

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

---

*Зубов  
Буйинс*

ИЗВЕСТИЯ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР

МЕХАНИКА  
ЖИДКОСТИ И ГАЗА

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

5

---

МОСКВА · 1979

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НЕУСТОЙЧИВОГО ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ

В. М. ЕНТОВ, В. Б. ТАРАНЧУК

(Москва, Минск)

Как известно (см., например, [1-3]), если подвижность вытесняющей жидкости больше подвижности вытесняемой, процесс вытеснения оказывается неустойчивым и первоначально плоский фронт вытеснения превращается в полосу нерегулярных «язычков». Из линейного анализа устойчивости следует, что первоначально амплитуда возмущения возрастает экспоненциально, сформировавшиеся же вытянутые языки, согласно [4], движутся относительно вытесняемой жидкости с постоянной скоростью. Промежуточные этапы развития неустойчивости, равно как и вопросы, связанные с уточнением постановок (отказ от схемы поршневого вытеснения), остаются неизученными.

Естественный подход к их изучению состоит в численном моделировании, впервые реализованном в [4, 5]. Некоторые результаты проведенного таким образом исследования излагаются в данной работе. При этом в отличие от [4] основное внимание уделено развитию регулярных возмущений. Показано, что при исследованных соотношениях подвижностей развитие возмущений следует линейной теории неожиданно долго, а затем выходит на стационарный асимптотический режим. Исследовано также влияние нарушения устойчивости вытеснения на безводную нефтеотдачу при вытеснении в однородных и неоднородных пластах.

**1. Постановка задачи и разностная схема.** Рассмотрим движение двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в горизонтальном пласте. Система уравнений для определения давления  $p$  и насыщенности вытесняющей жидкости  $s$ , если не учитывается капиллярный скачок давления между фазами и имеет место линейный закон фильтраций Дарси, может быть записана в виде [6]

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( A \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0$$

$$(1.2) \quad m \frac{\partial s}{\partial t} + q_1 \frac{\partial F}{\partial x} + q_2 \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$A = k \left( \frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2} \right), \quad q_1 = -A \frac{\partial p}{\partial x}, \quad q_2 = -A \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad F = \frac{\mu f_2}{f_1 + \mu f_2}$$

Здесь  $t$  — время ( $0 \leq t \leq t_1$ ),  $x, y$  — декартовы координаты в плоскости фильтрации,  $m$  — пористость,  $k(x, y)$  — абсолютная проницаемость среды,  $f_i(s)$  — относительные фазовые проницаемости,  $\mu_i$  — вязкости фаз (индексы  $i=1$  и  $2$  относятся соответственно к вытесняемой и вытесняющей фазам).

Рассмотрим движение в прямоугольной области  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  с непроницаемыми боковыми границами при заданном давлении на выходе



( $x=a$ ) и заданных давления (или суммарном потоке) жидкости и насыщенности на входе ( $x=0$ ). При этом имеем условия

$$(1.3) \quad \partial p / \partial y = 0, \quad y=0, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$(1.4) \quad \partial p / \partial y = 0, \quad y=b, \quad 0 \leq x \leq a$$

$$(1.5) \quad p = p_2(y, t), \quad x=a, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$(1.6) \quad p = p_1(y, t) \quad \text{или} \quad -A \partial p / \partial x = q_1^*(y, t), \quad x=0, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$(1.7) \quad s = s_1(y, t), \quad x=0, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$(1.8) \quad s = s_0(x, y), \quad t=0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

Для разностной аппроксимации сформулированной краевой задачи в рассматриваемой области вводится равномерная по пространственным переменным  $x$  и  $y$  сетка с шагами  $h_1$  и  $h_2$  соответственно; шаг по времени  $\Delta t^n$  может изменяться в ходе расчета. Для численного решения задачи применяется следующий алгоритм: а) по известному на  $n$ -м временном шаге распределению  $s^n$  и граничным условиям для давления (1.3)–(1.6) из уравнения (1.1) находится давление  $p^n$ ; б) по найденному распределению давления с учетом известного распределения  $s^n$  и условия (1.7), из уравнения (1.2) определяется распределение  $s^{n+1}$ , после чего делается следующий шаг (ср. [7]). Описанный алгоритм позволяет обходиться для численного решения системы (1.1), (1.2) без итераций по нелинейности.

Уравнение эллиптического типа (1.1) для давления решается методом установления и по схеме переменных направлений (см., например, [8]).

Для расчета распределения насыщенности применяется явная схема первого порядка точности типа уголка с ориентацией по характеристикам [9].

**2. Исследование развития возмущений плоского фронта.** С целью изучения применимости описанной схемы для исследования устойчивости вытеснения были выполнены расчеты и сопоставления с некоторыми эталонными решениями. Пусть

$$(2.1) \quad k(x, y) = k_* = \text{const}, \quad p_2 = p_* = \text{const}, \quad s_0 = 0, \quad s_1 = s_*$$

$$(2.2) \quad f_1(s) = (1-s)^2, \quad f_2 = s^2$$

$$(2.3) \quad \frac{F(s_*) - F(s_0)}{s_* - s_0} = F'(s_*), \quad F' = \frac{dF}{ds}$$

Здесь  $s_*$  — значение насыщенности на фронте, определяемое из уравнения (2.3).

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае распределение насыщенности будет кусочно-постоянным и задача сведется к определению положения границы раздела вытесняемой жидкости и смеси [10, 4] (поршневое вытеснение). Амплитуда  $X$  малого синусоидального возмущения с волновым числом  $\gamma$  определяется выражением

$$(2.4) \quad X = X_0 \exp(-Nu_0 \gamma t / M)$$

$$N = [f_1(s_*) + \mu f_2(s_*)]^{-1} - [f_1(s_0) + \mu f_2(s_0)]^{-1}$$

$$M = [f_1(s_*) + \mu f_2(s_*)]^{-1} + [f_1(s_0) + \mu f_2(s_0)]^{-1}$$

Здесь  $u_0$  — скорость движения невозмущенного фронта,  $X_0$  — начальная амплитуда возмущения.

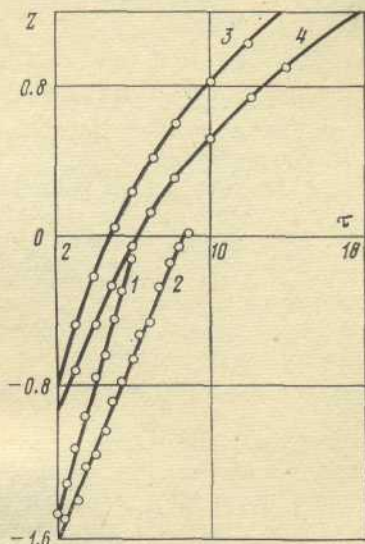


Из (2.4), в частности, имеем условие устойчивости вытеснения одной жидкости другой

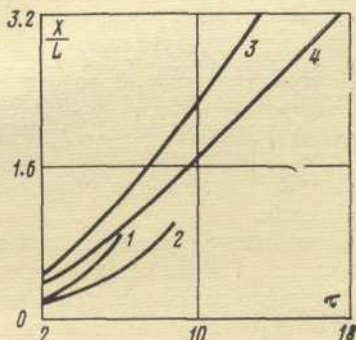
$$(2.5) \quad [f_1(s_*) + \mu f_2(s_*)]^{-1} > [f_1(s_0) + \mu f_2(s_0)]^{-1}$$

которое для относительных фазовых проницаемостей вида (2.2), так как  $s_* = (1 + \mu)^{-1/2}$ , сводится к неравенству  $\mu < 3$ .

При проведении численных расчетов с целью исследования динамики возмущения в ограниченной области важную роль играет способ задания возмущения. Так, задание начального распределения насыщенности в виде ступеньки [4] приводит к решениям, имеющим в окрестности углов ступеньки тонкие языки. По-видимому, образование таких языков специфично для вы-



Фиг. 1



Фиг. 2

бранного начального распределения насыщенности, поэтому ниже рассматривается иной способ задания возмущений фронта. Предположим, что на входе задается условие вида

$$q_1^*(y, t) = \begin{cases} q_0(1 - \alpha \sin(\gamma y)), & 0 < t < t_0 \\ q_0, & t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases}$$

где  $q_0$ ,  $\gamma$ ,  $t_0$  — положительные постоянные,  $|\alpha| < 1$ .

Нетрудно видеть, что, изменяя значения параметров  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $t_0$ , можно получить возмущения фронта вытеснения различной амплитуды и частоты, причем существенно то, что распределение насыщенности в момент времени  $t = t_0$  является численным решением исходной системы и его можно трактовать как начальное условие для  $s$  в момент  $t = t_0$ .

Опишем некоторые результаты методических численных экспериментов. Первоначально изучалась возможность расчета с помощью описанной схемы процесса вытеснения в различных режимах, т. е. при  $\mu < 3$ ,  $\mu = 3$  и  $\mu > 3$ . Как показали расчеты, при  $\mu < 3$  возмущения фронта с возрастанием времени затухают, при  $\mu > 3$  амплитуда возмущений растет, при  $\mu = 3$  амплитуда возмущений со временем не меняется.

Результаты расчетов при различных значениях  $\mu$  сравнивались с эталонным решением вида (2.4). На фиг. 1, 2 показано изменение во времени относительной амплитуды возмущения  $X/L$  и величины  $Z = \ln(X/L)$  ( $L$  — длина волны возмущения фронта). При этом значение  $\gamma$  выбиралось таким, что по оси  $y$  имелась одна волна,  $q_0 \mu_1 L / (k_* p_*) = 0.3$ , безразмерное



время  $\tau$  определялось как  $\tau = tp_*k_*/(m\mu_1L^2)$ ,  $\tau_0=2$ ,  $h_2=0.1L$ , расчет выполнялся на сетке  $120 \times 20$ . Кривые 1 и 3 получены при  $\mu=10$ , кривые 2 и 4 — при  $\mu=7$ ; кривые 1 и 2 показывают динамику роста амплитуды в случае  $h_1=0.05L$  и  $\alpha=0.25$ , кривые 3 и 4  $h_1=0.1L$  и  $\alpha=0.5$  соответственно.

Как видно из фиг. 1, в рассмотренных случаях имеет место совпадение с линейной теорией, когда амплитуда возмущения не превышает длины волны; при этом логарифм возмущения является линейной функцией времени. Совпадение с линейной теорией проявляется также в том, что близки к теоретическим значения коэффициентов наклона соответствующих прямых в плоскости  $Z\tau$ . Полученные из (2.4) значения коэффициентов, определяющих наклон прямых, для  $\mu=10$  и 7 равны соответственно 0.357 и 0.244; из численных расчетов имеем соответственно 0.345 и 0.249.

Неожиданным результатом расчетов оказалось то, что предсказываемый линейной теорией экспоненциальный закон роста возмущений достаточно хорошо описывает динамику роста возмущений, амплитуда которых сопоставима с длиной волны (см. фиг. 1). Это же справедливо и для вытеснения с граничным условием на входе  $s_1=1$ , когда за фронтом вытеснения образуется зона переменной насыщенности. При этом оказалось, что наличие зоны переменной насыщенности не оказывает существенного влияния на движение фронта, которое по-прежнему может быть описано выражением (2.4).

Для выяснения вопроса о том, когда геометрическая нелинейность начинает оказывать существенное влияние на развитие возмущений фронта, были проведены расчеты в более «длинных» областях, когда область движения при той же ширине имела заметно большую длину (кривые 3 и 4 на фиг. 1 и 2). Для случая, когда амплитуда возмущения сравнима и больше длины волны, заметно постепенное снижение ускорения роста возмущений и переход к режиму постоянной скорости роста. Этот режим соответствует исследованному в [1] стационарному движению языков относительно окружающей их жидкости.

Таким образом, в исследованном диапазоне параметров задачи геометрическая нелинейность приводит к нарушению экспоненциального закона нарастания возмущений при  $X \sim L$ , а выход на режим равномерного растущих возмущений происходит при  $X \geq L$ .

**3. Влияние неустойчивости на характер вытеснения в условиях неоднородного потока.** Чтобы оценить влияние нарушения устойчивости вытеснения на характер вытеснения в неоднородном потоке, рассмотрим некоторые модельные задачи о фильтрации в области с эксплуатационными и нагнетательными скважинами (для аппроксимации условий на скважинах применялась методика, предложенная в [11]).

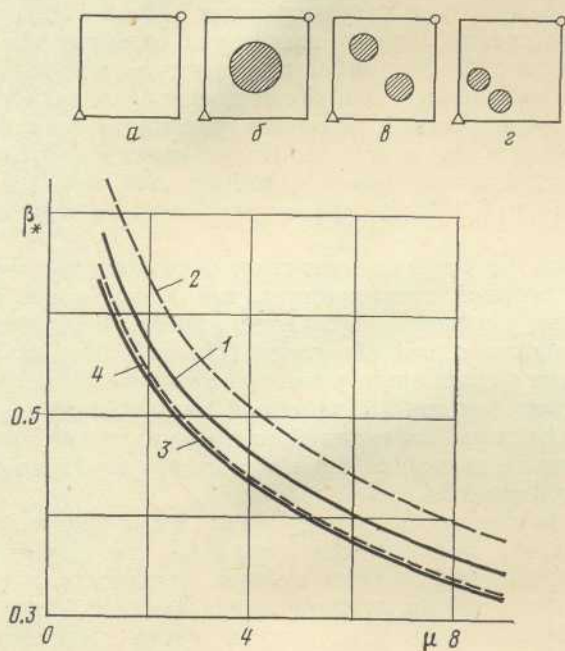
Из общих представлений о характере вытеснения при устойчивом и неустойчивом режимах представляется естественным, что основные технологические показатели (например, безводная нефтеотдача) должны заметно измениться при переходе от одного режима к другому. Для проверки этого утверждения рассмотрим характер изменения безводной нефтеотдачи  $\beta_*$ , когда рассматривается течение в элементе пятиточечной системы скважин.

На фиг. 3 кривая 1 иллюстрирует характер зависимости  $\beta_*$  от величины  $\mu$ , когда пласт однородный. Как видно из графика, зависимость  $\beta_*(\mu)$  является монотонной и при переходе критического значения  $\mu=3$  не наблюдается резких изменений нефтеотдачи.

Для изучения влияния на нефтеотдачу режима вытеснения в неоднородном пласте рассмотрены три типа неоднородных включений прони-



цаемости  $\delta \ll 1$ , форма которых схематически изображена на фиг. 3, б, в, г. Как показывают результаты вычислений (кривые 2-4), при указанных размерах и положениях неоднородных включений кривые  $\beta_*(\mu)$  в плоскости  $\beta_* \cdot 0\mu$  переносятся параллельно. Для всех рассмотренных видов



Фиг. 3

неоднородностей в зависимостях  $\beta_*(\mu)$  при переходе критического значения  $\mu=3$  не наблюдается резких изменений.

Нетрудно понять, что наблюдаемая «нечувствительность» интегральных характеристик потока к нарушению устойчивости вытеснения связана с наличием в нем изначальной неоднородности, обусловленной характером расстановки скважин и маскирующей прочие эффекты.

Авторы признательны Л. А. Чудову за советы и обсуждение.

Поступила 31 VII 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Saffman P. G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1958, vol. 245, No. 1242.
2. Кисиленко Б. Е. Экспериментальное изучение характера продвижения водонефтяного контакта в пористой среде. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1963, № 6.
3. Рыжик В. М., Кисиленко Б. Е. Исследование устойчивости продвижения границы раздела воды и нефти в пористой среде. В сб. «Физико-геологические факторы при разработке нефтяных и нефтегазоконденсатных месторождений». М., «Недра», 1969.
4. Индельман П. В., Кац Р. М., Швидлер М. И. Исследование процессов неустойчивого вытеснения с помощью численного моделирования. В сб. «Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости». Новосибирск, 1977.
5. Rachford H. H. Instability in water flooding oil from water-wet porous media containing connate water. Soc. Petrol. Engr. J., 1964, vol. 4, No. 2.

6. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., «Недра», 1972.
  7. Данилов В. Л., Коновалов А. Н., Якуба С. И. Об уравнениях и краевых задачах теории двухфазных фильтрационных течений в пористой среде. Докл. АН СССР, 1968, т. 183, № 2.
  8. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
  9. Рунтмайер Р., Моргон К. Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972.
  10. Цыбульский Г. П. Плоская задача о двухфазной фильтрации несмешивающихся жидкостей без учета капиллярных сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 1.
  11. Таранчук В. Б., Чудов Л. А. Численный метод для решения некоторых задач плоской двухфазной фильтрации в области со скважинами. В сб. «Численные методы механики сплошной среды», т. 5, № 4. Новосибирск, 1974.
-