2+h_4x^3)^2v_1(\varphi)=$$

$$=-\frac{\sum_{i=1}^{13}\tilde{q}_ix^{i-1}}{(1+h_2x+h_3x^2+h_4x^3)^2}\equiv 0,$$

где $\tilde{q}_i\in\mathbb{C}[b_1,b_3,b_4,c_1,\ldots,c_8,h_1,\ldots,h_4,v_{1,0},\ldots,v_{1,4}]$, $i=\overline{1,13}$, $v_1(\varphi)=\sum_{j=0}^{4}v_{1,j}\varphi^j$, $v_{1,j}\in\mathbb{C}$, $j=\overline{0,4}$.

Найдем решение полученной системы из 13 уравнений. Подставляем h_2,h_4. в уравнения $\tilde{q}_i=0$, $i=\overline{1,9}$. Из полученной системы находим значения $v_{1,0},h_1,v_{1,1},b_4,v_{1,2},c_5,v_{1,3},c_7,v_{1,4}$ соответственно. Причем, $h_1=-(7a_0+2c_1)/3$, а b_4,c_5,c_7 находятся из системы уравнений $\tilde{u}_1=0,\tilde{u}_2=0,\tilde{u}_3=0$, где

$$\tilde{u}_1=2b_1(140a_0^3+161a_0^2c_1+62a_0c_1^2+6c_1^3-3(4a_0-c_1)c_2-9c_3)+27b_3(7a_0+2c_1)+81b_4,$$

$$\tilde{u}_2=28(561a_0^5+935a_0^4c_1+594a_0^3c_1^2+192a_0^2c_1^3+37a_0c_1^4+3c_1^5)+3(8a_0+c_1)(7(11a_0^2+2a_0c_1-$$
$$-4c_1^2)c_2-27c_4)+63(4a_0-c_1)c_2^2+(9(183a_0^2+170a_0c_1+22c_1^2)+189c_2)c_3-243c_5,$$

$$\tilde{u}_3=8(561000a_0^7+1403248a_0^6c_1+1447523a_0^5c_1^2+806442a_0^4c_1^3+267140a_0^3c_1^4+54088a_0^2c_1^5+$$
$$+6351a_0c_1^6+333c^7)+3(276276a_0^5+396823a_0^4c_1+191700a_0^3c_1^2+32940a_0^2c_1^3+32a_0c_1^4-264c_1^5)c_2+$$
$$+9(4a_0-c_1)((1041a_0^2+638a_0c_1+118c_1^2)c_2^2+135c_2c_4)+(9(39945a_0^4+59980a_0^3c_1+33004a_0^2c_1^2+$$
$$+8080a_0c_1^3+696c_1^4)+27(1713a_0^2+574a_0c_1+92c_1^2)c_2)c_3+162(84a_0+13c_1)c_3^2+(324(86a_0^3-$$
$$-10a_0^2c_1-28a_0c_1^2-3c_1^3)+3645c_3)c_4-6561(4a_0+c_1)c_6-6561c_7.$$

Подставляем все найденные значения в оставшиеся уравнения. Получаем систему

$$\tilde{q}_{10}=\frac{2}{531441}\overline{q}_1=0,\quad \tilde{q}_{11}=-\frac{2}{531441}\overline{q}_2=0,\quad \tilde{q}_{12}=\frac{2}{1594323}\overline{q}_3=0,\quad \tilde{q}_{13}=-\frac{2}{43046721}\overline{q}_4=0.$$

Образуем идеал

$$G=\langle\overline{q}_1,\overline{q}_2,\overline{q}_3,\overline{q}_4\rangle.$$

Введем обозначения $\alpha=7a_0+2c_1$, $\beta=2a_0+c_1$, $\gamma=3a_0+c_1$.

Лемма 2. *Имеет место следующее равенство*

$$\sqrt{G}=\bigcap_{i=1}^{12}T_i,$$

где $T_1=\left\langle a_0,c_1,c_3\right\rangle$, $T_2=\left\langle \alpha,5a_0\left(7a_0^2-2c_2\right)-4c_3,c_4\right\rangle$, $T_3=\left\langle \beta,2a_0\left(a_0^2-c_2\right)-c_3,a_0^2\left(a_0^4\left(a_0^2-c_2\right)+a_0^2c_4-c_6\right)+c_8\right\rangle$,

$$T_4=\left\langle \gamma,7a_0\left(8a_0^2-3c_2\right)-9c_3,16a_0^6\left(496a_0^2-153c_2\right)+162a_0^2\left(8a_0^2c_4-9c_6\right)+6561c_8\right\rangle,$$

$$T_5=\Big\langle 2\left(77a_0^3+77a_0^2c_1+23a_0c_1^2+3c_1^3\right)+3\left(4a_0-c_1\right)c_2+9c_3,9029a_0^6-27534a_0^5c_1-$$
$$-70602a_0^4c_1^2-52996a_0^3c_1^3-17592a_0^2c_1^4-2712a_0c_1^5-160c_1^6-9\left(a_0+2c_1\right)\Big(473a_0^3+$$
$$+510a_0^2c_1+162a_0c_1^2+16c_1^3\Big)c_2-243\left(9a_0^2+10a_0c_1+2c_1^2\right)c_4-729c_6,2\alpha^2\beta^2\Big(1003a_0^4+$$
$$+1712a_0^3c_1+972a_0^2c_1^2+212a_0c_1^3+16c_1^4+3\left(59a_0^2+50a_0c_1+8c_1^2\right)c_2+27c_4\Big)-2178c_8\Big\rangle,$$

$$T_6=\left\langle a_0,c_1\left(2c_1^2+c_2\right)-3c_3,26c_1^2\left(8c_1^2\left(2c_1^2+c_2\right)+3c_4\right)+27c_6,4c_1^2c_6-13c_8\right\rangle,$$

$$T_7=\Big\langle 10a_0+3c_1,2a_0\left(35a_0^2-11c_2\right)-9c_3,a_0^2\left(10024a_0^4-2623a_0^2c_2+1404c_4\right)-2187c_6,$$
$$a_0^4\left(199a_0^4-52a_0^2c_2+27c_4\right)-6561c_8\Big\rangle,$$

$$T_8=\Big\langle 140a_0^3+161a_0^2c_1+62a_0c_1^2+6c_1^3-3\left(4a_0-c_1\right)c_2-9c_3,2\Big(2483a_0^4+3313a_0^3c_1+$$
$$+1594a_0^2c_1^2+326a_0c_1^2+24c_1^4\Big)+3\Big(71a_0^2+50a_0c_1+8c_1^2\Big)c_2+9c_4,a_0\alpha\Big(2\beta\Big(1184a_0^3+1025a_0^2c_1+$$
$$+278a_0c_1^2+24c_1^3\Big)+3\Big(71a_0^2+50a_0c_1+8c_1^2\Big)c_2\Big)+27c_6,a_0^3\alpha^3\left(67a_0^2+44a_0c_1+6c_1^2+3c_2\right)-81c_8\Big\rangle,$$
$$T_9=\Big\langle 17a_0+6c_1,a_0\left(595a_0^2-246c_2\right)-108c_3,a_0^2\left(160489a_0^4-54408a_0^2c_2+28998c_4\right)-$$
$$-26244c_6,a_0^4\left(7975a_0^4-2676a_0^2c_2+1296c_4\right)-39366c_8\Big\rangle,$$
$$T_{10}=\Big\langle 2\Big(85a_0^3+85a_0^2c_1+31a_0c_1^2+3c_1^3\Big)-3\left(4a_0-c_1\right)c_2-9c_3,2253133a_0^6+$$
$$+4240380a_0^5c_1+3280698a_0^4c_1^2+1333968a_0^3c_1^3+300528a_0^2c_1^4+35568a_0c_1^5+1728c_1^6+$$
$$+36\alpha\Big(373a_0^3+369a_0^2c_1+117a_0c_1^2+12c_1^3\Big)c_2+81\alpha^2c_4,a_0\left(7389145a_0^5+11879100a_0^4c_1+\right.$$
$$7506906a_0^3c_1^2+2321136a_0^2c_1^3+350784a_0c_1^4+20736c_1^5\Big)+18a_0\left(16657a_0^3+17030a_0^2c_1+\right.$$
$$5520a_0c_1^2+576c_1^3\Big)c_2+243a_0\left(71a_0+20c_1\right)c_4-1458c_6,2a_0^3\left(2\Big(163473a_0^5+262182a_0^4c_1+\right.$$
$$+164968a_0^3c_1^2+50796a_0^2c_1^3+7647a_0c_1^4+450c_1^5\Big)+3\Big(4684a_0^3+4572a_0^2c_1+1449a_0c_1^2+$$
$$+150c_1^3\Big)c_2+54\alpha c_4\Big)+2187c_8,1-\alpha t\Big\rangle\bigcap\mathbb{C}[c_8,c_6,c_4,c_3,c_2,c_1,a_0],$$
$$T_{11}=\Big\langle 1309a_0^3+1342a_0^2c_1+496a_0c_1^2+48c_1^3-24\left(4a_0-c_1\right)c_2-72c_3,20305a_0^4+26714a_0^3c_1+$$
$$+12776a_0^2c_1^2+2608a_0c_1^3+192c_1^4+12\Big(71a_0^2+50a_0c_1+8c_1^2\Big)c_2+36c_4,a_0\alpha\Big(193361a_0^4+$$
$$+245950a_0^3c_1+112576a_0^2c_1^2+21920a_0c_1^3+1536c_1^4+48\Big(182a_0^2+111a_0c_1+16c_1^2\Big)c_2\Big)+864c_6,$$
$$a_0^3\alpha^2\left(11a_0+4c_1\right)\Big(265a_0^2+176a_0c_1+24c_1^2+12c_2\Big)+2592c_8\Big\rangle,$$
$$T_{12}=\Big\langle 4501a_0^3+4300a_0^2c_1+1294a_0c_1^2+120c_1^3+15(11a_0+4c_1)c_2-18c_3,14815a_0^4+$$
$$+17784a_0^3c_1+7686a_0^2c_1^2+1424a_0c_1^3+96c_1^4+6\Big(109a_0^2+60a_0c_1+8c_1^2\Big)c_2+9c_4,\alpha\times$$
$$\times\Big(635503a_0^5+1001766a_0^4c_1+608592a_0^3c_1^2+177872a_0^2c_1^3+25068a_0c_1^4+1368c_1^5+12\times$$
$$\times\Big(4700a_0^3+4346a_0^2c_1+1253a_0c_1^2+114c_1^3\Big)c_2+9(139a_0+38c_1)c_2^2\Big)+162c_6,\alpha^2\left(\Big(265a_0^2+\right.$$
$$+176a_0c_1+24c_1^2\Big)\Big(67a_0^2+44a_0c_1+6c_1^2\Big)^2+18\Big(133a_0^2+88a_0c_1+12c_1^2\Big)\Big(67a_0^2+44a_0c_1+6c_1^2\Big)c_2+$$
$$+27\Big(267a_0^2+176a_0c_1+24c_1^2\Big)c_2^2+108c_2^3\Big)+486c_8\Big\rangle.$$

Доказательство: При поиске базисов Гребнера для идеалов будем использовать порядок переменных $c_8>c_6>c_4>c_3>c_2>c_1>a_0$. Имеем $G\subset\bigcap_{i=1}^{12}T_i$. Тогда $G:\left(\bigcap_{i=1}^{12}T_i\right)=G_1$, где $G_1=\Big\langle\alpha\Big(2\Big(77a_0^3+77a_0^2c_1+23a_0c_1^2+3c_1^3\Big)+3\left(4a_0-c_1\right)c_2+9c_3,...,t_7\Big\rangle$. При этом $G_1\subset\bigcap_{i=1}^{5}T_i$. Находим $G_1:\left(\bigcap_{i=1}^{5}T_i\right)=G_2$, причем $\sqrt{G_2}=T_2$. Лемма доказана.

Из системы уравнений $\tilde{u}_1=0,\tilde{u}_2=0,\tilde{u}_3=0,g_1=0$, где $g_1=b_2+a_0b_1$, находим b_4,c_5,c_7,b_2. Подставляем найденные значения во вторую фокусную величину g_2 и получаем

$$g_2=-\frac{4}{27}b_1\tilde{g}_2,$$

где $\tilde{g}_2=361a_0^3+403a_0^2c_1+124a_0c_1^2+12c_1^3-27\left(2a_0a_1+a_2\right)+3\left(a_0+2c_1\right)c_2-18c_3.$

Находя из уравнения $\tilde{g}_2=0$ значение a_2 и подставляя b_4,c_5,c_7,b_2,a_2 в третью фокусную величину g_3, получаем

$$g_3=-\frac{16}{27}b_1\tilde{g}_3,$$

где $\tilde{g}_3=17323a_0^5+35565a_0^4c_1+27276a_0^3c_1^2+9608a_0^2c_1^3+1416a_0c_1^4+72c_1^5-6a_1\left(145a_0^3+295a_0^2c_1+124a_0c_1^2+12c_1^3\right)+$

$+3\left(703a_0^3+694a_0^2c_1+436a_0c_1^2+48c_1^3+12a_1\left(4a_0-c_1\right)\right)c_2-54\left(4a_0-c_1\right)c_2^2-9\left(5a_0^2+94a_0c_1+12c_1^2-6\left(2a_1-3c_2\right)\right)c_3-$
$-162\left(5a_0+c_1\right)a_3+243\left(a_0c_4-a_4\right).$

Из $\tilde{g}_3=0$ находим a_4 и подставляем b_4,c_5,c_7,b_2,a_2,a_4 в четвертую фокусную величину g_4. Получаем

$$g_4=-\frac{160}{243}b_1\tilde{g}_4,$$

где $\tilde{g}_4=3994783a_0^7+8711577a_0^6c_1+8193848a_0^5c_1^2+4440140a_0^4c_1^3+1511508a_0^3c_1^4+311092a_0^2c_1^5+33792a_0c_1^6+$
$+1440c_1^7+54a_0a_1\left(3017a_0^4+5355a_0^3c_1+3102a_0^2c_1^2+682a_0c_1^3+48c_1^4-3\left(31a_0+8c_1\right)\left(\left(4a_0-c_1\right)c_2+3c_3\right)\right)+162a_3\times$
$\times\left(301a_0^3+91a_0^2c_1-26a_0c_1^2-6c_1^3+3\left(4a_0-c_1\right)c_2+9c_3\right)+3\left(168899a_0^5+167555a_0^4c_1+50550a_0^3c_1^2+13420a_0^2c_1^3+\right.$
$\left.+4528a_0c_1^4+480c_1^5\right)c_2+9\left(4a_0-c_1\right)\left(139a_0^2+24a_0c_1-40c_1^2\right)c_2^2+9\left(46970a_0^4+55996a_0^3c_1+19306a_0^2c_1^2+1580a_0c_1^3-\right.$
$\left.-48c_1^4-3\left(829a_0^2-138a_0c_1+8c_1^2\right)c_2\right)c_3-162\left(121a_0+16c_1\right)c_3^2+243\left(25a_0^3+211a_0^2c_1+112a_0c_1^2+12c_1^3-6\left(4a_0-c_1\right)c_2-\right.$
$\left.-18c_3\right)c_4-4374a_5\alpha+6561\left(a_0c_6-a_6\right).$

Введем идеал $U=\left\langle\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3,g_1,\tilde{g}_2,\tilde{g}_3,\tilde{g}_4\right\rangle$ и многочлены $z_i,\ i=\overline{1,7}$, где

$$z_1=\alpha^2\left(1901a_0^6-10079a_0^5c_1-a_0^4\left(455a_1+24154c_1^2+1662c_2\right)-2a_0^3c_1\left(86a_1+9299c_1^2+\right.\right.$$
$$\left.+2139c_2\right)+a_0c_1\left(144a_3+8c_1^2\left(16a_1-130c_1^2-123c_2\right)-513c_4\right)+a_0^2\left(63a_3+4c_1^2\left(60a_1-\right.\right.$$
$$\left.\left.-1612c_1^2-837c_2\right)-513c_4\right)+4c_1^2\left(9a_3+4c_1^2\left(a_1-4c_1^2-6c_2\right)-27c_4\right)+81a_5\Big)-729a_7,$$

$$z_2=a_0^6\left(27a_1-134c_2\right)-27a_0^4\left(a_3-2c_4\right)+a_0^2\left(572a_0^6+243a_5\right)-19683a_7,$$

$$z_3=\alpha^2\left(a_0\alpha\left(4328a_0^4+5528a_0^3c_1+24a_0c_1\left(21c_1^2+5c_2\right)-a_0^2\left(9a_1-2546c_1^2-204c_2\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+9\left(a_3+2c_1^2\left(2c_1^2+c_2\right)\right)\right)-27a_5\right)+243a_7,$$

$$z_4=3a_0^6\left(3807a_1-10604c_2\right)-324a_0^4\left(25a_3-32c_4\right)+8a_0^2\left(14659a_0^6+1458a_5\right)-59049a_7,$$

$$z_5=2a_0\left(7774409a_0^7+16667705a_0^6c_1+15010598a_0^5c_1^2+7370046a_0^4c_1^3+2130312a_0^3c_1^4+\right.$$
$$+362160a_0^2c_1^5+33480a_0c_1^6+1296c_1^7+9\left(42321a_0^5+60315a_0^4c_1+34260a_0^3c_1^2+9632a_0^2c_1^3+\right.$$
$$\left.\left.+1332a_0c_1^4+72c_1^5\right)c_2\right)-3a_0^3\left(16801a_0^3+14040a_0^2c_1+3900a_0c_1^2+360c_1^3\right)a_1+27a_0\left(167a_0^2+\right.$$
$$\left.+90a_0c_1+12c_1^2\right)a_3\alpha-324a_0^3c_4\alpha-243a_5\alpha^2+2187a_7,$$

$$z_6=\alpha^2\left(a_0\left(1165429a_0^5+1789830a_0^4c_1+1062024a_0^3c_1^2+305552a_0^2c_1^3+42624a_0c_1^4+2304c_1^5+\right.\right.$$
$$\left.+12\left(4681a_0^3+3898a_0^2c_1+1072a_0c_1^2+96c_1^3\right)c_2+72\left(31a_0+8c_1\right)a_3\right)-54a_0^3\left(61a_0+16c_1\right)a_1-$$
$$\left.-864a_5\right)+7776a_7,$$

$$z_7=\alpha^2\left(a_0\left(3048811a_0^5+5949202a_0^4c_1+4671888a_0^3c_1^2+1880348a_0^2c_1^3+407828a_0c_1^4+\right.\right.$$
$$\left.+45264c_1^5\right)+36288a_1\left(1883a_0^4+2306a_0^3c_1+1006a_0^2c_1^2+184a_0c_1^3+12c_1^4\right)c_1^6+6\left(71337a_0^4+\right.$$
$$+93397a_0^3c_1+43156a_0^2c_1^2+8224a_0c_1^3+552c_1^4+\left(453a_0^2+276a_0c_1+36c_1^2\right)a_1\Big)c_2+9\left(2255a_0^2+\right.$$
$$\left.+1484a_0c_1+200c_1^2+6a_1\right)c_2^2+324c_2^3-18\left(74a_0^2+46a_0c_1+6c_1^2+3c_2\right)a_3+54a_5\Big)-486a_7.$$

Введем следующие идеалы

$$I_1=\left\langle a_0,a_2,a_4,a_6,b_0,b_2,b_4,c_1,c_3,c_5,c_7\right\rangle,\ \ I_2=U+T_2+\left\langle a_7\right\rangle,\ \ I_3=U+T_3+\left\langle a_0a_6+2a_7+c_8\right\rangle,$$
$$I_4=U+T_4,\ \ I_5=U+T_5+\left\langle z_1\right\rangle,\ \ I_6=U+T_6+\left\langle 4a_5c_1^2-9a_7\right\rangle,\ \ I_7=U+T_7+\left\langle z_2\right\rangle,$$
$$I_8=U+T_8+\left\langle z_3\right\rangle,\ \ I_9=U+T_9+\left\langle z_4\right\rangle,\ \ I_{10}=U+T_{10}+\left\langle z_5\right\rangle,\ \ I_{11}=U+T_{11}+\left\langle z_6\right\rangle,$$
$$I_{12}=U+T_{12}+\left\langle z_7\right\rangle.$$

Теорема 4. *Имеет место включение*

$$\bigcup_{j=1}^{12} V\left(I_j\right) \subset V(I).$$

Доказательство: Покажем, что при $p \in V\left(I_j\right),\ j=\overline{1,12},$ выполняются тождества (6).

Пусть $p \in V\left(I_1\right)$. При $h_3=0$ функции $\varphi(x), Q(x), R(x), P_0(x), \varphi'(x)/x$ принимают вид: $\varphi(x)=x^2$, $Q(x)=b_1+b_3\varphi,\ \ R(x)=R_4(\varphi),\ \ P_0(x)=1+c_2\varphi+c_4\varphi^2+c_6\varphi^3+c_8\varphi^4,\ \varphi'(x)/x=2,$ где $R_4(\varphi)$ - многочлен четвертой степени. Выполнение тождеств (6) очевидно.

Пусть $p \in V\left(I_4\right)$. При $h_3=2a_0^2/9$ $\varphi(x)=x^2/(1-2a_0x/3),$ $Q(x)=\left(b_1-\left(2a_0^2b_1-9b_3\right)\varphi/9\right)^3$, $R(x)=R_3(\varphi),$ где $R_3(\varphi)$ – многочлен третьей степени. Соотношения (6) примут вид

$$\frac{R}{Q^3}=\frac{R_3(\varphi)}{Q^3(\varphi)},\quad \frac{P_0(\varphi'/x)}{Q^2}=\frac{2(1-(32a_0^2-9c_2)z/9+(176a_0^4-54a_0^2c_2+27c_4)z^2/27)}{Q^2(\varphi)}-$$
$$-\frac{2(3968a_0^6-1224a_0^4c_2+648a_0^2c_4-729c_6)z^3/729)}{Q^2(\varphi)}.$$

Из тождества

$$R(x)=\sum_{j=0}^{9} r_j x^j \equiv \left[Q'(x)P_0(x)+Q(x)P_2(x)\right]/x,$$

находим значения $r_j,\ j=\overline{0,9},$ и подставляем их и h_1, h_2, h_4 в систему уравнений $u_i=0, i=\overline{1,6}.$ Получаем систему уравнений

$$\bar{u}_1=0, \frac{1}{3b_1}\bar{u}_2=0, \frac{1}{9b_1}\bar{u}_3=0, \frac{1}{27b_1^2}\bar{u}_4=0, \frac{1}{81b_1^2}\bar{u}_5=0, \frac{1}{729b_1^3}\bar{u}_6=0.$$

Введем идеалы $T=\bigcap_{j=1}^{12} T_j$ и $\tilde{U}=\langle \bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3,\bar{u}_4,\bar{u}_5,\bar{u}_6,\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_3,g_1\rangle$.

При $p \in V(I_2)\bigcup V(I_3)\bigcup\left(\bigcup_{k=5}^{12} V(I_k)\right)$ выполнение тождеств (6) следует из того факта, что $\forall j \in \{2,3,5,6,...,12\}$ при $p \in V(I_j)$ все элементы идеала $T+\tilde{U}$ обращаются в 0. Теорема доказана.

Заключение. Таким образом, получено двенадцать классов полиномиальных дифференциальных систем вида (1) с центром в начале координат, для которых выполняются тождества (6), а также многообразие центра системы (2) в случае, когда для приведенной системы (1) выполняется тождество $Q(x)\equiv 0$, и 5 условий центра для системы (5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовский, А.П. К условиям центра и фокуса для уравнений нелинейных колебаний / А.П Садовский // Дифференц. уравнения. – 1979. – Т. 15, № 9. – С. 1716 – 1719.
2. Bondar, Y.L. Variety of the center and limit cycles of a cubic system which is reduced to Lienard form / Y.L. Bondar, A.P. Sadovskii // Bulletinul Acad. de Ştiinte a Rep. Moldova. Matematica. – 2004. – № 3 (46). – P. 71 – 90.
3. Садовский, А.П. Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы с девятью параметрами / А.П. Садовский, Т.В. Щеглова // Дифференц. уравнения. - 2011. – Т.47, № 2.-С.209-224.
4. Садовский, А.П. Об условиях центра и предельных циклах одной системы дифференциальных уравнений / А.П. Садовский // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 1. – С. 98 – 102.
5. Бондарь, Ю.Л. Решение проблемы центра и фокуса для одной кубической системы, приводящейся к системе Льенара / Ю.Л. Бондарь, А.П. Садовский // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42. № 1. – С. 11 – 22.
6. Черкас, Л.А. Об условиях центра для некоторых уравнений вида $yy'=P(x)+Q(x)y+R(x)y^2$ / Л.А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 8. – С. 1435 – 1439.
7. Черкас, Л.А. Условия центра для уравнений $P_3(x)yy'=\sum_{i=1}^{2} P_i(x)y^i$ / Л.А. Черкас // Дифференц. уравнения. –1974. – Т. 10, № 2. – С. 367 – 368.
8. Черкас, Л.А. Условия центра для одного уравнения Льенара / Л.А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 2. – С. 292 – 298.
9. Садовский, А.П. Полиномиальные идеалы и многообразия: пособие для студентов / А.П. Садовский. – Мн.: Изд-во БГУ, 2008. – 199 с.

10. Садовский, А.П. Кубические системы нелинейных колебаний с семью предельными циклами / А.П. Садовский // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 4. – С. 472 – 481.
11. Romanovski, V.G. The center and cyclicity problems: a computational algebra approach / V.G. Romanovskii, D.S. Shafer. – Basel: Birkhauser, 2010. – 330 p.
12. Le Van Linh. The center-focus problem for analytical systems of Lienard form in degenerate case / Le Van Linh, A.P. Sadovskii // Bulletinul Acad. de Ştiinte a Rep. Moldova. Matematica. – 2003, № 2 (42). – P. 37 – 50.
13. Чеботарев, Н.Г. Теория алгебраических функций / Н.Г. Чеботарев. – 4-е изд. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. – 400 с.
14. Żołądek, H. Remarks on the classification of reversible cubic systems with center / H. Żołądek // Topological Methods in Nonlinear Analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center. – 1996. – V. 8. – P. 335 – 342.
15. Садовский, А.П. Теорема Люрота и метод Черкаса / А.П. Садовский // Труды 5-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений. – 2010. – Т. 2. – С. 120 – 122.

Abstract. It is presented eight cases of centers for a cubic system with 10 parameters and twelve center conditions for system $x' = yP_0(x),\ y' = -x + xQ(x)y + P_2(x)y^2$, which can be transformed to the initial cubic system, in the case of nonconstant absolute invariants in Chercas's method.

Keywords: Chercas's method, cubic systems, center variety, center-focus problem, Lüroth theorem.