

В. И. Янчевский

ОДНОРОДНЫЕ ТЕЛА НЕКОММУТАТИВНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИВЕДЕННЫЕ ГРУППЫ УАЙТХЕДА

§1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть A – центральная простая конечномерная алгебра с центром $Z(A)$. Тогда на её мультипликативной группе A^* определён гомоморфизм приведенной нормы $\text{Nrd}_A : A^* \longrightarrow Z(A)^*$ [6], ядро $\text{SL}(A)$ которого определяет важную в алгебраической K -теории и алгебраической геометрии приведенную группу Уайтхеда этой алгебры:

$$\text{SK}_1(A) = \text{SL}(A)/[A^*, A^*],$$

где $[A^*, A^*]$ – коммутант группы A^* .

Конструкция определителя Дьёдонне немедленно сводит изучение приведенных групп Уайтхеда к случаю тел (центральных алгебр с делением).

Изучение групп $\text{SK}_1(A)$ было начато в работах Т. Накаямы, Ё. Мацусимы [25] в 1943 г. и Ш. Уонга [30] в 1950 г., установивших тривиальность этих групп в случае, когда $Z(A)$ поле p -адических или алгебраических чисел, соответственно. В [30] была установлена также тривиальность $\text{SK}_1(A)$ в случае алгебр A бесквадратного индекса. Следующий результат о группах $\text{SK}_1(A)$ был получен лишь в 1975 г. Именно, в [16] была установлена тривиальность групп приведенных групп Уайтхеда для простых центральных алгебр над C_2^0 -полями.

Определение. Поле K называется C_2^0 -полем, если для любого конечного расширения полей L/K любая простая центральная L -алгебра A обладает сюръективным отображением $\text{Nrd}_A : A^* \longrightarrow L^*$.

Ключевые слова: приведенная группа Уайтхеда, тело некоммутативных рациональных функций, специальная линейная группа конечномерной центральной простой алгебры, кольцо некоммутативных (косых) многочленов.

Работа выполнена в рамках совместного проекта, поддержанного Белорусским республиканским и Российским фондами фундаментальных исследований, проект No. Ф10р-110.

Класс C_2^0 -полей содержит локальные поля любой характеристики и вполне мнимые глобальные поля. Кроме того, небольшое дополнительное рассуждение из [16] позволило получить короткое доказательство тривиальности $SK_1(A)$ в случае глобальных полей $Z(A)$ (в отличие от довольно длинного доказательства Уонга в [30] для полей алгебраических чисел). Заметим ещё, что класс C_2^0 -полей содержит также класс C_2 -полей (см. [14]), в частности, класс полей функций алгебраических поверхностей над алгебраически замкнутым полем, поле повторных формальных степенных рядов над таким полем и т.д.

Замечание 1. Для совершенных полей класса C_2^0 А. А. Суслин в [15] дал другую их характеристику: совершенное поле будет C_2^0 -полем тогда и только тогда, когда его когомологическая размерность не превосходит 2.

Замечание 2. Позже (см. [31]) автором была установлена тривиальность групп $SK_1(A)$ для тел над полями, виртуальная когомологическая размерность которых не превосходит 2.

Следующий важный результат был получен В. П. Платоновым в [7], построившим первые примеры тел A с нетривиальными группами $SK_1(A)$. После установления нетривиальности групп $SK_1(A)$ для специальных тел естественно возникло целое направление, использующее глубокий инструментарий алгебраической К-теории для выяснения причин, по которым для одних полей (и даже классов полей) тела над ними имеют нетривиальные приведенные группы Уайтхеда, а для других – эти группы тривиальны. В настоящее время имеется, пожалуй, единственная гипотеза, проливающая свет на эту проблему. Одна из формулировок этой гипотезы такова [21].

Гипотеза (А. А. Суслин, [28]). *Следующие условия эквивалентны:*

- (i) *индекс A свободен от квадратов,*
- (ii) *группа $SK_1(A \otimes_{Z(A)} F)$ тривиальна для любого расширения F поля $Z(A)$.*

Несмотря на отдельные успехи в направлении доказательства этой гипотезы, к настоящему времени она доказана только в случае, когда индекс A кратен 4 (А. С. Меркурьев, [24]). Отметим также редукцию доказательства гипотезы Суслина (см. [12], [27]) к случаю тел A специального вида:

гипотеза Суслина верна в том и только в том случае, когда она верна для алгебр, являющихся тензорным произведением двух символ-алгебр.

Другое направление изучения приведенных групп Уайтхеда, возникшее после построения первых примеров тел A с нетривиальными группами $SK_1(A)$, связано с их вычислением для конкретных классов тел (и их центров). Первые результаты в этом направлении принадлежат В. П. Платонову (см., например, [8, 9, 26]), получившему ряд важных количественных и качественных результатов, относящихся к случаю тел, центры которых – поля, полные относительно дискретных нормирований, имеющие специальные поля вычетов. Несколько позже появления работ [7, 8], автором было замечено в [17], что в случае полей с дискретным нормированием, полнота центров не является существенной и на самом деле главную роль играет их гензелевость. Дальнейшее обобщение полученных ранее формул, привело к рассмотрению произвольных гензелевых полей в качестве центров исследуемых тел. Наиболее общие результаты в исследовании гензелевой ситуации принадлежат П. Дракслу [20] и Ю. Л. Ершову [2], рассмотревшим случай слабо разветвлённых тел над гензелевыми полями (в [20] рассматривался случай тел с тривиальным дефектом редукции, а в [2] с произвольным).

Идея получения формул тут состоит в редукции вычислений к объектам, определённым в телах вычетов.

Замечание 3. В реализации схемы вычислений $SK_1(A)$ в [2] важную роль играет так называемая конгруэнц-теорема, приведенная там без доказательства. Недавно простое доказательство этой теоремы в случае так называемых сильно слабо разветвлённых тел было получено Р. Хазратом в [22], а общий случай рассмотрен в [23]. Таким образом (по крайней мере по модулю "дикого" ветвления), в настоящее время гензелев случай считается полностью исследованным (и опубликованным).

Дальнейшее расширение класса рассматриваемых тел приводит к негензелевым нормированным центрам.

Замечание 4. Отметим также другой интересный подход к вычислению приведенных групп Уайтхеда, связанный с градуированными телами (см. [23]).

Решение проблемы нахождения формул вычисления для класса нормированных негензелевых тел представляется малореальным. Однако среди тел этого класса более привлекательными являются так называемые тела некоммутативных рациональных функций (центры которых нормированы, но не являются гензелевыми). Первый результат

о группах $SK_1(A)$ для таких тел (теорема стабильности) был получен с помощью методов алгебраической К-теории в [10]. К сожалению, метод доказательства этого утверждения не переносился прямо на случай так называемых приведенных унитарных групп Уайтхеда. С целью получения аналога теоремы стабильности автором впервые был рассмотрен класс тел некоммутативных рациональных функций одной переменной и предложен метод вычисления унитарных групп Уайтхеда, основанный на однозначности (с точностью до подобия) разложения некоммутативных многочленов на неприводимые множители. Применение этого метода для вычисления групп $SK_1(A)$ для таких тел в [11] позволило получить в качестве специального случая другое доказательство теоремы стабильности. Там же была анонсирована схема вычисления групп $SK_1(A_n)$ для тел некоммутативных рациональных функций от многих переменных. Однако, по недосмотру, класс рассматриваемых в [11] тел был определён излишне широким, и основные шаги предложенной схемы не были снабжены доказательствами. Всё это привело (см. замечание после теоремы 5.7 в [23]) к мнению, что основные моменты предложенной схемы не могут быть обоснованы (по крайней мере в стиле [11]). Очень скоро после публикации [11] стало ясно каким должно быть уточнённое определение класса тел A_n некоммутативных рациональных функций, и уже в диссертации автора для такого класса тел был доказан основной факт, на котором базировалась схема вычисления $SK_1(A_n)$, из которого легко получался основной результат в [11]. Таким образом (с уточнённым определением класса тел A_n) схема вычисления, предложенная в [11], была достаточно обоснована. Более того, автором было установлено, что применение этой схемы позволяет получить все основные аналоги утверждений из статьи [2]. Однако отсутствие развёрнутой публикации результатов, связанных с этой схемой вычисления групп $SK_1(A_n)$, существенно затруднило их понимание. Цель настоящей статьи двоякая: во-первых, привести уточнённое описание определения тел некоммутативных рациональных функций от многих переменных, исследовать необходимые и достаточные условия реализации основной конструкции их построения, а также получения критерия конечности таких тел; во-вторых, устранить возникшее недоразумение, связанное с обоснованностью схемы вычисления групп $SK_1(A_n)$ в [11], а также установить результаты, относящиеся к этим телам, существенно обобщающие основную теорему из [11].

В заключение заметим, что результаты параграфов 2, 3, 4 являются слегка дополненными и немного переработанными результатами из [18], ранее нигде не публиковавшимися. Доказательство основного утверждения из §5 было впервые приведено также в [18]. Схема вычисления в §6 несложно вытекает из [2] с помощью вышеупомянутого результата и, таким образом, могла быть предложена еще в [18], где всё же основным объектом рассмотрения были не приведенные группы Уайтхеда, а их унитарные аналоги.

Ниже мы используем следующие обозначения. Для произвольной группы G и элементов $g_1, \dots, g_n \in G$ группа, порождённая этими элементами, обозначается ниже через $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$. Если $a, b \in G$, то коммутатор $aba^{-1}b^{-1}$ обозначается как $[a, b]$, а подгруппа $[G, G]$, порождённая всеми коммутаторами $[a, b]$, $a, b \in G$, называется коммутантом группы G . Для любого ассоциативного кольца R с единицей R^* обозначает его мультипликативную группу, $\text{Aut } R$ — его группу автоморфизмов. Для всякого $r \in R^*$ i_r обозначает внутренний автоморфизм R , задаваемый с помощью r : $a^{i_r} = rar^{-1}$ для произвольного $a \in R$. Внешний порядок автоморфизма $\varphi \in \text{Aut } R$ определяется как наименьшее натуральное n такое, что φ^n — внутренний автоморфизм R (если такого n не существует, внешний порядок φ считается бесконечным). Центр кольца R повсюду обозначается через $Z(R)$. Кольцо с делением, рассматриваемое как алгебра с делением над его центром (или подполем этого центра), называется телом. Если B — подтело тела A , то A естественно является левым векторным пространством над B . Под степенью $[A : B]$ понимается размерность (левая) этого пространства над B . Пусть A — тело, G — подгруппа его автоморфизмов, тогда корректно определено ограничение G на центр $Z(A)$. Иногда для удобства, допуская некоторую вольность, через $Z(A)_G$ мы будем обозначать подполе в $Z(A)$ инвариантов ограничения группы G на $Z(A)$. Для конечномерной простой центральной алгебры A над $Z(A)$, как и выше, $\text{Nrd}_A : A^* \rightarrow Z(A)^*$ будет обозначать гомоморфизм приведенной нормы [6], а $\text{SL}(A)$ — его ядро. Через $N_{L/E}$ будем обозначать отображение нормы расширения полей L/E [5].

Автор признателен А. В. Прокопчуку и С. В. Тихонову за многочисленные полезные обсуждения результатов, а также за упрощение первоначальных доказательств некоторых утверждений.

§2. КОНСТРУКЦИЯ ТЕЛ НЕКОММУТАТИВНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

В этом параграфе нам потребуются сведения о кольцах некоммутативных многочленов от n переменных, которые могут быть почерпнуты из [1] в случае $n = 1$ и из [4] в случае произвольного n . Пусть R – ассоциативное кольцо с единицей и автоморфизмом φ . Через $R[x, \varphi]$ будет обозначаться правое кольцо некоммутативных (косых) многочленов от переменной x над R относительно φ . Напомним, что в этом кольце для любого $r \in R$ $xr = r^\varphi x$ и всякий элемент имеет единственное представление в виде $\sum_{i=0}^n x^i r_i, r_i \in R$. Заметим, что такое кольцо одновременно является и левым кольцом некоммутативных многочленов от переменной x над R относительно φ^{-1} , т.е. $xr = r^{\varphi^{-1}}x$ и любой элемент имеет вид $\sum_{i=0}^n r_i x^i, r_i \in R$ (именно в этом последнем виде мы и будем записывать элементы из правого кольца $R[x, \varphi]$). Если R – правое кольцо Оре, то $R[x, \varphi]$ также является правым кольцом Оре, и потому всегда определено правое тело частных $R(x, \varphi)$ этого кольца (см., например, [4]). Наконец, для любого ненулевого многочлена $P \in R[x, \varphi]$ $\deg P$ будет обозначать его степень.

Пусть A – тело, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \text{Aut } A$. Положим $A_0 = A, \varphi_i^{(0)} = \varphi_i, 1 \leq i \leq n$ и рассмотрим $A_1 = A_0(x_1, \varphi_1^{(0)})$ – тело правых частных кольца некоммутативных многочленов $A_{[1]} = A_0[x_1, \varphi_1^{(0)}]$ от x_1 над A_0 относительно $\varphi_1^{(0)}$ (такое тело частных существует, поскольку всякое тело – кольцо Оре). Предположим, что автоморфизмы $\varphi_2^{(0)}, \dots, \varphi_n^{(0)}$ продолжаются до автоморфизмов $\varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}$ тела A_1 со свойством $A_{[1]}^{\varphi_i^{(1)}} = A_{[1]}$, и в качестве A_2 возьмём тело правых частных $A_1(x_2, \varphi_2^{(1)})$, кольца $A_{[2]} = A_{[1]}[x_2, \varphi_2^{(1)}]$. Если уже построено тело A_i , причём автоморфизмы $\varphi_{i+1}^{(i)}, \dots, \varphi_n^{(i)}$ обладают тем свойством, что $A_{[i]}^{\varphi_j^{(i)}} = A_{[i]}$ для $j > i$, тогда $A_{i+1} = A_i(x_{i+1}, \varphi_{i+1}^{(i)})$ – тело правых частных кольца $A_{[i+1]} = A_{[i]}[x_{i+1}, \varphi_{i+1}^{(i)}]$.

Определение 1. Кольцо $A_{[n]}$ называется кольцом некоммутативных многочленов от переменных $x_1, \dots, x_n$ над A относительно автоморфизмов $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(n-1)}$, а тело A_n – телом некоммутативных рациональных функций от переменных $x_1, \dots, x_n$ над A относительно автоморфизмов $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(n-1)}$.

Как следует из определения, конструкция колец $A_{[n]}$ и тел A_n носит условный характер (т.е. зависит от существования специальных продолжений автоморфизмов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$). Задача нахождения условий на A и $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, при которых тела A_n существуют, является достаточно сложной. Заметим, что из описания этой конструкции немедленно вытекает, что действие автоморфизмов $\varphi_j^{(i)}$ на переменную x_i при $j > i$ должно иметь вид $x_i^{\varphi_j^{(i)}} = a_{ij}x_i + b_{ij}$, $a_{ij}, b_{ij} \in A_{[i-1]}$. Следующие утверждения позволяют получить дополнительные ограничения на элементы a_{ij}, b_{ij} .

Предложение 1. Пусть R – область целостности, $\varphi, \psi \in \text{Aut } R$.

(i) Если φ нетривиально действует на центре $Z(R)$ кольца R , то ψ продолжается до автоморфизма $\tilde{\psi}$ кольца $R[x, \varphi]$ в том и только в том случае, когда $[\varphi^{-1}, \psi^{-1}] = i_{r_1}$ и $x^{\tilde{\psi}} = r_1x$, $r_1 \in R^*$.

(ii) Если ограничение φ на $Z(R)$ тривиально, то ψ продолжается до автоморфизма $\tilde{\psi}$ кольца $R[x, \varphi]$ в том и только в том случае, когда $[\varphi^{-1}, \psi^{-1}] = i_{r_1}$ и $x^{\tilde{\psi}} = r_1x + r_2$, где $r_1 \in R^*, r_2 \in R$ и $(r_1^{-1}r_2)r = r^\varphi(r_1^{-1}r_2)$ для любого $r \in R$.

Доказательство. Докажем вначале необходимость условий на образ элемента x при $\tilde{\psi}$ и коммутаторного условия $[\varphi^{-1}, \psi^{-1}] = i_{r_1}$.

Действительно, поскольку $\tilde{\psi} \in \text{Aut } R[x, \varphi]$, он сохраняет степени многочленов и потому

$$x^{\tilde{\psi}} = r_1x + r_2, \quad (1)$$

где $r_1, r_2 \in R$. Заметим, что $r_1 \in R^*$. В самом деле, аналогично предыдущему, поскольку $\tilde{\psi}^{-1} \in \text{Aut } R[x, \varphi]$,

$$x^{\tilde{\psi}^{-1}} = q_1x_1 + q_2, \quad (2)$$

$q_1, q_2 \in R$. Применяя к обеим частям равенства (1) $\tilde{\psi}^{-1}$, получаем $x = r_1^{\tilde{\psi}^{-1}} \cdot q_1x + r_3$ для $r_3 \in R$. Сравнивая старшие коэффициенты в обеих частях последнего равенства, получаем $r_1^{\tilde{\psi}^{-1}} \in R^*$, и потому $r_1 \in R^*$. Далее, поскольку для любого $r \in R$ $(xr)^{\tilde{\psi}} = (r^\varphi x)^{\tilde{\psi}}$, то использование равенства (1) приводит к равенству

$$(r_1x + r_2)r^\psi = r^\varphi\psi(r_1x + r_2). \quad (3)$$

Сравнивая старшие коэффициенты многочленов в обеих частях равенства (3), получаем $r_1r^{\psi\varphi} = r^\varphi\psi r_1$. Откуда ввиду произвольности

$r \in R$ вытекает равенство $\varphi\psi = \psi\varphi i_{r_1}$, которое равносильно условию $[\varphi^{-1}, \psi^{-1}] = i_{r_1}$. Далее, сравнение свободных членов правой и левой частей равенства (3) приводит к равенству $r_2 r = r^{\psi^{-1}\varphi\psi} r_2$ для любого $r \in R$, а так как $\psi^{-1}\varphi\psi = \varphi i_{r_1}$, то $(r_1^{-1} r_2) r = r^\varphi (r_1^{-1} r_2)$ для любого $r \in R$, что и требовалось.

Пусть ограничение φ на $Z(R)$ нетривиально. Предположим, что z — ненулевой элемент из центра $Z(R)$. Из двух последних равенств получаем, что $r_2 z^\psi = z^\varphi \psi r_2$. Так как $z \in Z(R)$, то $(z^\varphi \psi - z^\psi) r_2 = 0$. Предположим, что $r_2 \neq 0$, тогда ввиду отсутствия делителей нуля в R $z^\varphi \psi = z^\psi$, что влечёт $z^\varphi = z$ для любого z из $Z(R)$. Последнее противоречит условию леммы. Таким образом, $r_2 = 0$.

Обратно, пусть $r_1 \in R^*$, $\varphi^{-1}\psi^{-1}\varphi\psi = i_{r_1}$ и $r_2 \in R$ такой, что $(r_1^{-1} r_2) r = r^\varphi (r_1^{-1} r_2)$ для любого $r \in R$. Продолжим ψ до отображения $\tilde{\psi}$ следующим образом. Для произвольного многочлена $\sum_{i=0}^s s_i x^i$ ($s_i \in R$) положим $(\sum_{i=0}^s s_i x^i)^{\tilde{\psi}} = \sum_{i=0}^s s_i^\psi (x^{\tilde{\psi}})^i$, где $x^{\tilde{\psi}} = r_1 x + r_2$. Покажем, что $\tilde{\psi}$ — автоморфизм кольца $R[x, \varphi]$. Аддитивность $\tilde{\psi}$ вытекает непосредственно из его определения. Далее, нетрудно видеть, что доказательство мультипликативности $\tilde{\psi}$ сводится к случаю одночленов. Условия $\varphi^{-1}\psi^{-1}\varphi\psi = i_{r_1}$ и $(r_1^{-1} r_2) r = r^\varphi (r_1^{-1} r_2)$, наложенные на r_1 и r_2 , влекут соотношение (3), которое может быть переписано как

$$x^{\tilde{\psi}} r^\psi = r^\varphi \psi x^{\tilde{\psi}}. \quad (3^*)$$

Пусть теперь $s_1 x^n$ и $s_2 x^m$ — два произвольных одночлена из $R[x, \varphi]$ ($s_1, s_2 \in R$). Покажем, что

$$((s_1 x^n)(s_2 x^m))^{\tilde{\psi}} = (s_1 x^n)^{\tilde{\psi}} (s_2 x^m)^{\tilde{\psi}}.$$

Прежде всего, $((s_1 x^n)(s_2 x^m))^{\tilde{\psi}} = (s_1 s_2^{\varphi^n} x^{n+m})^{\tilde{\psi}}$. Последний элемент по определению отображения $\tilde{\psi}$ равен $s_1^\psi [s_2^{\varphi^n \psi} (x^{\tilde{\psi}})^n] (x^{\tilde{\psi}})^m$. С помощью формулы (3*) устанавливается, что элемент $s_2^{\varphi^n \psi} (x^{\tilde{\psi}})^n$ равен $(x^{\tilde{\psi}})^n s_2^\psi$, что влечёт

$$\begin{aligned} s_1^\psi [s_2^{\varphi^n \psi} (x^{\tilde{\psi}})^n] (x^{\tilde{\psi}})^m &= s_1^\psi [(x^{\tilde{\psi}})^n s_2^\psi] (x^{\tilde{\psi}})^m \\ &= (s_1^\psi (x^{\tilde{\psi}})^n) (s_2^\psi (x^{\tilde{\psi}})^m) = (s_1 x^n)^{\tilde{\psi}} (s_2 x^m)^{\tilde{\psi}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, мультипликативность $\tilde{\psi}$ установлена. Поскольку гомоморфизм $\tilde{\psi}$ сохраняет степени многочленов, то он, очевидно, биективен, т.е. $\tilde{\psi}$ — автоморфизм. $\square$

Понятно, что кольцо $A_{[n]}$ и тело A_n существуют тогда и только тогда, когда существуют продолжения автоморфизмов $\varphi_1^{(0)}, \dots, \varphi_n^{(0)}$ до соответствующих автоморфизмов

$$\begin{aligned} &\varphi_2^{(1)}, \varphi_3^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}, \\ &\varphi_3^{(2)}, \dots, \varphi_n^{(2)}, \\ &\dots \\ &\varphi_n^{(n-1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ввиду условия $A_{[i]}^{\varphi_j^{(i)}} = A_{[i]}$ для $j > i$ ограничения автоморфизмов $\varphi_j^{(i)}$ на кольцо $A_{[i]}$ являются его автоморфизмами $\varphi_j^{[i]}$. Так как и обратно, всякий автоморфизм кольца $A_{[i]}$ однозначно продолжается на тело A_i , то существование продолжений (4) эквивалентно существованию продолжений

$$\begin{aligned} &\varphi_2^{[1]}, \varphi_3^{[1]}, \dots, \varphi_n^{[1]}, \\ &\varphi_3^{[2]}, \dots, \varphi_n^{[2]}, \\ &\dots \\ &\varphi_n^{[n-1]}. \end{aligned} \quad (6)$$

Применим теперь предыдущее предложение для формулировки необходимых условий существования продолжений (5), которые будут носить индуктивный характер.

Для существования продолжений $\varphi_2^{[1]}, \varphi_3^{[1]}, \dots, \varphi_n^{[1]}$ необходимо ввиду предложения 1, чтобы

$$[(\varphi_1^{[0]})^{-1}, (\varphi_i^{[0]})^{-1}] = i_{a_{1i}}, \quad i > 1, a_{1i} \in A_0^*;$$

$$x_1^{\varphi_i^{[1]}} = a_{1i}x_1 + b_{1i}, \quad b_{1i} \in A_0,$$

где либо $b_{1i} = 0$, либо $\varphi_1^{(0)} = i_{a_{1i}^{-1}b_{1i}}$. Предположим, что продолжения

$$\begin{aligned} &\varphi_2^{[1]}, \varphi_3^{[1]}, \dots, \varphi_n^{[1]}, \\ &\varphi_3^{[2]}, \dots, \varphi_n^{[2]}, \\ &\dots \\ &\varphi_{i+1}^{[i]}, \dots, \varphi_n^{[i]}, \end{aligned}$$

автоморфизмов $\varphi_2^{[0]}, \varphi_3^{[0]}, \dots, \varphi_n^{[0]}$ существуют, т.е. одновременно выполнены условия

$$[(\varphi_j^{[j-1]})^{-1}, (\varphi_k^{[j-1]})^{-1}] = i_{a_{jk}}, \quad a_{jk} \in A_0^*, j \leq i+1, j < k;$$

$$x_j^{\varphi_k^{[j]}} = a_{jk}x_j + b_{jk}, \quad b_{jk} \in A_{[j-1]},$$

где либо $b_{jk} = 0$, либо $\varphi_j^{(j-1)} = i_{a_{jk}^{-1}b_{jk}}$. Для произвольного $\sum_{j=0}^k a_i x_{i+1}^j$, где $a_i \in A_{[i]}$, положим $(\sum_{j=0}^k a_j x_{i+1}^j)^{\varphi_r^{[i+1]}} = \sum_{j=0}^k a_j^{\varphi_r^{[i]}} (x_{i+1}^{\varphi_r^{[i+1]}})^j$, где $x_{i+1}^{\varphi_r^{[i+1]}} = a_{ij}x_{i+1} + b_{ij}$, $a_{ij} \in A_0^*, b_{ij} \in A_{[i]}, r = i+2, \dots, n$.

Теорема 1. В этих предположениях для существования тела A_n , связанного с семействами элементов

$$\{a_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n} \subset A_0^*, \quad \{b_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n} \subset A_{[i-1]},$$

необходимо выполнение условий

$$[(\varphi_i^{[i-1]})^{-1}, (\varphi_j^{[i-1]})^{-1}] = i_{a_{ij}}, \quad a_{ij} \in A_0^*, i < j;$$

$$x_i^{\varphi_j^{[i]}} = a_{ij}x_i + b_{ij}, \quad b_{ij} \in A_{[i-1]},$$

где либо $b_{ij} = 0$, либо $\varphi_i^{(i-1)} = i_{a_{ij}^{-1}b_{ij}}$.

Доказательство. Пусть тело A_n существует, тогда существуют тела $A_1, \dots, A_{n-1}$. Из существования автоморфизмов $\varphi_2^{[1]}, \varphi_3^{[1]}, \dots, \varphi_n^{[1]}$ ввиду предложения 1, применённого к парам автоморфизмов $(\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}), \dots, (\varphi_1^{(0)}, \varphi_n^{(0)})$, вытекает существование семейств элементов

$$\{a_{12}, \dots, a_{1n}\} \subset A_0^*, \{b_{12}, \dots, b_{1n}\} \subset A_0,$$

причём, ввиду того же предложения, $[(\varphi_1^{[0]})^{-1}, (\varphi_i^{[0]})^{-1}] = i_{a_{1i}}, 1 < i \leq n$ и $x_1^{\varphi_i^{[1]}} = a_{1i}x_1 + b_{1i}$. Поскольку автоморфизмы $\varphi_3^{[2]}, \dots, \varphi_n^{[2]}$ существуют, в силу предложения 1, применённого к $(\varphi_2^{(1)}, \varphi_3^{(1)}), \dots, (\varphi_2^{(1)}, \varphi_n^{(1)})$, следует существование семейств $\{a_{23}, \dots, a_{2n}\} \subset A_0^*, \{b_{23}, \dots, b_{2n}\} \subset A_{[1]}$, удовлетворяющих условиям из формулировки теоремы. Продолжая аналогичным образом, убеждаемся в существовании семейств

$$\{a_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n} \subset A_0^*, \{b_{ij}\}_{1 \leq i < j \leq n} \subset A_{[i-1]},$$

удовлетворяющих условиям из формулировки теоремы. $\square$

Как уже отмечалось, получение необходимых и достаточных условий сопряжено с большим количеством соотношений между a_{ij} и b_{ij} при больших n . Ниже мы сосредоточим внимание на так называемом однородном случае.

Определение 2. Пусть $R[x, \varphi]$ – кольцо многочленов над областью целостности R и ψ – автоморфизм R . Тогда продолжение ψ до автоморфизма $\tilde{\psi}$ кольца $R[x, \varphi]$ называется однородным, если $x^{\tilde{\psi}} = gx$, где $g \in R^*$. Тело A_n называется однородным, если все продолжения $\varphi_i^{[j]}$, $i < j$, однородны.

Для выяснения некоторых достаточных условий существования однородных тел нам потребуются следующие два утверждения.

Лемма 1. Пусть A – тело, $\varphi \in \text{Aut } A$, $A[x, \varphi]$ – кольцо некоммутативных многочленов над A от x относительно φ и $A(x, \varphi)$ – его тело (правых) частных. Тогда центр $Z(A(x, \varphi))$ тела $A(x, \varphi)$ совпадает с $Z(A)_\varphi$, где $Z(A)_\varphi$ – поле инвариантов автоморфизма φ в центре $Z(A)$ тела A , если φ имеет бесконечный внешний порядок, и совпадает с полем $Z(A)_\varphi(g^{-1}x^r)$, где r – внешний (конечный) порядок φ , а $g \in A^*$, $g^\varphi = g$ и $\varphi^r = i_g$.

Доказательство. Заметим, что если $PQ^{-1} \in Z(A(x, \varphi))^*$, где $P, Q \in A[x, \varphi]$, $\deg P = \deg Q \pmod r$ в случае конечного порядка r и $\deg P = \deg Q$ в противном случае. Действительно, P и Q^{-1} перестановочны. Тогда для произвольного $R \in A[x, \varphi]$ из $PQ^{-1}R = RPQ^{-1}$ следует $PRQ = QRP$. Пусть старший член P есть $P_m = \alpha x^m$, а старший член $Q - Q_n = \beta x^n$ (где $\alpha, \beta \in A^*$). Тогда полагая в равенстве $PRQ = QRP$ последовательно $R = x$ и $R = a, a \in A^*$, и сравнивая старшие члены правых и левых частей, получим

$$\alpha x^m \cdot x \cdot \beta x^n = \beta x^n \cdot x \cdot \alpha x^m,$$

$$\alpha x^m \cdot a \cdot \beta x^n = \beta x^n \cdot a \cdot \alpha x^m.$$

Откуда

$$\alpha \beta^{\varphi^{m+1}} x^{m+n+1} = \beta \alpha^{\varphi^{n+1}} x^{m+n+1},$$

$$\alpha \alpha^{\varphi^m} \beta^{\varphi^m} x^{m+n} = \beta \alpha^{\varphi^n} \alpha^{\varphi^n} x^{m+n}.$$

Следовательно,

$$\alpha \beta^{\varphi^{m+1}} = \beta \alpha^{\varphi^{n+1}}, \quad (1)$$

$$\alpha \alpha^{\varphi^m} \beta^{\varphi^m} = \beta \alpha^{\varphi^n} \alpha^{\varphi^n}. \quad (2)$$

Ввиду равенства (1)

$$\beta = \alpha \beta^{\varphi^{m+1}} \alpha^{-\varphi^{n+1}}. \quad (3)$$

Подставляя выражение β из (3) в (2), получим

$$\alpha a^{\varphi^m} \beta^{\varphi^m} = \alpha \beta^{\varphi^{m+1}} \alpha^{-\varphi^{n+1}} a^{\varphi^n} \alpha^{\varphi^n}. \quad (4)$$

Положим $\alpha^{\varphi^n} = u$, $\beta^{\varphi^m} = v$. Тогда ввиду равенства (4)

$$a^{\varphi^m} v = v^{\varphi} u^{-\varphi} a^{\varphi^n} u.$$

Откуда $a^{\varphi^m} = (vu^{-1})^{\varphi} a^{\varphi^n} (uv^{-1})$, и для $z = uv^{-1}$ будем иметь

$$a^{\varphi^m} = (z^{-1})^{\varphi} a^{\varphi^n} z. \quad (5)$$

При $a = 1$ из равенства (5) получаем $z^{\varphi} = z$. Следовательно, равенство (5) может быть переписано следующим образом

$$a^{\varphi^m i_z} = a^{\varphi^n}.$$

В силу $z^{\varphi} = z$ последнее эквивалентно

$$a^{\varphi^{m-n} i_z} = a.$$

Откуда $\varphi^{m-n} = i_{z^{-1}}$ (напомним, что a — произвольный элемент из A^*). Последнее равенство влечёт $n - m \equiv 0 \pmod{r}$ в случае конечного r и $n = m$ в противном случае.

Ниже нам потребуется следующее простое замечание: если $PQ^{-1} \in Z(A(x, \varphi))$, то для старших членов P_m и Q_n соответственно многочленов P и Q $P_m Q_n^{-1} \in Z(A(x, \varphi))$.

Рассмотрим теперь отдельно случаи конечного и бесконечного порядков r .

Пусть порядок r конечен. Ввиду леммы 1 из [11] существует элемент $g \in A^*$ со свойствами: $g^{\varphi} = g$, $\varphi^r = i_g$. Оба этих свойства влекут $g^{-1} x^r \in Z(A(x, \varphi))$. Кроме того, очевидно $Z(A)_{\langle \varphi \rangle} \subset Z(A(x, \varphi))$. Тогда ясно, что $Z(A)_{\langle \varphi \rangle} (g^{-1} x^r) \subset Z(A(x, \varphi))$. Таким образом, для доказательства леммы в случае конечного r достаточно показать, что произвольный $PQ^{-1} \in Z(A(x, \varphi))^*$, где $P, Q \in A[x, \varphi]$, принадлежит $Z(A)_{\langle \varphi \rangle} (g^{-1} x^r)$. Для завершения доказательства в случае конечного r применим индукцию по сумме степеней $\deg P + \deg Q$. Заметим, что не нарушая общности, можно считать, что $\deg P \geq \deg Q$. Пусть, как и ранее, $\deg P = m$, $\deg Q = n$. При $m + n = 0$ будем иметь $m = 0, n = 0$ и наше утверждение ($PQ^{-1} \in Z(A)_{\langle \varphi \rangle}$) очевидно. Предположим, что для всех $k < m + n$ таких, что $k = \deg T + \deg R$; $R, T \in A[x, \varphi]$ и

$RT^{-1} \in Z(A(x, \varphi))$ следует, что $RT^{-1} \in Z(A)_{\langle \varphi \rangle}(g^{-1}x^r)$. Пусть старшие члены P_m и Q_n многочленов P и Q равны соответственно αx^m и βx^n . Покажем, что $P_m Q_n^{-1} \in Z(A)_{\langle \varphi \rangle}[g^{-1}x^r]$. Как было установлено выше, $m = n + rq$ для подходящего целого q . Тогда

$$P_m Q_n^{-1} = (\alpha x^{qr} \beta^{-1} \beta x^n)(\beta x^n)^{-1} = \alpha g^q (g^{-1}x^r)^q \beta^{-1} = \alpha g^q \beta^{-1} (g^{-1}x^r)^q,$$

и поскольку $P_m Q_n^{-1}, (g^{-1}x^r)^q \in Z(A(x, \varphi))$, то

$$\alpha g^q \beta^{-1} \in Z(A(x, \varphi)) \cap A,$$

что влечёт $\alpha g^q \beta^{-1} \in Z(A)_{\langle \varphi \rangle}$. Стало быть, $P_m Q_n^{-1} \in Z(A)_{\langle \varphi \rangle}[g^{-1}x^r]$. Положим $z = P_m Q_n^{-1} \in Z(A)_{\langle \varphi \rangle}[g^{-1}x^r]$. Тогда

$$P = Q_n z + E, \quad (6)$$

$$Q = Q_n + F. \quad (7)$$

Умножим обе части равенства (7) на z и выразим из него $Q_n z$, а затем подставим это выражение в равенство (6). Тогда получим

$$PQ^{-1} - z = (E - Fz)Q^{-1}. \quad (8)$$

Если $E - Fz = 0$, то ввиду (8) $PQ^{-1} \in Z(A)_{\langle \varphi \rangle}(g^{-1}x^r)$. Пусть теперь $E - Fz \neq 0$. Далее, если $Fz \neq 0$, то ввиду (6) и (7)

$$\deg Fz < \deg Q_n z = \deg P.$$

Если же $E \neq 0$, то $\deg E < \deg P$ ввиду (6). Таким образом, в сумме $E + (-Fz)$ каждое из слагаемых либо равно нулю, либо его степень меньше степени P (причем, E и Fz одновременно не равны нулю). Отсюда заключаем, что $\deg(E - Fz) < \deg P$ и потому $\deg(E - Fz) + \deg Q < m + n$. Последнее позволяет применить индуктивное предположение, что влечёт $PQ^{-1} \in Z(A)_{\langle \varphi \rangle}(g^{-1}x^r)$.

Случай бесконечного порядка r . Пусть $P, Q \in A[x, \varphi]$ такие, что $PQ^{-1} \in Z(A(x, \varphi))$. В начале доказательства леммы было показано, что $\deg P = \deg Q$. Пусть теперь P_n — старший член P , а Q_n — старший член Q . Как отмечалось выше, $P_n Q_n^{-1}$ — элемент $Z(A(x, \varphi))$, кроме того принадлежащий A , поэтому $P_n Q_n^{-1} \in Z(A)_{\langle \varphi \rangle}$. В заключение покажем, что $PQ^{-1} = P_n Q_n^{-1}$. Поскольку $A[x, \varphi]$ — правое кольцо Оре, то в $A[x, \varphi]$ существуют многочлены t, s такие, что $Qt = Q_n s$. Из последнего равенства вытекает совпадение старших членов многочленов t и s . Заметим, что разность $PQ^{-1} - P_n Q_n^{-1}$ можно представить в виде

$$Pt(Qt)^{-1} - P_n s(Q_n s)^{-1} = Pt(Qt)^{-1} - P_n s(Qt)^{-1} = (Pt - P_n s)(Qt)^{-1}.$$

Так как старшие члены многочленов t и s совпадают, то совпадают также старшие члены многочленов Pt и P_ns и потому если $Pt - P_ns$ — ненулевой многочлен, то его степень меньше степени многочлена Qt , чего не может быть ввиду центральности $PQ^{-1} - P_nQ_n^{-1}$. Таким образом, $PQ^{-1} = P_nQ_n^{-1} \in Z(A)_{\langle \varphi \rangle}$. Значит, $Z(A(x, \varphi)) \subset Z(A)_{\langle \varphi \rangle}$. Лемма доказана. $\square$

Замечание. Отметим, что случай конечномерного A и конечного r рассматривался в [11].

Лемма 2. Пусть $Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}$ — поле инвариантов группы, порождённой ограничениями автоморфизмов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ на $Z(A)$. Тогда

$$Z(A_n) \cap A = Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что $Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle} \subset Z(A_n) \cap A$. В самом деле, если $z \in Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}$, то он перестановочен с любым элементом из A . Далее, для любого $x_i (i = 1, \dots, n)$

$$x_i z = z^{\varphi_i} x_i = z x_i.$$

Стало быть, z перестановочен с любым элементом из кольца многочленов $A_{[n]}$, и потому $z \in Z(A_n)$.

Обратно, пусть $z \in Z(A_n) \cap A$. Тогда $z \in Z(A)$ и z перестановочен с любым из элементов $x_i (i = 1, \dots, n)$. Из последнего условия вытекает, что $z \in Z(A)_{\langle \varphi_i \rangle} (i = 1, \dots, n)$. Следовательно, $z \in Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}$. $\square$

Следующее утверждение даёт достаточные условия однородности тела A_n .

Предложение 2. Пусть A_n — тело некоммутативных рациональных функций над A от переменных $x_1, \dots, x_n$ относительно автоморфизмов $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Предположим, что в цепочке

$$Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \rangle} \subset Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2} \rangle} \subset \dots \subset Z(A)_{\langle \varphi_1 \rangle} \subset Z(A) = Z(A)_{\langle 1 \rangle} \quad (1)$$

все поля различны. Тогда тело A_n однородно.

Доказательство. Заметим, что ввиду теоремы группа, порождённая элементами $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, абелева. Нетрудно тогда видеть, что ограничение автоморфизма φ_i на подполе $Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_j \rangle} (j < i)$ является автоморфизмом. Так как поля в цепочке (1) попарно не совпадают, то автоморфизм φ_i нетривиально действует на $Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_{i-1} \rangle}$, а значит и подалго на всех полях $Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_j \rangle} (j < i)$. Заметим, что

кроме того, поле $Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_j \rangle}$ совпадает с $Z(A_j) \cap A$ для $j < i$ ввиду леммы 2. Таким образом, автоморфизм $\varphi_i^{(i-1)}$ нетривиально действует на $Z(A_j)$ ($j < i$). Теперь кратное применение предложения 1 приводит нас к заключению об однородности тела A_n . $\square$

Укажем теперь на одно полезное следствие из теоремы 1, справедливое для однородных тел.

Следствие 1. Пусть тело A_n однородно. Для переменных x_i имеют место соотношения: $[x_j, x_i] = a_{ij}$, где $a_{ij} \in A^*$, $a_{ii} = 1$, $a_{ji} = a_{ij}^{-1}$, $1 \leq i, j \leq n$.

Доказательство. То, что $a_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$ равно 1, очевидно. Предположим теперь, что $j > i$. Из определения кольца $A_{[j]}$ вытекает следующее соотношение $x_j x_i = x_i^{\varphi_j^{[j-1]}} x_j$. С другой стороны $\varphi_j^{[j-1]}$ является продолжением $\varphi_i^{[i]}$. Ввиду однородности A_n будем иметь

$$x_i^{\varphi_j^{[j-1]}} = x_i^{\varphi_j^{[i]}} = a_{ij} x_i$$

для подходящего элемента $a_{ij} \in A^*$. Откуда получаем

$$x_j x_i = x_i^{\varphi_j^{[i]}} x_j = a_{ij} x_i x_j,$$

что влечёт

$$x_j x_i = a_{ij} x_i x_j, \quad (11)$$

т.е. $[x_j, x_i] = a_{ij}$. Умножая слева обе части (11) на a_{ij}^{-1} , получаем $a_{ij}^{-1} x_j x_i = x_i x_j$. Положим теперь $a_{ji} = a_{ij}^{-1}$. Этим завершается доказательство следствия для любых пар индексов i, j . $\square$

Оказывается, необходимыми условиями существования однородного тела A_n являются нижеследующие соотношения между семействами $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \subset A^*$ и автоморфизмами $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n} \subset \text{Aut } A$.

Предложение 3. Пусть A_n — однородное тело такое, как и в теореме 1. Тогда для семейства элементов $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \subset A^*$ таких, что $x_j x_i = a_{ij} x_i x_j$ и автоморфизмов $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n} \subset \text{Aut } A$ имеют место соотношения

$$[\varphi_i^{-1}, \varphi_j^{-1}] = i_{a_{ij}}, \quad (1)$$

$$a_{ij} = a_{ji}^{-1}, a_{ii} = 1, \quad (2)$$

$$a_{ik} a_{jk}^{\varphi_i} a_{ji} = a_{ji}^{\varphi_k} a_{jk} a_{ik}^{\varphi_j}, \quad i < k, \quad j < k. \quad (3)$$

Доказательство. То, что выполняются условия (2), было установлено в предыдущем следствии.

Ввиду теоремы 1 имеют место соотношения

$$[(\varphi_i^{[i-1]})^{-1}, (\varphi_j^{[i-1]})^{-1}] = i_{a_{ij}}, \quad a_{ij} \in A_0^*, i < j.$$

Поскольку тело A инвариантно относительно автоморфизмов, входящих в правую и левую часть предыдущего равенства, то рассматривая их ограничения на A , приходим к равенствам (1) при $i < j$, т.е. $[\varphi_i^{-1}, \varphi_j^{-1}] = i_{a_{ij}}$. Совпадение обратных элементов, стоящих в правой и левой частях последнего равенства, влечёт

$$[\varphi_j^{-1}, \varphi_i^{-1}] = i_{a_{ij}^{-1}} = i_{a_{ji}}.$$

Таким образом соотношения (1) доказаны при $i \neq j$ (при $i = j$ они очевидны).

Для доказательства (3) рассмотрим равенство

$$(x_i x_j)^{\varphi_k^{[k-1]}} = (a_{ji} x_j x_i)^{\varphi_k^{[k-1]}}$$

и заметим, что

$$\begin{aligned} (x_i x_j)^{\varphi_k^{[k-1]}} &= x_i^{\varphi_k^{[k-1]}} x_j^{\varphi_k^{[k-1]}} = a_{ik} x_i a_{jk} x_j = a_{ik} a_{jk}^{\varphi_i} x_i x_j = a_{ik} a_{jk}^{\varphi_i} a_{ji} x_j x_i, \\ (a_{ji} x_j x_i)^{\varphi_k^{[k-1]}} &= a_{ji}^{\varphi_k} a_{jk} x_j a_{ik} x_i = a_{ji}^{\varphi_k} a_{jk} a_{ik}^{\varphi_j} x_j x_i. \end{aligned}$$

Стало быть, $a_{ik} a_{jk}^{\varphi_i} a_{ji} x_j x_i = a_{ji}^{\varphi_k} a_{jk} a_{ik}^{\varphi_j} x_j x_i$, а это немедленно влечёт справедливость соотношений (3). Предложение доказано. $\square$

Следствие 2. Для $i = 0, 1, \dots, n-1$ положим

$$G_i = \langle \varphi_{i+1}^{(i)} |_{Z(A_i)}, \dots, \varphi_n^{(i)} |_{Z(A_i)} \rangle.$$

Тогда группы G_i абелевы.

Доказательство немедленно вытекает из свойств (1).

Замечание 1. Естественно возникает вопрос о достаточности условий (1)-(3) для существования соответствующих однородных тел A_n . Иными словами, пусть A — тело и заданы семейства элементов $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \subset A^*$ и автоморфизмов $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n} \subset \text{Aut } A$, удовлетворяющие (1)-(3). Существует ли однородное тело A_n , соответствующее этим семействам? Ответ оказывается положительным (о чём смотри статью [13], в которой будут рассматриваться и другие полезные свойства однородных тел некоммутативных рациональных функций).

Замечание 2. В специальном случае, когда A – поле, а $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ – нетривиальные автоморфизмы такие, что $\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle = \langle \varphi_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \varphi_n \rangle$ – конечная абелева группа, соотношения, аналогичные (1)-(3), рассматривались в [19].

Ввиду предыдущего, всякое семейство элементов $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n} \subset A^*$ и автоморфизмов $\{\varphi_i\}_{i=1,\dots,n} \subset \text{Aut } A$, удовлетворяющих соотношениям (1)-(3), однозначно определяют однородное тело A_n , которое будет обозначаться как $A(x_1, \dots, x_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n})$. Нетрудно видеть, что в таких обозначениях справедлива следующая

Лемма 3. Пусть $A(x_1, \dots, x_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n})$ и $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}$ – некоторая перестановка переменных $x_1, \dots, x_n$. Тогда

$$A_n = A(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}, \varphi_{\alpha_1}, \dots, \varphi_{\alpha_n}, \{a_{\alpha_i \alpha_j}\}_{i,j=1,\dots,n}).$$

В заключение отметим, что система автоморфизмов $\{i_{x_i}\}_{i=1,2,\dots,n}$ обладает свойством сохранения всех колец $A_{[i]}$ и тел A_i ($1 \leq i \leq n$), что приводит к интерпретации A_n как тела частных итерированного кольца многочленов над A относительно автоморфизмов i_{x_i} .

§3. КОНЕЧНОМЕРНОСТЬ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ НЕКОММУТАТИВНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Повсюду ниже в этом параграфе конечномерность тела A_n означает конечномерность над его центром.

Целью этого параграфа является выяснение достаточных условий на A , при которых однородное тело A_n конечномерно.

Пусть вначале $\varphi \in \text{Aut } A$. Если φ имеет конечный внешний порядок r , то положим $J = \{0, 1, \dots, r-1\}$. В противном случае J – множество целых неотрицательных чисел. Пусть, далее, $\{a_i\}_{i \in I}$ – базис A над $Z(A)_{\langle \varphi \rangle}$ – полем неподвижных элементов φ в $Z(A)$. Тогда справедлива следующая

Лемма 1. Система $a_i x_{(i,j)}^j$ линейно независима над $Z(A(x, \varphi))$.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай бесконечного порядка r . Предположим, что конечная $Z(A(x, \varphi))$ -линейная комбинация равна нулю

$$\sum_{ij} a_i x_{(i,j)}^j \mu_{ij} = 0, \quad (1)$$

где $\mu_{ij} \in Z(A(x, \varphi))$. Поскольку ввиду леммы 2.1 $Z(A(x, \varphi)) = Z(A)_{\langle \varphi \rangle}$, то левая часть (1) может быть переписана следующим образом

$$\sum_{ij} a_i x^j \mu_{ij} = \sum_j \left(\sum_i a_i \mu_{ij} \right) x^j.$$

Равенство нулю правой части последнего равенства эквивалентно следующей системе:

$$\sum_i a_i \mu_{ij} = 0$$

для всех j , что влечёт $\mu_{ij} = 0$ для всех i, j .

В случае конечного порядка r достаточно воспользоваться рассуждениями из доказательства леммы 3 [11] с учётом описания центра $Z(A(x, \varphi))$, данного в лемме 2.1. $\square$

Из леммы немедленно вытекает

Следствие 1. *Для того чтобы тело $A(x, \varphi)$ было конечномерным над своим центром $Z(A(x, \varphi))$, необходимо и достаточно, чтобы конечномерным над своим центром было A и автоморфизм φ имел конечный внешний порядок r . Если $A(x, \varphi)$ конечномерно, то*

$$[A(x, \varphi) : Z(A(x, \varphi))] = [A : Z(A)]r^2.$$

Доказательство. Пусть $A(x, \varphi)$ – конечномерно над $Z(A(x, \varphi))$. Тогда ввиду предыдущей леммы система $\{a_i\}_{i \in I}$ конечна, т.е. конечна степень $[A : Z(A)_{\langle \varphi \rangle}]$. Поскольку $[A : Z(A)_{\langle \varphi \rangle}] = [A : Z(A)][Z(A) : Z(A)_{\langle \varphi \rangle}]$ оба сомножителя в правой части конечны, а так как ещё $[Z(A) : Z(A)_{\langle \varphi \rangle}] = r$, то условия, приведенные в формулировке следствия, необходимы.

Обратно, пусть степень A над $Z(A)$ и число r конечны. Тогда достаточность условий и формула вычислений степени $[A(x, \varphi) : Z(A(x, \varphi))]$ вытекают из (лемма 3, [11]). $\square$

Следующее утверждение даёт критерий конечномерности A_n в терминах тела A и внешних порядков автоморфизмов $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(n-1)}$.

Предложение 1. *Для того, чтобы A_n было конечномерным необходимо и достаточно, чтобы конечномерным над своим центром было A и чтобы автоморфизмы $\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(n-1)}$ имели конечные*

внешние порядки $r_1, \dots, r_n$ соответственно. В случае конечномерности A_n

$$[A_n : Z(A_n)] = [A : Z(A)] \left(\prod_{i=1}^n r_i \right)^2.$$

Доказательство. Поскольку A_i над $Z(A_i)$ конечномерно в том и только в том случае, когда A_{i-1} конечномерно над $Z(A_{i-1})$ и конечен порядок r_i , где $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($A = A_0$), то условия из формулировки необходимы и достаточны для конечномерности A_n . Для доказательства формулы степени $[A_n : Z(A_n)]$ применим индукцию по n . Базой индукции в этом случае является формула из предыдущего следствия. Предположим, что для $i < n$

$$[A_i : Z(A_i)] = [A : Z(A)] \left(\prod_{j=1}^i r_j \right)^2.$$

Ввиду следствия, $[A_{i+1} : Z(A_{i+1})] = [A_i : Z(A_i)] r_{i+1}$. Подставляя выражение $[A_i : Z(A_i)]$, получаем ввиду индуктивного предположения

$$[A_{i+1} : Z(A_{i+1})] = [A : Z(A)] \left(\prod_{j=1}^{i+1} r_j \right)^2,$$

что и требовалось. $\square$

Из предыдущего предложения и леммы 2.3 вытекает конечность групп $G_i = \langle \varphi_{i+1}^{(i)} |_{Z(A_i)}, \dots, \varphi_n^{(i)} |_{Z(A_i)} \rangle$.

Точнее, имеет место

Лемма 2. Пусть A_n — конечномерное тело. Тогда группы G_i ($0 \leq i \leq n-1$) конечны.

Доказательство. Докажем лемму в случае группы G_0 . Для других индексов i рассуждения аналогичны. Ввиду предыдущего предложения, автоморфизм $\varphi_1^{(0)}$ имеет конечный внешний порядок на A . Ввиду леммы 2.3, конечные внешние порядки имеют и автоморфизмы $\varphi_2^{(0)}, \dots, \varphi_n^{(0)}$. Из абелевости группы G_0 теперь вытекает её конечность. $\square$

Для получения внутреннего (т.е. в терминах тела A) критерия нам потребуется следующая

Лемма 3. Пусть A_n – однородное конечномерное тело. Тогда существуют натуральное число m и элемент $a \in A^*$ такие, что m делится на внешний порядок r_1 автоморфизма φ_1 , $a^{\varphi_1} = a$ и $z = a^{-1}x_1^m$ принадлежит $Z(A_{[n]})$.

Доказательство. Существование нужных элемента a и числа m установим с помощью рекуррентных соотношений. Положим $y_1 = g_1^{-1}x_1^{m_1}$, где m_1 – внешний порядок φ_1 , а $g_1^{\varphi_1} = g_1$, причём $i_{g_1} = i_{x_1^{m_1}}$. Тогда, очевидно, $y_1 \in Z(A_{[1]})$. Предположим, что для $k < n$ построен элемент $y_k \in Z(A_{[1]})$ такой, что $y_k = g_k^{-1}x_1^{m_k}$, $g_k^{\varphi_1} = g_k$ и $y_k^{\varphi_j^{(1)}} = y_k$ для $j = 2, \dots, k$. Положим $y_k^{\varphi_{k+1}^{(1)}} = \beta_{k+1}y_k$. В силу инвариантности $Z(A_1)$ относительно $\varphi_{k+1}^{(1)}$ элемент $\beta_{k+1} \in Z(A_1)$. Применяя к обеим частям равенства автоморфизм $\varphi_j^{(1)}$ ($j = 1, \dots, k$), получаем

$$y_k^{\varphi_{k+1}^{(1)}\varphi_j^{(1)}} = \beta_{k+1}^{\varphi_j^{(1)}} y_k^{\varphi_j^{(1)}}. \quad (1)$$

Заметим, что ввиду $y_k^{\varphi_j^{(1)}} = y_k$ и абелевости ограничения группы G_1 на $Z(A_1)$ из равенства (1) вытекает

$$y_k^{\varphi_{k+1}^{(1)}} = \beta_{k+1}^{\varphi_j^{(1)}} y_k.$$

С другой стороны, по определению $y_k^{\varphi_{k+1}^{(1)}} = \beta_{k+1}y_k$. Откуда заключаем $\beta_{k+1} = \beta_{k+1}^{\varphi_j^{(1)}}$, т.е. $\beta_{k+1} \in Z(A_1)_{\langle \varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(1)} \rangle}$. Из конечности и абелевости ограничения группы G_1 на $Z(A_1)$ следует, что

$$Z(A_1)_{\langle \varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(1)} \rangle} / Z(A_1)_{\langle \varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_{k+1}^{(1)} \rangle}$$

– конечное циклическое расширение. Поскольку ещё $\beta_{k+1} = y_k^{\varphi_{k+1}^{(1)}-1}$, то

$$N_{Z(A_1)_{\langle \varphi_1^{(1)} \mid_{Z(A_1)}, \dots, \varphi_k^{(1)} \mid_{Z(A_1)} \rangle} / Z(A_1)_{\langle \varphi_1^{(1)} \mid_{Z(A_1)}, \dots, \varphi_{k+1}^{(1)} \mid_{Z(A_1)} \rangle}}(\beta_{k+1}) = 1. \quad (2)$$

Заметим, что для подходящего $b \in A^*$

$$y_k^{\varphi_{k+1}^{(1)}} = bx_1^{m_k}.$$

В самом деле,

$$y_k^{\varphi_{k+1}^{(1)}} = (g_k^{-1}x_1^{m_k})^{\varphi_{k+1}^{(1)}} = g_k^{-\varphi_{k+1}^{(1)}} a_{1\,k+1}^{\varphi_1^{(1)}} \cdot \dots \cdot a_{1\,k+1}^{\varphi_1^{m_k-1}} x_1^{m_k} = bx_1^{m_k}.$$

Откуда

$$\beta_{k+1} = bx_1^{m_k}(g_k x_1^{m_k})^{-1} = bg_1^{-1} \in A^*.$$

Ввиду последнего, с учётом $\beta_{k+1} \in Z(A_1)_{\langle \varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(1)} \rangle}$, получаем $\beta_{k+1} \in Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_k \rangle}$. Ввиду инвариантности $Z(A_1)$ и $Z(A)$ относительно $\varphi_{k+1}^{(1)}$ определено ограничение $\varphi_{k+1}^{(1)}$ на $Z(A)$, что влечёт инвариантность $Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_k \rangle}$ относительно $\varphi_{k+1}^{(1)}$. В самом деле, для любого $c \in Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_k \rangle}$ и $j \leq k$

$$c^{\varphi_{k+1}^{(1)}} = c^{\varphi_j^{(1)} \varphi_{k+1}^{(1)}} = (c^{\varphi_{k+1}^{(1)}})^{\varphi_j^{(1)}}.$$

Таким образом, корректно определено ограничение $\varphi_{k+1}^{(1)}$ на $Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_k \rangle}$, что приводит к сюръективному гомоморфизму групп Галуа

$$\text{Gal}(Z(A_1)_{\langle \varphi_1^{(1)}|_{Z(A_1)}, \dots, \varphi_k^{(1)}|_{Z(A_1)} \rangle} | Z(A_1)_{\langle \varphi_1^{(1)}|_{Z(A_1)}, \dots, \varphi_{k+1}^{(1)}|_{Z(A_1)} \rangle})$$

и

$$\text{Gal}(Z(A)_{\langle \varphi_1^{(1)}|_{Z(A)}, \dots, \varphi_k^{(1)}|_{Z(A)} \rangle} | Z(A)_{\langle \varphi_1^{(1)}|_{Z(A)}, \dots, \varphi_{k+1}^{(1)}|_{Z(A)} \rangle}).$$

Пусть t – порядок ядра этого гомоморфизма. Тогда из последнего и равенства (2) заключаем

$$(N_{Z(A)_{\langle \varphi_1^{(1)}|_{Z(A)}, \dots, \varphi_k^{(1)}|_{Z(A)} \rangle} | Z(A)_{\langle \varphi_1^{(1)}|_{Z(A)}, \dots, \varphi_{k+1}^{(1)}|_{Z(A)} \rangle} (\beta_{k+1}))^t = 1.$$

По теореме Гильберта 90 для подходящего $\alpha \in Z(A)_{\langle \varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(1)} \rangle}$

$$\beta_{k+1}^t = \alpha^{1-\varphi_{k+1}^{(1)}}.$$

Положим $y_{k+1} = \alpha y_k^t$. Теперь нетрудно видеть, что $y_{k+1}^{\varphi_j^{(1)}} = y_{k+1}$ ($j = 1, \dots, k$). Кроме того,

$$\begin{aligned} y_{k+1}^{\varphi_{k+1}^{(1)}} &= (\alpha y_k^t)^{\varphi_{k+1}^{(1)}} = \alpha^{\varphi_{k+1}^{(1)}} (y_k^{\varphi_{k+1}^{(1)}})^t \\ &= \alpha^{\varphi_{k+1}^{(1)}} (\beta_{k+1} y_k)^t = (\alpha^{\varphi_{k+1}^{(1)}} \beta_{k+1}^t) y_k^t = \alpha y_k^t = y_{k+1}. \end{aligned}$$

Так как элемент y_k^t имеет вид $g_k^{-t} x_1^{tm_k}$ и $\alpha^{\varphi_1} = \alpha$, то $y_{k+1} = \alpha y_k^t = \alpha g_k^{-t} x_1^{tm_k}$. Положим $g_{k+1} = g_k^t \alpha^{-1}$ и $m_{k+1} = tm_k$. Тогда $y_{k+1} = g_{k+1}^{-1} x_1^{m_{k+1}}$, причём $g_{k+1}^{\varphi_1} = g_{k+1}$. Поскольку $y_k \in Z(A_1)$ и $\alpha \in Z(A)_{\langle \varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_k^{(1)} \rangle} \subset Z(A)_{\langle \varphi_1 \rangle}$, то $y_{k+1} \in Z(A_{[1]})$. Напомним также, что $y_{k+1} \in Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_{k+1} \rangle}$, поэтому y_n перестановочен с любым элементом из A и элементами $x_1, \dots, x_n$. Следовательно, y_n , являясь

многочленом от x_1 , принадлежит $Z(A_{[n]})$. Положим $z = y_n$, $a = g_n$ и $m = m_n$. Тогда z – искомый элемент (заметим, что делимость m на r_1 немедленно следует из способа построения y_n). $\square$

Из леммы вытекает следующее

Предложение 2. Если тело A_n – конечномерно, то существуют элементы $a_i \in A^*$, $i = 1, \dots, n$ и натуральное m такие, что $a_i^{\varphi_i} = a_i$, m кратно любому из внешних порядков r_i автоморфизмов φ_i и $z_i = a_i^{-1} x_i^m \in Z(A_{[n]})$.

Доказательство. Так как в силу леммы 2.1 любую переменную x_i можно считать “первой”, то ввиду предыдущей леммы существуют элементы $g_1, \dots, g_n \in A^*$ и такие натуральные числа $m_1, \dots, m_n$, что $g_i^{\varphi_i} = g_i$ и $u_i = g_i^{-1} x_i^{m_i} \in Z(A_{[n]})$, m_i кратно r_i . Пусть $(m_1, \dots, m_n)$ – наименьшее общее кратное чисел $m_1, \dots, m_n$. Тогда для $m = (m_1, \dots, m_n)^2$ и $z_i = u_i^{m/m_i}$ будем иметь $z_i = a_i^{-1} x_i^m$, где $a_i = g_i^{m/m_i}$ и m делится на r_i ($i = 1, \dots, n$). Предложение доказано. $\square$

Ввиду предложения справедливо

Следствие 2. Для конечномерного A_n произвольный элемент $f \in A_n$ имеет вид $P_f \lambda_f^{-1}$, где $P_f, \lambda_f \in A_{[n]}$ и $\lambda_f \in Z(A_n)$.

Доказательство. Пусть $I(m) = \{0, 1, \dots, m-1\}$ и $\{a_i\}_{i \in I}$ – базис A над $Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}$. Пусть

$$M = \{a_i x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\}_{(i, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in I \times I(m) \times \dots \times I(m)},$$

$z_1, \dots, z_n$ из предыдущего предложения, $Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}(z_1, \dots, z_n)$ – поле рациональных функций от $z_1, \dots, z_n$ над $Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}$ и $S = Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}(z_1, \dots, z_n)$ -линейная оболочка множества M . Ввиду предыдущего предложения, S – конечномерная алгебра над полем

$$Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}(z_1, \dots, z_n).$$

Ввиду конечномерности S над полем $Z(A)_{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle}(z_1, \dots, z_n)$ алгебра S – тело. Так как ещё S , очевидно, содержит $A_{[n]}$ и есть подтелом в теле частных кольца $A_{[n]}$, то $S = A_n$. Таким образом, $f = \sum_i (u_i/v_i) m_i$, где $u_i, v_i \in Z(A_{[n]})$, $m_i \in M$. Тогда

$$f = \sum_i (u_i/v_i) m_i = \sum_i \frac{u_i (v_i^{-1} \cdot \prod_j v_j) m_i}{\prod_j v_j} = P_f \lambda_f^{-1}$$

для $P_f = \sum_i u_i (\prod_j v_j \cdot v_i^{-1}) m_i$, $\lambda_f = \prod_j v_j$. $\square$

Предыдущее позволяет получить критерий конечномерности тела A_n в терминах A .

Теорема. *Тело A_n конечномерно тогда и только тогда, когда степень $[A : Z(A)]$ конечна, группа $G_0 = \langle \varphi_1|_{Z(A)}, \dots, \varphi_n|_{Z(A)} \rangle$ конечная абелева и существует натуральное число m такое, что при подходящих $a_t \in A^*, t = 1, \dots, n$ со свойством $a_t^{\varphi^t} = a_t$ имеют место соотношения*

$$a_i^{1-\varphi_j} a_{ij} a_{ij}^{\varphi_i} \dots a_{ij}^{\varphi_i^{m-1}} = 1$$

($1 \leq i, j \leq n$) и ограничения φ_k^m и i_{a_k} на A совпадают ($1 \leq i \leq n$).

Доказательство. Предположим, что A_n конечномерно и элементы $z_1, \dots, z_n \in Z(A_n)$ такие, как в предыдущем предложении. Ввиду $z_i = a_i^{-1} x_i^m$ и $z_i^{\varphi_j^{(n)}} = z_i$ имеем

$$a_i^{-\varphi_j} (a_{ij} x_i)^m = a_i^{-1} x_i^m,$$

откуда следует

$$a_i^{1-\varphi_j} a_{ij} a_{ij}^{\varphi_i} \dots a_{ij}^{\varphi_i^{m-1}} = 1.$$

Далее, $z_i a z_i^{-1} = a$ для любого $a \in A$, поэтому

$$a_i^{-1} x_i^m a x_i^{-m} a_i = a$$

и окончательно $x_i^m a x_i^{-m} = a_i a a_i^{-1}$. Таким образом, ограничения на A автоморфизмов φ_i^m и i_{a_i} совпадают. Абелевость группы $\langle \varphi_1|_{Z(A)}, \dots, \varphi_n|_{Z(A)} \rangle$ вытекает из следствия 2.2, а её конечность – из леммы 2.2. Наконец, ввиду предложения 1 степень $[A : Z(A)]$ конечна.

Для доказательства достаточности положим $z_i = a_i^{-1} x_i^m$. Установим перестановочность всех z_i с элементами из A . Ввиду условия $\varphi_k^m|_A = i_{a_k}|_A$ имеем $x_i^m a x_i^{-m} = a_i a a_i^{-1}$, которое приводит к равенству $a_i^{-1} x_i^m a = a a_i^{-1} x_i^m$, т.е. все z_i коммутируют с элементами из A . Покажем теперь, что z_i перестановочно с любым x_j . В самом деле, из условия

$$a_i^{1-\varphi_j} a_{ij} a_{ij}^{\varphi_i} \dots a_{ij}^{\varphi_i^{m-1}} = 1$$

вытекает

$$a_i^{-\varphi_j} (a_{ij} x_i)^m = a_i^{-1} x_i^m,$$

что эквивалентно $z_i^{\varphi_j^{(n-1)}} = z_i$, и потому $x_j z_i x_j^{-1} = z_i$. Таким образом, все z_i перестановочны с любыми элементами из A и всеми переменными $x_1, \dots, x_n$, что влечёт $z_i \in Z(A_n)$. Для установления конечномерности A_n рассмотрим последовательность тел

$$Z(A)_{G_0}(z_1, \dots, z_n) \subset Z(A)(z_1, \dots, z_n) \subset A(z_1, \dots, z_n) \subset A_n.$$

Так как

$$Z(A)_{G_0}(z_1, \dots, z_n) \subset Z(A_n) \subset A_n,$$

то конечномерность A_n над $Z(A)_{G_0}(z_1, \dots, z_n)$ влечёт конечномерность A_n . Покажем последовательно конечность степеней

$$[Z(A)(z_1, \dots, z_n) : Z(A)_{G_0}(z_1, \dots, z_n)], \quad (1)$$

$$[A(z_1, \dots, z_n) : Z(A)(z_1, \dots, z_n)], \quad (2)$$

$$[A_n : A(z_1, \dots, z_n)] \quad (3)$$

(все рассматриваемые степени являются левыми). Степень (1) конечна ввиду конечности G_0 . В самом деле, $|G_0| = [Z(A) : Z(A)_{G_0}]$, а степень $[Z(A)(z_1, \dots, z_n) : Z(A)_{G_0}(z_1, \dots, z_n)]$ является делителем $[Z(A) : Z(A)_{G_0}]$. Пусть $b_1, \dots, b_n$ — левый базис A над $Z(A)$ (являющийся одновременно и правым). Нетрудно видеть, что $b_1, \dots, b_n$ — левый базис $A(z_1, \dots, z_n)$ над $Z(A)(z_1, \dots, z_n)$, что влечёт конечность степени (2). Чтобы убедиться в конечности (3), рассмотрим левое векторное пространство $A(z_1, \dots, z_n)[x_1, \dots, x_n]$ над $A(z_1, \dots, z_n)$. Тогда система $\{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}\}_{i=1, \dots, n, \alpha_i=0, 1, \dots, m-1}$ является конечной левой системой образующих $A(z_1, \dots, z_n)[x_1, \dots, x_n]$ над $A(z_1, \dots, z_n)$. Пусть теперь c — ненулевой элемент из $A(z_1, \dots, z_n)[x_1, \dots, x_n]$. Рассмотрим эндоморфизм τ векторного пространства $A(z_1, \dots, z_n)[x_1, \dots, x_n]$, связанный с правым умножением на c (заметим, что произведение двух элементов из $A(z_1, \dots, z_n)[x_1, \dots, x_n]$ снова лежит в $A(z_1, \dots, z_n)[x_1, \dots, x_n]$). Ясно, что τ инъективен и, ввиду конечномерности $A(z_1, \dots, z_n)[x_1, \dots, x_n]$ над $A(z_1, \dots, z_n)$, является сюръективным. Последнее влечёт существование в этом пространстве элемента, обратного к c . Таким образом, $A(z_1, \dots, z_n)[x_1, \dots, x_n]$ — тело и потому совпадает с A_n , поскольку содержит подкольцо $A_{[n]}$. Следовательно, степень (3) конечна. Из конечности степеней (1)-(3) вытекает конечность степени A_n над $Z(A)_{G_0}(z_1, \dots, z_n)$, что и требовалось. $\square$

Замечание 1. Отметим, что на теле A_n определено нормирование w , задаваемое следующим образом. Пусть $\Gamma_{A_n} = \mathbb{Z}^n$ — упорядоченная

группа с лексикографическим порядком, $M = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$ и для $\gamma = (\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(n)}) \in \Gamma_{A_n}$ $M^\gamma = x_1^{\gamma^{(1)}} \dots x_n^{\gamma^{(n)}}$. Тогда произвольный многочлен $f \in A_{[n]}$ можно представить в виде $\sum_{i=1}^s a_i M^{\gamma_i}$, где $\gamma_i \in \Gamma_{A_n}$, $\gamma_i < \gamma_{i+1}$ при $1 \leq i \leq s-1$ и $\gamma_i^{(j)} \geq 0$ ($1 \leq i \leq s$, $1 \leq j \leq s$). Положим $w(f) = \gamma_1 = (\gamma_1^{(n)}, \dots, \gamma_1^{(1)})$ и продлим w на всё тело A_n с помощью формулы $w(fg^{-1}) = w(f) - w(g)$ для $f, g \in A_{[n]}$. Поскольку A_n – нормированное тело, для него определено ассоциированное градуированное кольцо с делением в смысле [23]. Таким образом, наши вычисления можно рассматривать в контексте [23]. Тем не менее, мы придерживаемся рассуждений, навеянных статьёй [11], чтобы подчеркнуть первоначальную идею вычисления групп $\text{SK}_1(A_n)$.

Замечание 2. Повсюду ниже мы будем предполагать A_n конечномерным однородным телом некоммутативных рациональных функций.

§4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИВЕДЕННЫХ НОРМ

В этом параграфе мы показываем как вычисляются приведенные нормы элементов из A_n , лежащих в A .

Положим $\lambda(A_n | Z(A)) = [Z(A) : Z(A)_{G_0}]^{-1} \prod_{i=1}^n r_i$, где G_0 – группа, порождённая автоморфизмами $\varphi_1|_{Z(A)}, \dots, \varphi_n|_{Z(A)}$, а $Z(A)_{G_0}$ – поле неподвижных элементов относительно G_0 в $Z(A)$, $r_1, \dots, r_n$ – внешние порядки соответственно автоморфизмов $\varphi_1^{(0)}, \dots, \varphi_n^{(n-1)}$.

Тогда справедливо

Предложение 1. Для произвольного элемента $a \in A^*$

$$\text{Nrd}_{A_n}(a) = N_{Z(A)/Z(A)_{G_0}}(\text{Nrd}_A(a))^{\lambda(A_n | Z(A))}.$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по числу переменных. Базу индукции составляет утверждение леммы 4 из [11]. Предположим, что в случае тел от $n-1$ переменных наше утверждение доказано. Тогда

$$\text{Nrd}_{A_n}(a) = N_{Z(A_1)/Z(A_1)_{G_1}}(\text{Nrd}_{A_1}(a))^{\lambda(A_n | Z(A_1))},$$

где G_1 – группа, порождённая автоморфизмами $\varphi_2^{(1)}|_{Z(A_1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}|_{Z(A_1)}$, $Z(A_1)_{G_1}$ – поле инвариантов G_1 в $Z(A_1)$. Рассмотрим гомоморфизм μ группы G_1 в группу Галуа $\text{Gal}(Z(A_1) \cap Z(A)/Z(A_1)_{G_1} \cap Z(A))$, получаемый ограничением автоморфизмов G_1 до автоморфизмов $Z(A_1) \cap Z(A)$. Нетрудно видеть, что μ сюръективен. Пусть m_1 – порядок $\text{Ker } \mu$

ядра μ . Тогда поскольку $\text{Nrd}_{A_1}(a) \in Z(A)$

$$\text{Nrd}_{A_n}(a) = N_{Z(A_1) \cap Z(A)/Z(A_1)_{G_1} \cap Z(A)}(\text{Nrd}_{A_1}(a))^{m_1 \lambda(A_n|Z(A_1))}.$$

Заметим далее, что $Z(A_1) \cap Z(A) = Z(A)_{\langle \varphi_1 \rangle}$, $\langle \varphi_1 \rangle$ — группа, порождённая φ_1 , и $Z(A_1)_{G_1} \cap Z(A) = Z(A)_{G_0}$. Следовательно,

$$\text{Nrd}_{A_n}(a) = N_{Z(A)_{\langle \varphi_1 \rangle}/Z(A)_{G_0}}(\text{Nrd}_{A_1}(a))^{m_1 \lambda(A_n|Z(A_1))}$$

или ввиду справедливости леммы в случае $n = 1$

$$\text{Nrd}_{A_n}(a) = N_{Z(A)_{\langle \varphi_1 \rangle}/Z(A)_{G_0}}(N_{Z(A)/Z(A)_{\langle \varphi_1 \rangle}}(\text{Nrd}_A(a)))^{m_1 \lambda(A_n|Z(A_1))},$$

что равносильно

$$\text{Nrd}_{A_n}(a) = N_{Z(A)_{G_0}}(\text{Nrd}_A(a))^{m_1 \lambda(A_n|Z(A_1))}.$$

Таким образом, для завершения доказательства леммы остаётся показать, что $\lambda(A_n|Z(A)) = m_1 \lambda(A_n|Z(A_1))$.

Действительно,

$$\lambda(A_n|Z(A_1)) = [Z(A_1) : Z(A_1)_{G_1}]^{-1} \prod_{i=2}^m r_i,$$

так что достаточно показать, что

$$[Z(A) : Z(A)_{G_0}]^{-1} r_1 = m_1 [Z(A_1) : Z(A_1)_{G_1}]^{-1}.$$

Но $[Z(A_1) : Z(A_1)_{G_1}] = m_1 [Z(A)_{\langle \varphi_1 \rangle} : Z(A)_{G_0}]$, поэтому предыдущее равенство приобретает вид

$$[Z(A) : Z(A)_{G_0}]^{-1} r_1 = [Z(A)_{\langle \varphi_1 \rangle} : Z(A)_{G_0}]^{-1}.$$

Откуда $r_1 [Z(A) : Z(A)_{\langle \varphi_1 \rangle}]^{-1} = 1$, что, очевидно, верно. Предложение доказано. $\square$

§5. ГРУППА $\text{SL}(A_n)$

Этот параграф посвящён установлению основного при вычислении групп $SK_1(A_n)$ факта, доказательство которого впервые было представлено в [18].

Предложение 1. $\text{SL}(A_n) = (\text{SL}(A_n) \cap A)[A_n^*, A_n^*]$.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\text{SL}(A_n) \subset (\text{SL}(A_n) \cap A)[A_n^*, A_n^*].$$

Доказательство проводится индукцией по числу переменных. Предположим, что $n > 1$ и для тел A_m при $m < n$ наше утверждение справедливо. Тогда, в частности,

$$\mathrm{SL}(A_n) \subset (\mathrm{SL}(A_n) \cap A_1)[A_n^*, A_n^*],$$

где A_1 – тело частных подкольца $A_{[1]}$, содержащего A и x_1 . Таким образом, достаточно показать, что

$$\mathrm{SL}(A_n) \cap A_1 \subset (\mathrm{SL}(A_n) \cap A)[A_n^*, A_n^*].$$

Пусть $a \in \mathrm{SL}(A_n) \cap A_1$. Тогда ввиду леммы 4.1

$$\mathrm{Nrd}_{A_n}(a) = N_{Z(A_1)/Z(A_1)_{G_1}}(\mathrm{Nrd}_{A_1}(a))^{\lambda(A_n|Z(A_1))}. \quad (1)$$

Пусть $\tilde{G}_1$ – группа с образующими $\varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}$, $\mu : \tilde{G}_1 \rightarrow G_1$ – гомоморфизм ограничения, $\mathrm{Ker} \mu$ – его ядро и $\tilde{G}_1 = \cup_{\alpha} g_{\alpha} \mathrm{Ker} \mu$ – разложение $\tilde{G}_1$ на левые смежные классы по $\mathrm{Ker} \mu$.

Так как $\mathrm{Nrd}_{A_n}(a) = 1$, то из (1) следует

$$\left(\prod_{\alpha} \mathrm{Nrd}_{A_1}(a)^{g_{\alpha}} \right)^{\lambda(A_n|Z(A_1))} = 1.$$

Откуда следует, что элемент $u = \left(\prod_{\alpha} a^{g_{\alpha}} \right)^{\lambda(A_n|Z(A_1))}$ принадлежит $\mathrm{SL}(A_1)$. Заметим, что если $a = PQ^{-1}$, где $P, Q \in A_{[1]}$, то $\deg P = \deg Q$ (см., например, [11]). Для доказательства включения

$$\mathrm{SL}(A_n) \cap A_1 \subset (\mathrm{SL}(A_n) \cap A)[A_n^*, A_n^*]$$

покажем, что существует $b \in A$ со свойством $a \equiv b \pmod{[A_n^*, A_n^*]}$. Последнее утверждение доказывается индукцией по степени $\deg P$ многочлена P . Пусть $\deg P = 0$. Тогда $a \in A$ и всё доказано: $b = a$. Предположим, что $\deg P > 0$, и докажем существование элементов $\tilde{P}, \tilde{Q} \in A_{[1]}$ таких, что $\deg \tilde{P} = \deg \tilde{Q} < \deg P$ и $\tilde{P}\tilde{Q}^{-1} \equiv a \pmod{[A_n^*, A_n^*]}$. Доказательство существования $\tilde{P}, \tilde{Q}$ проводится следующим образом. Поскольку для подходящего $h \neq 0$, $u^h \in [A_1^*, A_1^*]$ (см. [30]), то рассмотрев разложения P и Q на неприводимые множители в $A_{[1]}$: $P = P_1 \dots P_e$, $Q = Q_1 \dots Q_c$, получим

$$\left(\prod_{\alpha} (P_1 \dots P_e)^{g_{\alpha}} \right)^t = \left(\prod_{\alpha} (Q_1 \dots Q_c)^{g_{\alpha}} \right)^t r, \quad (2)$$

где $t = h\lambda(A_n|Z(A_1))$, $r = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$, причём ввиду следствия 3.2 можно считать $a_i, b_i \in A_{[1]}$ и $a_i^{-1} = F_i \lambda_i^{-1}$, $b_i^{-1} = G_i \mu_i^{-1}$, $F_i, G_i \in A_{[1]}$ и

$\lambda_i, \mu_i \in Z(A_1)$. Тогда

$$a_i F_i = \lambda_i, b_i G_i = \mu_i, i = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

Пусть $s_l(s_r)$ – левая (правая) часть равенства (2). Равенство (2) может быть переписано так

$$\prod_{i=1}^m (\lambda_i \mu_i) s_l = M \left(\prod_{i=1}^m a_i b_i F_i G_i \right), \quad (4)$$

где $M = s_r(\prod_{i=1}^m [a_i, b_i])^{-1}$. Далее, у M существует неприводимый множитель, подобный P_1 . Действительно, ввиду равенств (3) число неприводимых множителей, подобных P_1 , у $\prod_{i=1}^m \lambda_i \mu_i$ и $\prod_{i=1}^m (a_i b_i F_i G_i)$ одинаково, а так как должна существовать биекция между неприводимыми множителями обеих частей равенства (4), то существует множитель $Q_j^{g_\alpha}$ из M , подобный P_1 . Тогда ввиду подобия $Q_j^{g_\alpha}$ и P_1 существуют $v, w \in A_{[1]}$ такие, что $\deg v = \deg w < \deg P_1$ и $w P_1 = Q_j^{g_\alpha} v$. Положим $P = P_1 p', Q = Q' Q_j Q'', Q', Q'' \in A_{[1]}$. Тогда будем иметь сравнения $\text{mod } [A_n^*, A_n^*]$:

$$\begin{aligned} a &= w^{-1} (w P_1 P') Q^{-1} = w^{-1} Q_j^{g_\alpha} v P' Q^{-1} \equiv w^{-1} Q_j^{g_\alpha} v P' Q''^{-1} Q_j^{-1} Q'^{-1} \\ &\equiv Q_j^{g_\alpha} Q_j^{-1} v P' Q''^{-1} Q'^{-1} w^{-1}. \end{aligned}$$

Но $Q_j^{g_\alpha} Q_j^{-1} \in [A_n^*, A_n^*]$ (так как $Q_j^{g_\alpha - 1} = [x_{i_s}^{\alpha_s} \cdot \dots \cdot x_{i_1}^{\alpha_1}, Q_j]$ при $g_\alpha = (\varphi_{i_1}^{(1)})^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (\varphi_{i_s}^{(1)})^{\alpha_s}$). Следовательно,

$$a \equiv v P' (w Q' Q'')^{-1} \pmod{[A_n^*, A_n^*]}.$$

Положим $\tilde{P} = v P', \tilde{Q} = w Q' Q''$. Тогда существование $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$ доказано. В силу индуктивного предположения существует $b \in A^*$ такой, что $\tilde{P} \tilde{Q}^{-1} \equiv b \pmod{[A_n^*, A_n^*]}$, а тогда и $a \equiv b \pmod{[A_n^*, A_n^*]}$, что и требовалось. $\square$

Остаётся заметить, что в случае $n = 1$ лемма верна ввиду леммы 5 из [11]. Последнее обеспечивает базу для индуктивного рассуждения. Предложение доказано.

§6. ПРИВЕДЕННЫЕ ГРУППЫ УАЙТХЕДА ТЕЛ A_n

В этом параграфе мы показываем как с помощью последней леммы получаются формулы для вычисления приведенных групп Уайтхеда $SK_1(A_n)$, указанные в [11], и все аналоги формул для вычисления этих групп, содержащиеся в [2].

Предложение 1.

$$\mathrm{SL}(A_n) \cap A = \{a \in A^* \mid N_{Z(A)/Z(A)_{G_0}}(\mathrm{Nrd}_A(a))^{\lambda(A_n|Z(A))} = 1\}.$$

Доказательство немедленно следует из предложения 4.1.

Положим

$$A(G) = \langle a^{g-1} \rangle_{g \in G} [A^*, A^*],$$

где $G = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_n \rangle$, и $\langle a^{g-1} \rangle_{g \in G}$ – подгруппа A^* , порождённая элементами вида a^{g-1} для $a \in A^*$, $g \in G$;

$$\tilde{A}(G) = A(G) \text{ при } n = 1,$$

$$\tilde{A}(G) = A(G) \langle a_{ij} \rangle_{1 \leq i < j \leq n}, \quad n > 1,$$

$\langle a_{ij} \rangle_{1 \leq i < j \leq n}$ – подгруппа A^* с образующими a_{ij} ($1 \leq i < j \leq n$).

Индукцией по n устанавливается справедливость следующей леммы.

Лемма 1. $[A_n^*, A_n^*] \cap A = \tilde{A}(G)$.

Доказательство. Заметим, что $[x_j, x_i] = a_{ij} \in A$, поэтому группа $\langle a_{ij} \rangle_{1 \leq i < j \leq n}$ содержится в $[A_n^*, A_n^*] \cap A^*$. Так как $[A^*, A^*] \subset [A_n^*, A_n^*] \cap A^*$, то для доказательства включения $\tilde{A}(G) \subset [A_n^*, A_n^*] \cap A$ достаточно показать, что группа $\langle a^{g-1} \rangle_{g \in G}$ содержится в $[A_n^*, A_n^*] \cap A$. Заметим, что для $a \in A^*$ и $1 \leq j \leq n$ будем иметь $a^{\varphi_j^\alpha - 1} = x_j^\alpha a x_j^{-\alpha} a^{-1} = [x_j^\alpha, a] \in [A_n^*, A_n^*] \cap A$. Пусть далее $g \in G$, $g = \varphi_{i_1}^{\alpha_1} \dots \varphi_{i_s}^{\alpha_s}$. Чтобы показать, что $a^{g-1} \in [A_n^*, A_n^*]$, применим индукцию по длине s слова. При $s = 1$ наше утверждение справедливо, как отмечено выше. Предположим, что для всех g , представимых в виде слова длины меньшей чем s наше утверждение имеет место. Тогда

$$\begin{aligned} a^{g-1} &= a^{\varphi_{i_1}^{\alpha_1} \varphi_{i_2}^{\alpha_2} \dots \varphi_{i_s}^{\alpha_s} - 1} a^{-1} \\ &= [(a^{\varphi_{i_1}^{\alpha_1} \dots \varphi_{i_{s-1}}^{\alpha_{s-1}}})^{\varphi_{i_s}^{\alpha_s}} (a^{\varphi_{i_1}^{\alpha_1} \dots \varphi_{i_{s-1}}^{\alpha_{s-1}})^{-1}] (a^{\varphi_{i_1}^{\alpha_1} \dots \varphi_{i_{s-1}}^{\alpha_{s-1}}}) a^{-1} \\ &= [x_{i_s}^{\alpha_s}, a^{\varphi_{i_1}^{\alpha_1} \dots \varphi_{i_{s-1}}^{\alpha_{s-1}}}] (a^{\varphi_{i_1}^{\alpha_1} \dots \varphi_{i_{s-1}}^{\alpha_{s-1}}}) a^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi_{i_1}^{\alpha_1} \dots \varphi_{i_{s-1}}^{\alpha_{s-1}}$ – слово длины $s-1$, то элемент $a^{\varphi_{i_1}^{\alpha_1} \dots \varphi_{i_{s-1}}^{\alpha_{s-1}}} a^{-1}$, а с ним и a^{g-1} , принадлежит $[A_n^*, A_n^*] \cap A^*$. Так как уже упоминалось, что $[A^*, A^*] \subset [A_n^*, A_n^*] \cap A^*$, то включение $\tilde{A}(G) \subset [A_n^*, A_n^*] \cap A^*$ установлено. Для доказательства обратного включения воспользуемся индукцией по числу переменных n . Базу индукции ($n = 1$) обеспечивает

лемма 8 из [11]. Предположим, что нужное включение имеет место в случае числа переменных, меньшего чем n . Тогда

$$a \in [A_n^*, A_n^*] \cap A^* \subset [A_n^*, A_n^*] \cap A_1^* = A(\tilde{G}_1) \langle a_{ij} \rangle_{2 \leq i < j \leq n} [A_1^*, A_1^*],$$

т.е. для подходящих элементов $c_1, \dots, c_r \in A_1^*$, $g_1, \dots, g_r \in \tilde{G}_1 = \langle \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(1)} \rangle$, $d \in [A_1^*, A_1^*]$ и $z \in \langle a_{ij} \rangle_{2 \leq i < j \leq n}$, ($z = 1$ при $n = 2$)

$$a = \prod_{i=1}^r c_i^{g_i-1} z d. \quad (1)$$

Пусть $c_i = \frac{C_i}{\delta_i}$, где $C_i, \delta_i \in A_{[1]}$, δ_i — центральный элемент кольца $A_{[1]}$. Тогда равенство (1) можно переписать в виде

$$a \prod_{i=1}^r (\delta_i^{g_i} C_i) = \prod_{i=1}^r (\delta_i C_i^{g_i}) z \prod_{j=1}^m [u_j, v_j] \quad (2)$$

для некоторых $u_i, v_i \in A_1$.

Положим $u_j = P_j \lambda_j^{-1}$, $v_j = Q_j \mu_j^{-1}$, $u_j^{-1} = P'_j \lambda'_j$, $v_j^{-1} = Q'_j \mu'_j$, где $P_j, Q_j, P'_j, Q'_j, \lambda_j, \mu_j, \lambda'_j, \mu'_j$ — многочлены из $A_{[1]}$, а $\lambda_j, \mu_j, \lambda'_j, \mu'_j$ принадлежат центру $A_{[1]}$. Тогда

$$\lambda_j \lambda'_j = P_j P'_j, \mu_j \mu'_j = Q_j Q'_j. \quad (3)$$

Ввиду равенств (3) равенство (2) эквивалентно следующему

$$a \prod_{j=1}^m (\lambda_j \lambda'_j \mu_j \mu'_j) \prod_{i=1}^r (\delta_i^{g_i} C_i) = \prod_{i=1}^r (\delta_i C_i^{g_i}) z \prod_{j=1}^m (P_j Q_j P'_j Q'_j). \quad (4)$$

Так как $x_1^{\varphi_j^{(1)}} = a_{1j} x_1$ для любого $j \geq 1$ и $a_{ij}^{\varphi_k} = a_{ij}^{\varphi_k-1} a_{ij}$, то $a_{ij}^{\varphi_k} \in \tilde{A}(G)$. Отсюда следует, что для любого элемента $g \in \tilde{G}_1$ $x_1^g = a_f x_1$, где $a_f \in \tilde{A}(G)$. Наконец, если $f \in A_{[1]}$, то из предыдущего следует, что старшие коэффициенты многочленов f и f^g отличаются на элемент из $\tilde{A}(G)$. Теперь для завершения доказательства леммы остаётся, воспользовавшись последним замечанием, сравнить старшие коэффициенты правой и левой частей равенства (4). Лемма доказана. $\square$

В сочетании предложение 5.1 и лемма 1 позволяют легко доказать основное утверждение (теорему 2) в [11] и показать, что аналоги формул для вычисления $SK_1(A)$ в случае гензелевых тел A из [2] имеют место и в случае групп $SK_1(A_n)$.

Действительно, положим

$$\mathrm{SL}^G(A) = \{a \in A^* \mid N_{Z(A)/Z(A)_G}(\mathrm{Nrd}_A(a)) = 1\},$$

$$\mathrm{SK}^G(A) = (\mathrm{SL}^G(A)\tilde{A}(G))/\tilde{A}(G),$$

$$\lambda = \lambda(A_n \mid Z(A)) = [Z(A) : Z(A)_{G_0}]^{-1} \prod_{i=1}^n r_i \quad (\text{см. §4}),$$

μ_λ – группа корней степени λ из 1,

$$C_\lambda = \mu_\lambda \cap N_{Z(A)/Z(A)_G}(\mathrm{Nrd}(A^*)).$$

Тогда справедлива

Теорема 1 (теорема 2 [11]). *Группа $\mathrm{SK}_1(A_n)$ включается в точную последовательность*

$$1 \longrightarrow \mathrm{SK}^G(A)/T \longrightarrow \mathrm{SK}_1(A_n) \longrightarrow \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z},$$

где $T = ([A_n^*, A_n^*] \cap \mathrm{SL}^G(A)\tilde{A}(G))/\tilde{A}(G)$, m_1 – делитель порядка группы C_λ .

Доказательство. Используя определение группы $\mathrm{SL}^G(A)$ и предложение 1 получаем, что $\mathrm{SL}^G(A)[A_n^*, A_n^*]/[A_n^*, A_n^*]$ – подгруппа $\mathrm{SK}_1(A_n)$. Так как

$$\mathrm{SL}^G(A)[A_n^*, A_n^*]/[A_n^*, A_n^*] \cong \mathrm{SL}^G(A)\tilde{A}(G)[A_n^*, A_n^*]/[A_n^*, A_n^*],$$

то по теореме об изоморфизме

$$\mathrm{SL}^G(A)[A_n^*, A_n^*]/[A_n^*, A_n^*] \cong \mathrm{SL}^G(A)\tilde{A}(G)/([A_n^*, A_n^*] \cap \mathrm{SL}^G(A)\tilde{A}(G)),$$

а по другой теореме об изоморфизме последняя группа изоморфна

$$[\mathrm{SL}^G(A)\tilde{A}(G)/\tilde{A}(G)]/T \cong \mathrm{SK}^G(A)/T$$

(напомним, что ввиду леммы 1 $\tilde{A}(G) \subset [A_n^*, A_n^*]$). Таким образом, группа $\mathrm{SK}^G(A)/T$ инъективно вкладывается в $\mathrm{SK}_1(A_n)$.

Заметим, что группа $(\mathrm{SL}(A_n) \cap A)/\mathrm{SL}^G(A)$ изоморфно вкладывается в C_λ . Действительно, рассмотрим гомоморфизм $\mathrm{SL}(A_n) \cap A$ в C_λ , задаваемый формулой $s \longrightarrow N_{Z(A)/Z(A)_G} \mathrm{Nrd}(s)$. Корректность этого гомоморфизма обеспечивается предложением 4.1. Его ядро, очевидно, совпадает с $\mathrm{SL}^G(A)$. Таким образом, порядок группы $(\mathrm{SL}(A) \cap A)/\mathrm{SL}^G(A)\tilde{A}(G)$ делит порядок группы C_λ .

Далее, рассмотрим факторгруппу

$$\mathrm{SK}_1(A_n)/(\mathrm{SL}^G(A)[A_n^*, A_n^*]/[A_n^*, A_n^*]).$$

Ввиду предложения 5.1 и теорем об изоморфизмах, получаем

$$\begin{aligned}
& \mathrm{SK}_1(A_n)/(\mathrm{SL}^G(A)[A_n^*, A_n^*]/[A_n^*, A_n^*]) \\
& \cong ((\mathrm{SL}(A_n) \cap A)[A_n^*, A_n^*])/\mathrm{SL}^G(A)[A_n^*, A_n^*] \\
& \cong ((\mathrm{SL}(A_n) \cap A)\mathrm{SL}^G(A)[A_n^*, A_n^*])/\mathrm{SL}^G(A)[A_n^*, A_n^*] \\
& \cong (\mathrm{SL}(A_n) \cap A)/((\mathrm{SL}^G(A)[A_n^*, A_n^*]) \cap (A \cap \mathrm{SL}(A_n))) \\
& \cong (\mathrm{SL}(A_n) \cap A)/((\mathrm{SL}^G(A)[A_n^*, A_n^*]) \cap A) \\
& = (\mathrm{SL}(A_n) \cap A)/(\mathrm{SL}^G(A)([A_n^*, A_n^*] \cap A)) \\
& = (\mathrm{SL}(A_n) \cap A)/\mathrm{SL}^G(A)\tilde{A}(G).
\end{aligned}$$

Положив m_1 равным порядку группы $(\mathrm{SL}(A_n) \cap A)/\mathrm{SL}^G(A)\tilde{A}(G)$, получаем точность в члене $\mathrm{SK}_1(A_n)$. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Как следует из доказательства теоремы, на самом деле имеет место точная последовательность

$$1 \longrightarrow \mathrm{SK}^G(A)/T \longrightarrow \mathrm{SK}_1(A_n) \longrightarrow \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \longrightarrow 1,$$

где m_1 – порядок группы $(\mathrm{SL}(A_n) \cap A)/\mathrm{SL}^G(A)\tilde{A}(G)$.

Обратимся теперь к получению других соотношений для вычисления $\mathrm{SK}_1(A_n)$, легко следующих из предложения 5.1 и леммы 2. Для этого соберём вместе старые и введём новые обозначения:

$$\begin{aligned}
F_G &= \tilde{A}(G)/A(G), \\
C_\lambda &= \mu_\lambda \cap N_{Z(A)/Z(A)_G}(\mathrm{Nrd}_A(A^*)), \\
\mathrm{SL}^G(A) &= \{a \in A^* \mid N_{Z(A)/Z(A)_G}(\mathrm{Nrd}_A(a)) = 1\}, \\
\mathrm{SK}_1^G(A) &= \mathrm{SL}^G(A)/A(G), \\
S_G &= (\mathrm{SL}(A_n) \cap A)/A(G), \\
F^G &= (A(G) \cap \mathrm{SL}(A))/[A^*, A^*].
\end{aligned}$$

Замечание. В вышеприведенных обозначениях справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. *Имеет место следующая точная последовательность групп и гомоморфизмов*

$$1 \longrightarrow F_G \xrightarrow{i} S_G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{SK}_1(A_n) \longrightarrow 1.$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что ввиду теоремы об изоморфизмах, предложения 5.1 и леммы 1 группу $\mathrm{SK}_1(A_n)$ можно отождествить с группой $(\mathrm{SL}(A_n) \cap A)/\tilde{A}(G)$. По определению группы S_G и групп $A(G), \tilde{A}(G)$ существует естественный эпиморфизм $S_G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{SK}_1(A_n)$, ядро которого совпадает с $\tilde{A}(G)/A(G)$, а это и есть группа F_G . Таким образом, если i – тождественное вложение, то последовательность точна. $\square$

Лемма 4. *Точной является последовательность*

$$1 \longrightarrow \mathrm{SK}_1^G(A) \xrightarrow{j} S_G \xrightarrow{\delta} C_\lambda \longrightarrow 1.$$

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $S_G \xrightarrow{\delta} C_\lambda$, задаваемый правилом: $(sA(G))^\delta = N_{Z(A)/Z(A)_G}(\mathrm{Nrd}_A(s))$ для $s \in \mathrm{SL}(A_n) \cap A$. Заметим, что δ – корректно определённый гомоморфизм ввиду

$$N_{Z(A)/Z(A)_G}(\mathrm{Nrd}_A(A(G))) = 1.$$

Ввиду предложения 4.1 δ – эпиморфизм. Ядро δ , очевидно, совпадает с $\mathrm{SK}_1^G(A)$. Лемма доказана. $\square$

Для дальнейшего нам потребуется определение (-1) -ой группы когомологий Тэйта конечной группы G и произвольного G -модуля M . Определим на модуле M отображение нормы $N_G : M \longrightarrow M$ следующим образом: для любого $m \in M$ положим $N_G(m) = \sum_{g \in G} gm$. Рассмотрим G -модуль $I_G(M)$, порождённый как абелева группа элементами $\{m - gm \mid m \in M, g \in G\}$. Ясно, что $I_G(M) \subset \mathrm{Ker}(N_G)$. Тогда

$$\hat{H}^{-1}(G, M) = \mathrm{Ker}(N_G)/I_G(M).$$

Лемма. *Последовательность*

$$1 \longrightarrow F^G \longrightarrow \mathrm{SK}_1(A) \longrightarrow \mathrm{SK}_1^G(A) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Nrd}}_A} \hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Nrd}_A(A^*)) \longrightarrow 1$$

точна.

Доказательство. Заметим, что

$$\hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Nrd}_A(A^*)) = \mathrm{Nrd}_A(\mathrm{SL}^G(A))/\mathrm{Nrd}_A(A(G)).$$

Положим для $sA(G) \in \mathrm{SK}_1^G(A)$

$$(sA(G))^{\widetilde{\mathrm{Nrd}}_A} = \mathrm{Nrd}_A(s) \mathrm{Nrd}_A(A(G)) \in \hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Nrd}_A(A^*)).$$

Легко проверяется, что $\widetilde{\text{Nrd}}_A$ – эпиморфизм. Заметим, что ядро $\widetilde{\text{Nrd}}_A$ совпадает с группой $\text{SL}(A)A(G)/A(G)$. Таким образом, последовательность

$$\text{SL}(A)A(G)/A(G) \longrightarrow \text{SK}_1^G(A) \xrightarrow{\widetilde{\text{Nrd}}_A} \widehat{H}^{-1}(G, \text{Nrd}_A(A^*)) \longrightarrow 1 \quad (1)$$

точна. Следующие изоморфизмы μ и ν возникают ввиду теорем об изоморфизмах

$$\begin{aligned} \text{SL}(A)A(G)/A(G) &\xrightarrow{\mu} \text{SL}(A)/A(G) \cap \text{SL}(A) \\ &\xrightarrow{\nu} \text{SK}_1(A)/(A(G) \cap \text{SL}(A)/[A^*, A^*]). \end{aligned}$$

Тогда из точности последовательности (1) и последних изоморфизмов вытекает точность последовательности

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow (A(G) \cap \text{SL}(A))/[A^*, A^*] &\xrightarrow{k} \text{SK}_1(A) \\ &\xrightarrow{\chi} \text{SK}_1^G(A) \xrightarrow{\widetilde{\text{Nrd}}_A} \widehat{H}^{-1}(G, \text{Nrd}_A(A^*)) \longrightarrow 1, \end{aligned}$$

где k – естественное вложение,

$$m : \text{SK}_1(A) \longrightarrow \text{SK}_1(A)/(A(G) \cap \text{SL}(A)/[A^*, A^*])$$

– естественный эпиморфизм. Остаётся положить $\chi = m\nu^{-1}\mu^{-1}$. Лемма доказана. $\square$

Собрав вместе утверждения лемм, приходим к следующей теореме.

Теорема. *Имеет место диаграмма групп и гомоморфизмов с точными строками и точным столбцом*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 1 & \longrightarrow & F^G & \xrightarrow{k} & \mathrm{SK}_1(A) & \xrightarrow{\chi} & \mathrm{SK}_1^G(A) \xrightarrow{\widetilde{\mathrm{Nrd}}_A} \widehat{H}^{-1}(G, \mathrm{Nrd}_A(A^*)) \longrightarrow 1 \\
 & & & \downarrow j & & & \\
 & 1 & \longrightarrow & F_G & \xrightarrow{i} & S_G & \xrightarrow{\varphi} \mathrm{SK}_1(A_n) \longrightarrow 1 \\
 & & & \downarrow \delta & & & \\
 & & & C_\lambda & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & 1 & & &
 \end{array}$$

§7. СЛЕДСТВИЯ И ПРИМЕРЫ

Выведем теперь из теоремы ряд следствий и рассмотрим некоторые примеры.

Следствие 1. *Пусть $\lambda = 1$. Тогда следующая последовательность точна*

$$1 \longrightarrow F_G \longrightarrow \mathrm{SK}_1^G(A) \longrightarrow \mathrm{SK}_1(A_n) \longrightarrow 1.$$

Доказательство. При $\lambda = 1$ $C_1 = \{1\}$ и ввиду точности столбца в формулировке теоремы заключаем $S_G = \mathrm{SK}_1^G(A)$, тогда вторая строка этой формулировки приобретает вид. $\square$

Следствие 2. *Если A – поле, то*

$$\mathrm{SK}_1^G(A) \cong \widehat{H}^{-1}(G, A^*).$$

Доказательство. В этом случае $\mathrm{Nrd}_A : A^* \longrightarrow A^*$ – тождественное отображение, $\mathrm{SK}_1(A) = \{1\}$, и требуемый изоморфизм вытекает из точности первой строки диаграммы теоремы. $\square$

Следствие 3. *Если одновременно $\lambda = 1$ и A – поле, то точна последовательность*

$$1 \longrightarrow F_G \longrightarrow \widehat{H}^{-1}(G, A^*) \longrightarrow \mathrm{SK}_1(A_n) \longrightarrow 1.$$

Доказательство. Это непосредственная комбинация следствий 1, 2. $\square$

Следствие 4. В случае циклической группы G и коммутативного A последовательность

$$1 \longrightarrow F_G \longrightarrow C_\lambda \longrightarrow \mathrm{SK}_1(A_n) \longrightarrow 1$$

точна. В частности, $\mathrm{SK}_1(A_n)$ – циклическая группа порядка, делящего λ .

Доказательство. В силу следствия 2 $\mathrm{SK}_1^G(A) \cong \widehat{H}^{-1}(G, A^*)$. Теорема Тэйта о периодичности групп когомологий даёт $\widehat{H}^{-1}(G, A^*) = H^1(G, A^*)$, а последняя группа тривиальна (теорема Гильберта 90). Последнее влечёт тривиальность группы $\mathrm{SK}_1^G(A)$ и точность обсуждаемой последовательности вытекает из второй строки диаграммы теоремы. $\square$

Следствие 5. Группа F_G порождается образами коммутаторов $[x_j, x_i] = a_{ij}$, $1 \leq i < j \leq n$, если $n \geq 2$, и $F_G = \{1\}$, если G циклическа.

Доказательство немедленно следует из определения групп $A(\widetilde{G})$ и $A(G)$.

Следствие 6. Если $a_{ij} = 1$ для всех $1 \leq i < j \leq n$, то $F_G = 1$.

Следствие 7. Группы F_G, F^G имеют конечную экспоненту.

Доказательство. Поскольку экспоненты групп $\mathrm{SK}_1(A)$ и $\widehat{H}^{-1}(G, \mathrm{Nrd}_A(A^*))$ конечны [30], [3], то из точности первой строки диаграммы теоремы вытекает конечность экспоненты групп F^G и $\mathrm{SK}_1^G(A)$. Точность столбца этой диаграммы и конечность экспонент $\mathrm{SK}_1^G(A)$ и C_λ влечёт конечность экспоненты S_G и потому экспоненты группы F_G . $\square$

В заключение рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Пусть A_n – общее абелево скрещенное произведение (см. [19]), т.е. A – поле и группа G нетривиальна. Тогда имеют место следующие точные последовательности, вычисляющие группу $\mathrm{SK}_1(A_n)$:

$$1 \longrightarrow \langle a_{ij} \rangle_{1 \leq i < j \leq n} / (\langle a_{ij} \rangle_{1 \leq i < j \leq n} \cap A(G)) \longrightarrow S_G \longrightarrow \mathrm{SK}_1(A_n) \longrightarrow 1,$$

$$1 \longrightarrow \widehat{H}^{-1}(G, A^*) \longrightarrow S_G \longrightarrow C_\lambda \longrightarrow 1.$$

Пример 2. Пусть $A = L_0 \times_K L_1$, L_0, L_1 — линейно разделённые над полем K его циклические расширения, G — группа Галуа расширения A/K , $G = \langle \varphi_1 \rangle \oplus \langle \varphi_2 \rangle$, где $\langle \varphi_i \rangle$ — группа Галуа расширения L_i/K . Рассмотрим кольцо некоммутативных многочленов $A[x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2, a_{12} = 1]$ и его тело частных A_2 . Нетрудно видеть, что в этом случае $\lambda = 1$, и в силу следствия 5 $F_G = 1$. Из следствия 3 получаем $SK_1(A_2) \cong \hat{H}^{-1}(G, A^*)$.

Похожим образом получаются аналоги и других примеров, рассмотренных в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Джекобсон, *Теория колец*. ИЛ, М. (1947).
2. Ю. Л. Ершов, *Гензелевы нормирования тел и группа SK_1* . — Мат. сб. **117(159)**, No. 1 (1982), 60–68.
3. *Алгебраическая теория чисел*. Ред. Дж. Касселс, А. Фрелих. Мир, М. (1969).
4. П. Кон, *Свободные кольца и их связи*. Мир, М. (1975).
5. С. Ленг, *Алгебра*. Мир, М. (1968).
6. Р. Пирс, *Ассоциативные алгебры*. Мир, М. (1986).
7. В. П. Платонов, *О проблеме Таннака–Артина*. — Докл. АН СССР **221**, No. 5 (1975), 1038–1041.
8. В. П. Платонов, *Проблема Таннака–Артина и группы проективных конорм*. — Докл. АН СССР **222**, No. 6 (1975), 1299–1302.
9. В. П. Платонов, *Проблема Таннака–Артина и приведенная K -теория*. — Изв. АН СССР, сер. матем., **40**, No. 2 (1976), 227–261.
10. В. П. Платонов, *Приведенная K -теория и аппроксимация в алгебраических группах*. — Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР **142** (1976), 198–207.
11. В. П. Платонов, В. И. Янчевский, *SK_1 для тел некоммутативных рациональных функций*. — Докл. АН СССР **249**, No. 5 (1979), 1064–1068.
12. А. В. Прокопчук, С. В. Тихонов, В. И. Янчевский, *Об общих элементах в группах SK_1 для центральных простых алгебр*. — Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. No. 3 (2008), 35–42.
13. А. В. Прокопчук, С. В. Тихонов, В. И. Янчевский, *О специальных свойствах тел некоммутативных рациональных функций*. — Докл. НАН Беларусі (в печати).
14. Ж.-П. Серр, *Когомологии Галуа*. Мир, М. (1968).
15. А. А. Суслин, *Алгебраическая K -теория и гомоморфизм норменного вычета*. — Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж., **25** (1984), 115–207.
16. В. И. Янчевский, *Коммутанты простых алгебр с сюръективной приведенной нормой*. — Докл. АН СССР **221**, No. 5 (1975), 1056–1058.

17. В. И. Янчевский, *Тела над геззелевыми дискретно нормированными полями и проблема Таннака–Артина*. — Докл. АН СССР **226**, No. 2 (1976), 281–283.
18. В. И. Янчевский, *Приведенная унитарная K -теория*. — Дис. на соиск. уч. ст. д. ф.-м. н., Ин-т математики АН БССР, Минск (1980).
19. S. A. Amitsur and D. Saltman, *Generic Abelian Crossed Products and p -Algebras*. — J. Algebra **51** (1978), 76–87.
20. P. Draxl and M. Kneser, (eds.), *SK_1 von Schiefkörpern*, Lecture Notes in Math. **778**, Springer-Verlag (1980).
21. P. Gille, *Le Probleme de Kneser–Tits*. — Séminaire Bourbaki 60ème année, No. 983 (2007), 1–40.
22. R. Hazrat, *Wedderburn’s Factorization Theorem, Application to Reduced K -Theory*. — Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 311–314.
23. R. Hazrat and A. R. Wadsworth, *SK_1 of graded division algebras*. — Israel J. Math., to appear, preprint available (No. 318) at: <http://www.math.uni-bielefeld.de/LAG/>.
24. A. S. Merkurjev, *Generic element in SK_1 for simple algebras*. — K-Theory **7** (1993), 1–3.
25. T. Nakayama and Y. Matsushima, *Über die multiplicative Gruppe einer p -adischen Divisionalgebra*. — Proc. Imp. Acad. Japan **19** (1943), 622–628.
26. V. P. Platonov, *Algebraic groups and reduced K -theory*. Proc. Intern. Congr. Math., Helsinki, **1** (1980), 311–323.
27. U. Rehmann, S. V. Tikhonov, and V. I. Yanchevskii, *Symbols and cyclicity of algebras after a scalar extension*. — Fundam. Prikl. Mat. **14** (6) (2008), 193–209.
28. A. A. Suslin, *SK_1 of Division Algebras and Galois Cohomology*, Algebraic K-Theory, Providence: Amer. Math. Soc., 1991, (Adv. Soviet Math.; Vol.4), 75–99.
29. A. A. Suslin, *SK_1 of Division Algebras and Galois Cohomology revisited*, Proceeding of the St. Petersburg Math. Soc., Vol. XII, 125–147, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 2006, V. 219.
30. S. Wang, *On the commutator group of a simple algebra*. — Amer. J. Math. **72** (1950), 323–334.
31. V. I. Yanchevskii, *Whitehead groups and groups of R -equivalence classes of linear algebraic groups of non-commutative classical type over some virtual fields*. — Algebraic Groups and Arithmetic (TIFR), Mumbai, (2004), 491–505.

Yanchevskii V. I. Homogeneous skew-fields of non-commutative rational functions and their reduced Whitehead groups.

A construction of skew-fields of non-commutative rational functions is studied. We discuss and prove criterions for such skew-fields to be homogeneous and finite-dimensional over their centers and describe relations between some objects defined in terms of the skew-fields of constants, which help to compute reduced Whitehead groups of corresponding skew-fields of non-commutative rational functions. In particular we present a proof of one previous result of V. P. Platonov and the author about reduced

Whitehead groups of skew-fields of non-commutative rational functions announced in 1979 and obtain in non-Henselian case of such skew-fields analogues of all results of Yu. L. Ershov for Henselian situation.

Институт математики НАН Беларуси
E-mail: `yanch@im.bas-net.by`

Поступило 2 апреля 2011 г.