Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости. III

В. Ф. Жданович (Минск)

В первой части работы для смешанной задачи, состоящей из гиперболической в узком смысле по И. Г. Петровскому (см. [1], стр. 81) системы

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+B(x)u(x,t) \tag{1}$$

$(0\leqslant x\leqslant l;\ 0\leqslant t\leqslant T)$, невырожденных (см. [5], §1) краевых условий

$$M\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}+Nu(0,t)+P\frac{\partial u(l,t)}{\partial t}+Qu(l,t)=0 \tag{2}$$

и начальных условий

$$u(x,0)=f(x), \tag{3}$$

где $f(x)\in D_2(0,l)$ *, подробно описано построение методом разделения переменных формального решения задачи (1), (2), (3). Если $\{\lambda_s\}$ $(s=0,\pm 1,\ldots)$ — последовательность нулей характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ для параметрической задачи

$$A(x)y'(x)+B(x)y(x)=\lambda y(x),\quad (M\lambda+N)y(0)+(P\lambda+Q)y(l)=0, \tag{4}$$

получающейся из задачи (1), (2) после разделения переменных, $\{k_s\}$ $(s=0,\pm 1,\ldots)$ — кратности этих нулей и $\{p_s\}$ $(s=0,\pm 1,\ldots)$ — кратности собственных значений λ_s параметрической задачи (4), то показано, что это формальное решение представляет собой ряд

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_{nk_s}^{(s)}(x)\,e^{I_s t}a_s \tag{5}$$

(см. [5], формула (168)), где прямоугольная матрица $Y_{nk_s}^{(s)}(x)$ имеет своими столбцами собственные и присоединенные функции задачи (4) для собственного значения λ_s, где в квазидиагональной матрице

$$I_s=\left\|\begin{matrix} J_{m_1^{(s)}}(\lambda_s) & 0 & \ldots & 0\\ 0 & J_{m_2^{(s)}}(\lambda_s) & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & J_{m_{p_s}^{(s)}}(\lambda_s)\end{matrix}\right\| \tag{6}$$

* Относительно определения пространства $D_2(0,l)$ см. [5], § 2.

вдоль диагонали расположены жордановы клетки

$$J_{m_i^{(s)}}(\lambda_s)=\begin{Vmatrix} \lambda_s & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_s & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_s \end{Vmatrix},$$

причем $m_i^{(s)}$ $(i=1, 2, \dots, p_s)$ — кратности p_s линейно независимых собственных функций задачи (4) для собственного значения $\lambda=\lambda_s$, и где вектор a_s строится по формуле

$$a_s=[f(x), Z_{nk_s}^{(s)}(x)B_s^{*\,-1}]=\int_0^l B_s^{-1}Z_{nk_s}^{(s)\,*}(\xi)f(\xi)\,d\xi -$$
$$-B_s^{-1}[RZ_{nk_s}^{(s)}(0)+VZ_{nk_s}^{(s)}(l)]^*[Mf(0)+Pf(l)], \tag{7}$$

в которой $Z_{nk_s}^{(s)}(x)$ есть матрица, аналогичная матрице $Y_{nk_s}^{(s)}(x)$, но только построенная из собственных и присоединенных функций параметрической задачи, сопряженной задаче (4), а $B_s=[Y_{nk_s}^{(s)}(x), Z_{nk_s}^{(s)}(x)]$.

В настоящей третьей части работы будет исследована сходимость ряда (5) в том случае, когда краевые условия (2) регулярны (см. [6], § 2), а матрицы $A(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ и $B(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ удовлетворяют всем требованиям, наложенным на них во введении к первой части работы. Кроме того, в этом случае будут получены дополнительные условия, которые нужно наложить на функцию $f(x)\in D_2(0, l)$, чтобы сумма ряда (5) была классическим или обобщенным в смысле С. Л. Соболева решением задачи (1), (2), (3).*

§ 1. Сходимость формального решения

Введем банахово пространство $M_2(\Omega)$. Функция $f(x, t)$, заданная на прямоугольнике $\Omega=[0\leqslant x\leqslant l;\ 0\leqslant t\leqslant T]$, принадлежит пространству $M_2(\Omega)$, если для каждого $t\in[0, T]$ функция

$$\zeta(t)=\|f(x,t)\|^2_{D_2(0,l)}=\int_0^l\|f(\xi,t)\|^2d\xi+\|Mf(0,t)+Pf(l,t)\|^2$$

определена и непрерывна.

Норму в пространстве $M_2(\Omega)$ определим формулой

$$\|f(x,t)\|^2_{M_2(\Omega)}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left\{\int_0^l\|f(\xi,t)\|^2d\xi+\|Mf(0,t)+Pf(l,t)\|^2\right\}; \tag{8}$$

тождественность функций в пространстве $M_2(\Omega)$ определяется в соответствии с этой нормой.

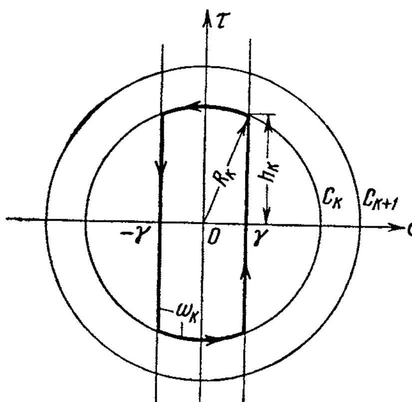
---

* Замечание при корректуре. Уже после сдачи в печать работ [5], [6] и настоящей работы А. Д. Мышкис обратил мое внимание на работу М. Л. Расулова [7]. Кроме того, после выхода в свет работы [5] появилась работа [8] того же автора. В этих работах изучается близкий к методу Фурье вычетный метод Коши решения смешанных задач для систем более общего вида, чем система (1). Поскольку содержание работ [5], [6] и настоящей работы пересекается во многих точках с работами М. Л. Расулова [7], [8] (на что любезно указал мне автор) и поскольку это не было отмечено своевременно, я считаю своим долгом сделать это сейчас.

Пространство $M_2(\Omega)$ — полное. В самом деле, если для последовательности $\{f_k(x,t)\}$ $(k=1,2,\ldots)$ $(f_k(x,t)\in M_2(\Omega))$ и любых $k>k_0(\varepsilon)$ выполняются неравенства $\|f_k(x,t)-f_{k+p}(x,t)\|_{M_2(\Omega)}<\varepsilon$ $(p=1,\ 2,\ldots)$, то для каждого $t\in[0,T]$

$$\|f_k(x,t)-f_{k+p}(x,t)\|_{D_2(0,l)}<\varepsilon \tag{9}$$

$(k>k_0(\varepsilon);\ p=1,\ 2,\ \ldots)$. А это значит, что для каждого $t\in[0,T]$ существует, в силу полноты пространства $D_2(0,l)$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x,t)=f(x,t)\in D_2(0,l)$. Переходя в неравенстве (9) к пределу, получим для $k>k_0(\varepsilon)$ $\|f_k(x,t)-f(x,t)\|_{D_2(0,l)}<\varepsilon$ или $\|f_k(x,t)-f(x,t)\|_{D_2(0,l)}<\frac{\varepsilon}{4}$ для $k>k_0\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$, откуда следует, что для $k>k_0\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)$, $t\in[0,\ T]$ равномерно по t $\xi_k(t)-\frac{\varepsilon}{4}<$ $<\xi(t)<\xi_k(t)+\frac{\varepsilon}{4}$, где $\xi_k(t)=\|f_k(x,t)\|_{D_2(0,l)}$ и $\xi(t)=\|f(x,\ t)\|_{D_2(0,l)}$. Так как функция $\xi_k(t)$ непрерывна на сегменте $[0,T]$, то для $t=t_0$ и $|\Delta t|<\delta(\varepsilon)$ $|\xi(t_0+\Delta t)-\xi(t_0)|<|\xi_k(t_0+\Delta t)-\xi_k(t_0)|+$ $+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$, т.е. функция $\xi(t)=\|f(x,t)\|_{D_2(0,l)}$ непрерывна и $f(x,t)\in M_2(\Omega)$. Полнота $M_2(\Omega)$ доказана.



Фиг. 1

В настоящем параграфе будет исследована сходимость ряда (5) в пространстве $M_2(\Omega)$. Это исследование будет проводиться на основании известной теоремы Планшереля (см. [2], стр. 93 или [3], стр. 273). Для того чтобы иметь возможность применить эту теорему к исследованию сходимости ряда (5), преобразуем этот ряд, пользуясь доказанной в [6] леммой 11. Эти преобразования, а также некоторые предварительные замечания, изложим в виде ряда лемм.

Лемма 1. *Пусть краевые условия* (2) *регулярны. Тогда если* $|\mathscr{R}\lambda|\leqslant\gamma$ — *достаточно широкая полоса на комплексной плоскости* λ, *содержащая все собственные значения параметрической задачи* (4), *а* $\{C_k\}$ $(k=1,2,\ldots)$ — *произвольная последовательность концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусами* R_k $(k=1,2,\ldots)$, *удовлетворяющая условиям леммы* 12 *из* [6], *то частичную сумму* $u^{(k)}(x,t)$ *ряда* (5), *состоящую из членов, соответствующих тем собственным значениям* λ_s $(s=0,\pm 1,\ldots)$ *задачи* (4), *которые лежат внутри окружности* C_k, *можно представить в виде*

$$u^{(k)}(x,t)=\sum_{r=1}^{k}\left(\sum_{s}{}^{(r)}\,Y^{(s)}_{nk_s}(x)\,e^{l_s t}\,a_s\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_k} Y(x,\lambda)\,D_0^{-1}(\lambda)\,e^{\lambda t}\,h_0(\lambda,f)\,d\lambda, \tag{10}$$

где s *во внутренней сумме слева пробегает те номера собственных значений* λ_s $(s=0,\pm 1,\ldots)$, *которые лежат между окружностями* C_{r-1} *и*

C_r (*при* $r=1$ *окружность* C_{r-1} *отсутствует*), *где справа через* ω_k *обозначен контур криволинейного четырехугольника* $[|\mathscr{R}\lambda|\leqslant\gamma, |\lambda|\leqslant R_k]$, *вырезаемого окружностью* C_k *из полосы* $|\mathscr{R}\lambda|\leqslant\gamma$ (см. фиг. 1), *а*

$$h_0(\lambda, f) = -\left(M_0 + \frac{1}{\lambda}N_0\right) Y(0,\lambda)\int_0^l Y^{-1}(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi + \frac{Mf(0)+Pf(l)}{\lambda} \tag{11}$$

и

$$D_0(\lambda) = \left(M_0 + \frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\lambda) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda}Q_0\right)Y(l,\lambda),$$

причем матрицы M_0, P_0, N_0 *и* Q_0 *строятся по формулам* (37) *из* [6], *а матрица* $Y(x,\lambda)$ *и число* γ — *те же, что и в теореме* 1 *из* [6].

Доказательство. Из свойств билинейной формы $[f(x), g(x)]$ ($f(x)\in D_2(0,l)$, $g(x)\in D_2^*(0,l)$; см. [5], § 2) следует, что

$$\begin{aligned} Y_{nk_s}^{(s)}(x)e^{l_s t}a_s &= Y_{nk_s}^{(s)}(x)e^{l_s t}[f(\xi), Z_{nk_s}^{(s)}(\xi)B_s^{*\,-1}] = \\ &= [f(\xi), Z_{nk_s}^{(s)}(x)B_s^{*\,-1}e^{l_s^* t}Y_{nk_s}^{(s)*}(x)] = \\ &= [f(\xi), \{Y_{nk_s}^{(s)}(x)e^{l_s t}B_s^{-1}Z_{nk_s}^{(s)*}(\xi)\}^*] \quad (s=0,\pm 1,\ldots). \end{aligned} \tag{12}$$

Но, согласно лемме 11 из [6],

$$Y_{nk_s}^{(s)}(x)e^{l_s t}B_s^{-1}Z_{nk_s}^{(s)*}(\xi) = -\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_s} G(x,\xi,\lambda)e^{\lambda t}, \tag{13}$$

а потому

$$Y_{nk_s}^{(s)}(x)e^{l_s t}a_s = -[f(\xi), \{\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_s} G(x,\xi,\lambda)e^{\lambda t}\}^*]. \tag{14}$$

Исходя из этого, частичную сумму $u^{(k)}(x,t)$ ряда (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x,t) &= -\sum_{r=1}^{k}\left(\sum_s^{(r)}[f(\xi), \{\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_s} G(x,\xi,\lambda)e^{\lambda t}\}^*]\right) = \\ &= -\left[f(\xi), \left\{\sum_{r=1}^{k}\left(\sum_s^{(r)}\operatorname*{выч}_{\lambda=\lambda_s} G(x,\xi,\lambda)e^{\lambda t}\right)\right\}^*\right] = \\ &= -\left[f(\xi), \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_k} G(x,\xi,\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right\}^*\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Подставим сюда вместо $G(x,\xi,\lambda)$ его выражение

$$G(x,\xi,\lambda) = Y(x,\lambda)D^{-1}(\lambda)(M\lambda+N)Y(0,\lambda)Y^{-1}(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi) + H(x,\xi,\lambda) \tag{16}$$

(см. [6], § 3, формула (133)). Здесь $H(x,\xi,\lambda)$ — целая аналитическая функция λ для $x\neq\xi$ ($0\leqslant x\leqslant l$; $0\leqslant\xi\leqslant l$), а потому $\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_k} H(x,\xi,\lambda)e^{\lambda t}d\lambda = 0$, и из равенства (15) получим:

$$u^{(k)}(x,t)=-\left[f(\xi),\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_k}Y(x,\lambda)D^{-1}(\lambda)(M\lambda+N)Y(0,\lambda)Y^{-1}(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi)\,e^{\lambda t}d\lambda\right\}^*\right]=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_k}Y(x,\lambda)D^{-1}(\lambda)(M\lambda+N)Y(0,\lambda)e^{\lambda t}[f(\xi),A^{*\,-1}(\xi)Y^{*\,-1}(\xi,\lambda)]d\lambda. \quad (17)$$

Преобразуем подынтегральное выражение. Имеем:

$$D^{-1}(\lambda)(M\lambda+N)Y(0,\lambda)[f(\xi),A^{*\,-1}(\xi)Y^{*\,-1}(\xi,\lambda)]=$$

$$=D^{-1}(\lambda)(M\lambda+N)Y(0,\lambda)\int\limits_0^l Y^{-1}(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi+F(\lambda), \quad (18)$$

где

$$F(\lambda)=-D^{-1}(\lambda)(M\lambda+N)Y(0,\lambda)[Y^{-1}(0,\lambda)A^{-1}(0)R^*+$$
$$+Y^{-1}(l,\lambda)A^{-1}(l)V^*][Mf(0)+Pf(l)].$$

Из тождества

$$D^{-1}(\lambda)(M\lambda+N)Y(0,\lambda)=-D^{-1}(\lambda)(P\lambda+Q)Y(l,\lambda)+E$$

следует, что

$$F(\lambda)=-D^{-1}(\lambda)[(M\lambda+N)A^{-1}(0)R^*-$$
$$-(P\lambda+Q)A^{-1}(l)V^*][Mf(0)+Pf(l)]-Y^{-1}(l,\lambda)A^{-1}(l)V^*[Mf(0)+Pf(l)].$$

Так как согласно равенствам (31) из [5]

$$MA^{-1}(0)R^*-PA^{-1}(l)V^*=0 \text{ и } NA^{-1}(0)R^*-QA^{-1}(l)V^*=E_q,$$

где матрица E_q получается из единичной матрицы заменой последних $n-q$ единиц по диагонали нулями, то

$$[(M\lambda+N)A^{-1}(0)R^*-(P\lambda+Q)A^{-1}(l)V^*][Mf(0)+Pf(l)]=$$
$$=E_q[Mf(0)+Pf(l)]=Mf(0)+Pf(l)$$

и, следовательно,

$$F(\lambda)=-D^{-1}(\lambda)[Mf(0)+Pf(l)]-Y^{-1}(l,\lambda)A^{-1}(l)V^*[Mf(0)+Pf(l)].$$

Подставляя это выражение в равенство (18), а потом в формулу (17), получим:

$$u^{(k)}(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_k}[Y(x,\lambda)D^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}h(\lambda,f)]\,d\lambda+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_k}Y(x,\lambda)e^{\lambda t}Y^{-1}(l,\lambda)A^{-1}(l)V^*[Mf(0)+Pf(l)], \quad (19)$$

где

$$h(\lambda,f)=-(M\lambda+N)Y(0,\lambda)\int\limits_0^l Y^{-1}(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi+[Mf(0)+Pf(l)]. \quad (20)$$

Так как подынтегральная функция во втором интеграле выражения (19) есть целая аналитическая функция λ для каждого (x,t) $(0\leqslant x\leqslant l;\ 0\leqslant t\leqslant T)$, то этот интеграл равен нулю, и мы получаем следующее представление частичной суммы $u^{(k)}(x,t)$ ряда (5):

$$u^{(k)}(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_k} Y(x,\lambda)\,D^{-1}(\lambda)\,e^{\lambda t}\,h(\lambda,f)\,d\lambda. \tag{21}$$

Для того чтобы получить формулу (10), представим матрицу $D(\lambda)$ в виде

$$D(\lambda)=\mathscr{E}(\lambda)\,D_0(\lambda),$$

где

$$D_0(\lambda)=\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\lambda)+\left(P_0+\frac{1}{\lambda}Q_0\right)Y(l,\lambda)$$

и $\mathscr{E}(\lambda)$ — диагональная матрица, имеющая на первых q местах по диагонали ($q=\operatorname{rang}\|M,P\|$) числа λ, а на остальных $n-q$ местах — единицы. Матрицы M_0, P_0, N_0 и Q_0 строятся из матриц M, N, P и Q по формулам (37) из [6]. Подставляя $D^{-1}(\lambda)=D_0^{-1}(\lambda)\,\mathscr{E}^{-1}(\lambda)$ в формулу (21), как раз и получим формулу (10), причем

$$h_0(\lambda,f)=\mathscr{E}^{-1}(\lambda)\,h(\lambda,f)=$$

$$=-\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\lambda)\int\limits_0^l Y^{-1}(\xi,\lambda)\,A^{-1}(\xi)\,f(\xi)\,d\xi+\frac{Mf(0)+Pf(l)}{\lambda}.$$

Лемма доказана.

Замечание. Идея представления частичной суммы ряда (5) в виде суммы вычетов, а потом в виде контурного интеграла, содержит в своей основе идею известного метода Коши решения с помощью теории вычетов смешанных задач для дифференциальных уравнений математической физики (см. [4], стр. 261, а также [7], [8]).

Изучим более подробно выражение $h_0(\lambda,f)$ как функцию λ в полосе $|\mathscr{R}\lambda|\leqslant\gamma$, где γ — число из леммы 1.

Лемма 2. *Если* $|\tau|\to+\infty$, *то для любой функции* $f(x)\in D_2(0,\,l)$ *функция* $\psi(\sigma,\tau)=\|h_0(\sigma+i\tau,\,f)\|\to 0$ *равномерно относительно* σ $(-\gamma\leqslant\sigma\leqslant\gamma)$.

Доказательство. Из асимптотической формулы

$$Y(x,\lambda)=\left[K(x)+\frac{H_0(x,\lambda)}{\lambda}\right]e^{\lambda\int\limits_0^x \Lambda^{-1}(\zeta)\,d\zeta} \tag{22}$$

$(0\leqslant x\leqslant l;\ |\mathscr{R}\lambda|\leqslant\gamma)$ (см. [6], § 1) и формулы (11) следует, что

$$h_0(\lambda,f)=-M_0Y(0,\lambda)\int\limits_0^l Y^{-1}(\xi,\lambda)\,A^{-1}(\xi)\,f(\xi)\,d\xi+O\left(\frac{1}{\lambda}\right)=$$

$$=-M_0K(0)\int\limits_0^l e^{-\lambda\int\limits_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)d\zeta}K^{-1}(\xi)\,A^{-1}(\xi)\,f(\xi)\,d\xi+O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \tag{23}$$

$$(|\mathscr{R}\lambda|\leqslant\gamma).$$

А это значит, что для доказательства леммы достаточно доказать, что при $|\tau| \to +\infty$ и $|\sigma| < \gamma$

$$h_1(\lambda, f) = \int_0^l e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} f_1(\xi)\, d\xi \to 0$$

равномерно относительно σ ($|\sigma| \leqslant \gamma$) (здесь $f_1(\xi) = K^{-1}(\xi) A^{-1}(\xi) f(\xi)$). Для этого при заданном $\varepsilon > 0$ выберем непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi(\xi)$ ($0 \leqslant \xi \leqslant l$) так, чтобы она для $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$ удовлетворяла неравенству

$$\left\| \int_0^l e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} [f_1(\xi) - \varphi(\xi)]\, d\xi \right\| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{24}$$

и произведем разложение

$$h_1(\lambda, f) = \int_0^l e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} f_1(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_0^l e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} [f_1(\xi) - \varphi(\xi)]\, d\xi + \int_0^l e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{25}$$

Второе слагаемое в этом разложении преобразуем интегрированием по частям:

$$\int_0^l e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} \varphi(\xi)\, d\xi = -\frac{1}{\lambda} \int_0^l \left[\frac{d}{d\xi} e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} \right] \Lambda(\xi) \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} \Lambda(\xi)\varphi(\xi) \Big|_0^l + \frac{1}{\lambda} \int_0^l e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} \frac{d}{d\xi} [\Lambda(\xi)\varphi(\xi)]\, d\xi.$$

Если $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$, а $|\tau| \to \infty$, то

$$\left\| \int_0^l e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} \varphi(\xi)\, d\xi \right\| < \frac{1}{|\lambda|} \left\| e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} \Lambda(\xi)\varphi(\xi) \Big|_0^l \right\| +$$

$$+ \frac{1}{|\lambda|} \left\| \int_0^l e^{-\lambda \int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} \frac{d}{d\xi} [\Lambda(\xi)\varphi(\xi)]\, d\xi \right\| < \frac{2\varepsilon}{3}. \tag{26}$$

Из неравенств (24) и (26) и равенства (25) следует, в силу произвольности ε, что $h_1(\sigma + i\tau, f) \to 0$ равномерно относительно σ ($|\sigma| \leqslant \gamma$) при $|\tau| \to \infty$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Функции* $\varphi_-(\tau) = h_0(-\gamma + i\tau, f)$ *и* $\varphi_+(\tau) = h_0(\gamma + i\tau, f)$ $(-\infty < \tau < +\infty)$ *для любой функции* $f(x) \in D_2(0, l)$ *принадлежат пространству* $L_2(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что функции $\frac{1}{-\gamma+i\tau}$ и $\frac{1}{\gamma+i\tau}$ $(-\infty<\tau<+\infty;\ \gamma>0)$ принадлежат пространству $L_2(-\infty,\ \infty)$, а потому этому пространству принадлежит всякая функция $\frac{1}{\pm\gamma+i\tau}F\ (\pm\gamma+i\tau)$ $(-\infty<\tau<+\infty,\ \gamma>0)$, где функция $F(\pm\gamma+i\tau)$ $(-\infty<\tau<+\infty)$ ограничена. Имея это в виду и пользуясь асимптотической формулой (22), представим $h_0(\lambda,\ f)$ в виде

$$h_0(\lambda,\ f)=-M_0Y(0,\lambda)\int_0^l Y^{-1}(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{\lambda}\left[N_0Y(0,\lambda)\int_0^l Y^{-1}(\xi,\lambda)A^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi-Mf(0)-Pf(l)\right]=$$

$$=-M_0K(0)\int_0^l e^{-\lambda\int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\,d\zeta}K^{-1}(\xi)A^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi+\frac{F_1(\lambda)}{\lambda},\tag{27}$$

где матрица $F_1(\lambda)$ — аналитическая и ограниченная функция λ для $\lambda=\pm\gamma+$ $+i\tau$ $(-\infty<\tau<+\infty,\ \gamma>0)$. Тогда для доказательства леммы достаточно доказать, что принадлежит пространству $L_2(-\infty,\infty)$ функция

$$\psi(\tau)=\int_0^l e^{-(\pm\gamma+i\tau)\int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\,d\zeta}K^{-1}(\xi)A^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi=\int_0^l e^{-i\tau\int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\,d\zeta}g(\xi)\,d(\xi),\tag{28}$$

где $g(\xi)=e^{\pm\gamma\int_0^\xi \Lambda^{-1}(\zeta)\,d\zeta}K^{-1}(\xi)A^{-1}(\xi)f(\xi)$, а это значит, что нужно доказать, что $\int_{-\infty}^{+\infty}\|\psi(\tau)\|^2d\tau<+\infty$.

Пусть $\psi(\tau)=\left\|\begin{matrix}\psi_1(\tau)\\ \cdots\\ \psi_n(\tau)\end{matrix}\right\|$ и $g(\xi)=\left\|\begin{matrix}g_1(\xi)\\ \cdots\\ g_n(\xi)\end{matrix}\right\|$ $(-\infty<\tau<\infty;\ 0\leqslant\xi\leqslant l)$. Тогда из формулы (28) получим, что

$$\psi_m(\tau)=\int_0^l e^{-i\tau\int_0^\xi \nu_m^{-1}(\zeta)\,d\zeta}g_m(\xi)\,d\xi\qquad(m=1,\ 2,\dots,n),\tag{29}$$

где $\nu_m(\xi)$ $(0\leqslant\xi\leqslant l)$ — диагональные элементы матрицы $\Lambda(\xi)$. Докажем, что $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_m(\tau)|^2d\tau<+\infty$ $(m=1,\ 2,\dots,n)$. Для этого в каждом из интегралов (29) сделаем замену

$$\eta_m=\int_0^\xi \nu_m^{-1}(\zeta)\,d\zeta\qquad(0\leqslant\xi\leqslant l).\tag{30}$$

Пусть $\xi = x_m(\eta_m)$, где η_m принадлежит отрезку T_m с концами 0 и $l_m = \int\limits_0^l \nu_m^{-1}(\xi)\,d\xi$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, — функции, обратные функциям (30). Так как функции (30) монотонны и имеют сохраняющую знак непрерывную производную, то такими же свойствами обладают и функции $\xi = x_m(\eta_m)$. При этом из формул (30) и равенств (29) получим, что

$$\psi_m(\tau) = \int\limits_0^{l_m} e^{-i\tau\eta_m}\, g_m[x_m(\eta_m)]\,\nu_m[x_m(\eta_m)]\,d\eta_m \tag{31}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n; \quad l_m = \int\limits_0^l \nu_m^{-1}(\xi)\,d\xi).$$

Построим функции $\bar{g}_m(\eta_m)$ $(-\infty < \eta_m < +\infty;\ m = 1, 2, \ldots, n)$ по формулам

$$\bar{g}_m(\eta_m) = \begin{cases} 0 & \text{вне } T_m, \\ g_m[x_m(\eta_m)]\,\nu_m[x_m(\eta_m)] & \text{на } T_m. \end{cases} \tag{32}$$

Эти функции, очевидно, принадлежат пространству $L_2(-\infty, \infty)$. Из формул (31) и (32) следует, что для любых достаточно больших R_1 и R_2

$$\psi_m(\tau) = \int\limits_{-R_1}^{R_2} e^{-i\tau\eta_m}\bar{g}(\eta_m)\,d\eta_m \quad (-\infty < \tau < +\infty;\ m = 1, 2, \ldots, n). \tag{33}$$

Но тогда из теоремы Планшереля получим, что $\psi_m(\tau) \in L_2(-\infty, \infty)$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_m(\tau)|^2\,d\tau < +\infty \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

А это значит, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\psi(\tau)\|^2\,d\tau = \sum_{m=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_m(\tau)|^2\,d\tau < +\infty.$$

Лемма доказана.

Замечание. Применяя равенство Парсеваля, легко доказать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \|\psi(\tau)\|^2\,d\tau \leqslant K \int\limits_0^l \|f(x)\|^2\,dx,$$

а отсюда, — что

$$\int\limits_{\pm\gamma - i\infty}^{\pm\gamma + i\infty} \|h_0(\lambda, f)\|\,|d\lambda| \leqslant K_1 \left(\int\limits_0^l \|f(x)\|^2\,dx + \|f(0)\|^2 + \|f(l)\|^2\right),$$

где K и K_1 не зависят от выбора f.

Лемма 4. *Если* $\psi(\tau) \in L_2(-\infty, \infty)$, *то интегралы*

$$\begin{aligned} u^+(x, t, a, b) &= \int\limits_{-a}^{b} Y(x, \gamma + i\tau)\,e^{(\gamma + i\tau)t}\,\psi(\tau)\,d\tau, \\ u^-(x, t, a, b) &= \int\limits_{-a}^{b} Y(x, -\gamma + i\tau)\,e^{(-\gamma + i\tau)t}\,\psi(\tau)\,d\tau \end{aligned} \tag{34}$$

при $a \to +\infty$ и $b \to +\infty$ сходятся по норме пространства $L_2(0, l)$ равномерно относительно $t \in [0, T]$; точнее: существуют функции $u^+(x, t) \in L_2(0, l)$, $u^-(x, t) \in L_2(0, l)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, для которых при $a \to +\infty$ и $b \to +\infty$

$$\int_0^l \|u^+(x, t, a, b) - u^+(x, t)\|^2 dx \to 0,$$
$$\int_0^l \|u^-(x, t, a, b) - u^-(x, t)\|^2 dx \to 0 \tag{35}$$

равномерно относительно $t \in [0, T]$.

Доказательство. Проведем доказательство леммы для первого из интегралов (35). Для этого воспользуемся асимптотической формулой (см. [6], формула (15))

$$Y(x, \lambda) = \left[K(x) + \frac{H_0(x, \lambda)}{\lambda}\right] e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} =$$
$$= K(x) e^{\lambda \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta} + \frac{\overline{H}(x, \lambda)}{\lambda} \tag{36}$$

$(|\mathcal{R}\lambda| \leqslant \gamma)$, где $\overline{H}(x, \lambda)$ — аналитическая и равномерно ограниченная функция λ $(|\mathcal{R}\lambda| \leqslant \gamma)$ для каждого $x \in [0, l]$. Имеем:

$$u^+(x, t, a, b) = \int_{-a}^{b} Y(x, \gamma + i\tau) e^{(\gamma+i\tau)t} \psi(\tau)\, d\tau =$$
$$= K(x) e^{\gamma\left[tE + \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta\right]} \int_{-a}^{b} e^{i\tau\left[tE + \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta\right]} \psi(\tau)\, d\tau +$$
$$+ \int_{-a}^{b} \frac{\overline{H}(x, \gamma + i\tau) e^{(\gamma+i\tau)t}}{\gamma + i\tau} \psi(\tau)\, d\tau. \tag{37}$$

Так как функция $\overline{H}(x, \gamma + i\tau) e^{(\gamma+i\tau)t}$ $(0 \leqslant x \leqslant l; 0 \leqslant t \leqslant T; -\infty < \tau < +\infty)$ равномерно ограничена, а функции $\frac{1}{\gamma + i\tau}$ и $\psi(\tau)$ $(-\infty < \tau < +\infty)$ принадлежат пространству $L_2(-\infty, \infty)$, то интеграл, представляющий второе слагаемое в выражении (37), сходится равномерно относительно (x, t) $(0 \leqslant x \leqslant l; 0 \leqslant t \leqslant T)$ при $a \to +\infty$ и $b \to +\infty$, и, следовательно, он сходится по норме пространства $L_2(0, l)$ равномерно относительно $t \in [0, T]$. Сходимость же интеграла $\int_{-a}^{b} e^{i\tau\left[tE + \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta\right]} \psi(\tau)\, d\tau$ по норме пространства $L_2(0, l)$ следует из теоремы Планшереля. В самом деле, если

$$\psi(\tau) = \left\| \begin{matrix} \psi_1(\tau) \\ \cdots \\ \psi_n(\tau) \end{matrix} \right\|,$$

то

$$\int_{-a}^{b} e^{i\tau\left[tE+\int_0^x \Delta^{-1}(\zeta)\,d\zeta\right]}\psi(\tau)\,d\tau = \left\| \begin{array}{c} \int_{-a}^{b} e^{i\tau\left(t+\int_0^x \nu_1^{-1}(\zeta)\,d\zeta\right)}\psi_1(\tau)\,d\tau \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_{-a}^{b} e^{i\tau\left(t+\int_0^x \nu_n^{-1}(\zeta)\,d\zeta\right)}\psi_n(\tau)\,d\tau \end{array} \right\|.$$

Но

$$\int_{-a}^{b} e^{i\tau\left(t+\int_0^x \nu_m^{-1}(\zeta)\,d\zeta\right)}\psi_m(\tau)\,d\tau = \int_{-a}^{b} e^{i\tau(\eta_m+t)}\psi_m(\tau)\,d\tau,$$

где $\eta_m = \int_0^x \nu_m^{-1}(\zeta)\,d\zeta$ $(m=1, 2, \ldots, n)$, а потому, в силу теоремы Планшереля, существует функция $\varphi_m(\eta_m+t)$ $(-\infty<\eta_m+t<+\infty)$, принадлежащая пространству $L_2(-\infty, \infty)$, такая, что для достаточно больших $a>0$ и $b>0$ при всех $t\in[0, T]$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_m(\eta_m+t) - \int_{-a}^{b} e^{i\tau(\eta_m+t)}\psi_m(\tau)\,d\tau\right|^2 d\eta_m < \varepsilon \tag{38}$$

$$(m=1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда следует, что

$$\left|\int_0^{l_m} \left|\varphi_m(\eta_m+t) - \int_{-a}^{b} e^{i\tau(\eta_m+t)}\psi_m(\tau)\,d\tau\right|^2 d\eta_m\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_m(\eta_m+t) - \int_{-a}^{b} e^{i\tau(\eta_m+t)}\psi_m(\tau)\,d\tau\right|^2 d\eta_m < \varepsilon \tag{39}$$

$$\left(m=1, 2, \ldots, n;\ l_m = \int_0^l \nu_m^{-1}(\zeta)\,d\zeta;\ -\infty<\tau<+\infty\right).$$

Но так как $d\eta_m = \nu_m^{-1}(x)\,dx$, то

$$\left|\int_0^{l_m} \left|\varphi_m(\eta_m+t) - \int_{-a}^{b} e^{i\tau(\eta_m+t)}\psi_m(\tau)\,d\tau\right|^2 d\eta_m\right| =$$

$$= \left|\int_0^{l} \left|\varphi_m\left[t+\int_0^x \nu_m^{-1}(\xi)\,d\xi\right] - \int_{-a}^{b} e^{i\tau\left[t+\int_0^x \nu_m^{-1}(\zeta)\,d\zeta\right]}\psi_m(\tau)\,d\tau\right|^2 \nu_m^{-1}(x)\,dx\right| \geqslant$$

$$\geqslant m_0 \int_0^{l} \left|\varphi_m\left[t+\int_0^x \nu_m^{-1}(\zeta)\,d\zeta\right] - \int_{-a}^{b} e^{i\tau\left[\int_0^x \nu_m^{-1}(\zeta)\,d\zeta+t\right]}\psi_m(\tau)\,d\tau\right|^2 dx, \tag{40}$$

где $m_0 = \min |\nu_m^{-1}(x)|$ $(0 \leqslant x \leqslant l;\ m = 1, 2, \ldots, n)$. Из неравенств (39) и (40) получим:

$$\int_0^l \left| \varphi_m \left(t + \int_0^x \nu_m^{-1}(\zeta) d\zeta \right) - \int_{-a}^b e^{i\tau \left[t + \int_0^x \nu_m^{-1}(\zeta)\, d\zeta \right]} \psi_m(\tau)\, d\tau \right|^2 dx < \frac{\varepsilon}{m_0}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n;\ 0 \leqslant t \leqslant T).$$

В силу произвольности ε сходимость интегралов $\int_{-a}^b e^{i\tau \left[t + \int_0^x \nu_m^{-1}(\zeta)\, d\zeta \right]} \psi_m(\tau) d\tau$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$, а вместе с ними и интеграла $\int_{-a}^b e^{i\tau \left[tE + \int_0^x \Lambda^{-1}(\zeta)\, d\zeta \right]} \psi(\tau)\, d\tau$, очевидна. Тогда из представления (37) следует равномерная относительно $t \in [0, T]$ сходимость интеграла $u^+(x, t, a, b)$ по норме пространства $L_2(0, l)$. Так как доказательство сходимости интеграла $u^-(x, t, a, b)$ вполне аналогично, то лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть краевые условия* (2) *регулярны и пусть*

$$\begin{aligned} F_k^+(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k^+} Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} h_0(\lambda, f)\, d\lambda, \\ F_k^-(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k^-} Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} h_0(\lambda, f)\, d\lambda \end{aligned} \tag{41}$$

$$(k = 1, 2, \ldots),$$

где C_k^+ и C_k^- — верхняя и нижняя дуги окружности C_k, входящие в состав контура ω_k (см. фиг. 1). *Тогда для любой функции $f(x) \in D_2(0, l)$ и $k \to \infty$ вектор-функции $F_k^+(x, t) \to 0$, $F_k^-(x, t) \to 0$ равномерно относительно $(x, t) \in \Omega$.*

Доказательство. Из леммы 5 работы [6] следует, что в некоторой δ-окрестности дуг C_k^+ и C_k^- $(k = 1, 2, \ldots)$ имеет место неравенство $|\Delta_0(\lambda)| > m(\delta) > 0$, а это значит, что в этой окрестности функция $D_0^{-1}(\lambda) = \frac{D'_0(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}$ ограничена. Из леммы 2 и ограниченности матрицы $Y(x, \lambda)$ $(0 \leqslant x \leqslant l;\ |\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma)$ тогда следует, что подынтегральные функции интегралов $F_k^+(x, t)$ и $F_k^-(x, t)$ при $k \to \infty$ стремятся равномерно к нулю. Так как при этом длины дуг C_k^+ и C_k^- $(k = 1, 2, \ldots)$ остаются равномерно ограниченными, то это доказывает лемму 5.

Установленные леммы дают возможность легко доказать следующую основную теорему настоящего параграфа.

Теорема 1. *Если краевые условия* (2) *регулярны и $f(x) \in D_2$ $(0, l)$, то ряд* (5) *сходится по норме пространства $M_2(\Omega)$ при некоторой (а именно, такой как и в теореме разложения* 6 *из* [6]) *группировке его членов.*

Доказательство. Пользуясь леммой 1, частичную сумму $u^{(k)}(x, t)$ ряда (5) представим в виде (10). Интеграл по контуру ω_k разложим на четыре интеграла, соответствующие четырем гладким кускам этого контура: двум вертикальным хордам окружности C_k: $[\mathcal{R}\lambda = -\gamma;\ -h_k \leqslant \mathcal{I}\lambda \leqslant h_k]$ и $[\mathcal{R}\lambda = \gamma;\ -h_k \leqslant \mathcal{I}\lambda \leqslant h_k]$, и дугам C_k^+ и C_k^-. Получим:

$$u^{(k)}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-h_k}^{h_k} \left[Y(x, \gamma + i\tau) D_0^{-1}(\gamma + i\tau) e^{(\gamma+i\tau)t} h_0(\gamma + i\tau, f) - \right.$$
$$\left. - Y(x, -\gamma + i\tau) D_0^{-1}(-\gamma + i\tau) e^{(-\gamma+i\tau)t} h_0(-\gamma + i\tau, f)\right] d\tau +$$
$$+ F_k^+(x, t) + F_k^-(x, t), \tag{42}$$

где $2h_k$ — длина вертикальных хорд, а $F_k^+(x, t)$ и $F_k^-(x, t)$ — интегралы по дугам C_k^+ и C_k^- (см. лемму 5). Если γ было выбрано достаточно большим, то на прямых $\mathcal{R}\lambda = \gamma$ и $\mathcal{R}\lambda = -\gamma$ функции $D_0^{-1}(\gamma + i\tau)$ и $D_0^{-1}(-\gamma + i\tau)$ $(-\infty < \tau < +\infty)$ ограничены, а тогда из леммы 3 следует, что функции $\psi_t^+(\tau) = D_0^{-1}(\gamma + i\tau) h_0(\gamma + i\tau, f)$ и $\psi_t^-(\tau) = D_0^{-1}(-\gamma + i\tau) h_0(-\gamma + i\tau, f)$ принадлежат пространству $L_2(-\infty, \infty)$. Из леммы 4 вытекает равномерная относительно $t \in [0, T]$ сходимость при $k \to \infty$ интегралов

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2\pi i} \int_{-h_k}^{h_k} Y(x, \gamma + i\tau) e^{(\gamma+i\tau)t} \psi_t^+(\tau)\, d\tau, \\
\frac{1}{2\pi i} \int_{-h_k}^{h_k} Y(x, -\gamma + i\tau) e^{(-\gamma+i\tau)t} \psi_t^-(\tau)\, d\tau
\end{gathered} \tag{43}$$

по норме пространства $L_2(0, l)$. Так как при $k \to \infty$ $F_k^+(x, t) \to 0$ и $F_k^-(x, t) \to 0$ равномерно относительно $(x, t) \in \Omega$, то отсюда следует равномерная по $t \in [0, T]$ сходимость последовательности $u^{(k)}(x, t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ по норме пространства $L_2(\Omega)$.

Для доказательства теоремы достаточно доказать еще равномерную сходимость последовательности $Mu^{(k)}(0, t) + Pu^{(k)}(l, t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T;\ k = 1, 2, \ldots)$. Для этого заметим, что из построения матриц M_0 и P_0 (см. [6], § 2) следует, что

$$\begin{gathered}
\| M[u^{(k_1)}(0, t) - u^{(k)}(0, t)] + P[u^{(k_1)}(l, t) - u^{(k)}(l, t)]\| \leqslant \\
\leqslant \| M_0[u^{(k_1)}(0, t) - u^{(k)}(0, t)] + P_0[u^{(k_1)}(l, t) - u^{(k)}(l, t)]\| \\
(k,\ k_1 = 1,\ 2, \ldots),
\end{gathered} \tag{44}$$

а потому для доказательства сходимости последовательности $Mu^{(k)}(0, t) + Pu^{(k)}(l, t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ достаточно доказать сходимость последовательности $M_0u^{(k)}(0, t) + P_0u^{(k)}(l, t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T;\ k = 1, 2, \ldots)$. Пользуясь леммой 1, представим последнюю в виде

$$\begin{gathered}
M_0u^{(k)}(0, t) + P_0u^{(k)}(l, t) = \\
= \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_k} [M_0Y(0, \lambda) + P_0Y(l, \lambda)] D_0^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} h_0(\lambda, f)\, d\lambda \\
(k = 1,\ 2, \ldots).
\end{gathered} \tag{45}$$

Но

$$M_0Y(0,\lambda)+P_0Y(l,\lambda)=D_0(\lambda)-\frac{1}{\lambda}[N_0Y(0,\lambda)+Q_0Y(l,\lambda)],$$

а потому

$$M_0u^{(k)}(0,t)+P_0u^{(k)}(l,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_k}e^{\lambda t}h_0(\lambda,f)\,d\lambda-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_k}\frac{1}{\lambda}[N_0Y(0,\lambda)+Q_0Y(l,\lambda)]D_0^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}h_0(\lambda,f)\,d\lambda. \tag{46}$$

Подынтегральная функция в первом интеграле имеет единственную особую точку — полюс $\lambda=0$, а потому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega_k}e^{\lambda t}h_0(\lambda,f)\,d\lambda=\operatorname*{выч}_{\lambda=0}e^{\lambda t}h_0(\lambda,f)=$$

$$=-N_0Y(0,0)\int_0^l Y^{-1}(\xi,0)A^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi+Mf(0)+Pf(l). \tag{47}$$

Пусть теперь $k_1>k$. Тогда из равенств (46) и (47) следует, что

$$M_0[u^{(k_1)}(0,t)-u^{(k)}(0,t)]+P_0[u^{(k_1)}(l,t)-u^{(k)}(l,t)]=$$

$$=\int_{\omega_{k_1}}F(t,\lambda,f)\,d\lambda-\int_{\omega_k}F(t,\lambda,f)\,d\lambda, \tag{48}$$

где

$$F(t,\lambda,f)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\lambda}[N_0Y(0,\lambda)+Q_0Y(l,\lambda)]D_0^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}h_0(\lambda,f).$$

Для оценки выражения в правой части равенства (48) при достаточно больших k и k_1 заметим, что

$$\|[N_0Y(0,\lambda)+Q_0Y(l,\lambda)]D_0^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}\|\leqslant m_\delta<+\infty,$$

когда λ находится на любом из контуров ω_k $(k=1,2,\ldots)$ и $t\in[0,T]$. Тогда для $f(x)\in D_2(0,l)$ будем иметь:

$$\|F(t,\lambda,f)\|<\frac{m_\delta}{|\lambda|}\|h_0(\lambda,f)\|. \tag{49}$$

Но (см. фиг. 1)

$$\int_{\omega_k}F(t,\lambda,f)\,d\lambda=i\int_{-h_k}^{h_k}[F(t,\gamma+i\tau,f)-F(t,-\gamma+i\tau,f)]\,d\tau+$$

$$+\int_{C_k^+}F(t,\lambda,f)\,d\lambda+\int_{C_k^-}F(t,\lambda,f)\,d\lambda \tag{50}$$

и так как $\|h_0(\lambda,f)\|\to 0$, когда $|\lambda|\to\infty$ и $\|\mathscr{R}\lambda\|<\gamma$ (см. лемму 2), а длины дуг C_k^+ и C_k^- ограничены при $k\to\infty$, то два последние интеграла в равенстве (50) равномерно стремятся к нулю, т. е. для достаточно большого k

$$\Big\|\int_{C_k^+}F(t,\lambda,f)\,d\lambda\Big\|<\frac{\varepsilon}{6},\quad \Big\|\int_{C_k^-}F(t,\lambda,f)\,d\lambda\Big\|<\frac{\varepsilon}{6}. \tag{51}$$

Так как $k_1 > k$, то соотношения (50) и (51) сохраняются после замены в них k на k_1. Но тогда из равенства (48) получим, что

$$\| M_0 [u^{(k_1)}(0, t) - u^{(k)}(0, t)] + P_0 [u^{(k_1)}(l, t) - u^{(k)}(l, t)] \| <$$

$$< \| i \int_{-h_{k_1}}^{h_{k_1}} [F(t, \gamma + i\tau, f) - F(t, -\gamma + i\tau, f)] \, d\tau -$$

$$- i \int_{-h_k}^{h_k} [F(t, \gamma + i\tau, f) - F(t, -\gamma + i\tau, f)] \, d\tau \| + \frac{2}{3} \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \| \int_{h_k}^{h_{k_1}} [F(t, \gamma + i\tau, f) - F(t, -\gamma + i\tau, f)] \, d\tau \| +$$

$$+ \| \int_{-h_{k_1}}^{-h_k} [F(t, \gamma + i\tau, f) - F(t, -\gamma + i\tau, f)] \, d\tau \| + \frac{2}{3} \varepsilon. \qquad (52)$$

Из неравенства (49) следует, что для $t \in [0, T]$

$$\| \int_{h_k}^{h_{k_1}} [F(t, \gamma + i\tau, f) - F(t, -\gamma + i\tau, f)] \, d\tau \| <$$

$$< \int_{h_k}^{h_{k_1}} \frac{m_\delta \| h_0(\gamma + i\tau, f) \| \, d\tau}{|\gamma + i\tau|} + \int_{h_k}^{h_{k_1}} \frac{m_\delta \| h_0(-\gamma + i\tau, f) \| \, d\tau}{|-\gamma + i\tau|}. \qquad (53)$$

Так как $\frac{1}{|\gamma + i\tau|} \in L_2(-\infty, \infty)$ и $\| h_0(\gamma + i\tau, f) \| \in L_2(-\infty, \infty)$ (см. лемму 3), то для достаточно большого k

$$\int_{h_k}^{h_{k_1}} \frac{m_\delta \| h_0(\gamma + i\tau, f) \| \, d\tau}{|\gamma + i\tau|} \leqslant m_\delta \sqrt{\int_{h_k}^{h_{k_1}} \frac{d\tau}{|\gamma + i\tau|^2}} \sqrt{\int_{h_k}^{h_{k_1}} \| h_0(\gamma + i\tau, f) \|^2 d\tau} < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Точно так же доказывается, что

$$\int_{h_k}^{h_{k_1}} \frac{m_\delta \| h_0(-\gamma + i\tau, f) \| \, d\tau}{|-\gamma + i\tau|} < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Из неравенства (53) следует тогда, что

$$\| \int_{h_k}^{h_{k_1}} [F(t, \gamma + i\tau, f) - F(t, -\gamma + i\tau, f)] \, d\tau \| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Аналогично доказывается, что для достаточно больших k и k_1

$$\left\| \int_{-h_{k_1}}^{h_k} [F(t, \gamma + i\tau, f) - F(t, -\gamma + i\tau, f)] \, d\tau \right\| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Неравенство (51) тогда доказывает, что если $t \in [0, T]$, $k_1 > k$ и k — достаточно большое, то

$$\| M_0 [u^{(k_1)}(0, t) - u^{(k)}(0, t)] + P_0 [u^{(k_1)}(l, t) - u^{(k)}(l, t)] \| < \varepsilon,$$

а это значит, что последовательность $M_0 u^{(k)}(0, t) + P_0 u^{(k)}(l, t)$ $(k=1, 2, \ldots)$ равномерно сходится. Теорема доказана.

Из определения пространства $M_2(\Omega)$ следует, что если $u(x, t) \in M_2(\Omega)$, то $u(x, 0) \in D_2(0, l)$ и $\| u(x, 0) \|_{D_2(0, l)} \leqslant \| u(x, t) \|_{M_2(\Omega)}$. Ввиду этого, а также поскольку ряд (5) при $t = 0$ обращается в разложение функции $f(x) \in D_2(0, l)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L_0, из теоремы 1 и теоремы 9 из [6] имеем

Следствие. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то разложение любой функции $f(x) \in D_2(0, l)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L_0 сходится по норме пространства $D_2(0, l)$ (при такой же группировке членов как и в теореме разложения) к функции $f(x)$.*

§ 2. Классическое решение

Определение. Функция $u(x, t)$ $(0 \leqslant x \leqslant l;\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ называется классическим решением задачи (1), (2), (3), если она непрерывно дифференцируема по x и t $(0 \leqslant x \leqslant l;\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ и удовлетворяет уравнению (1), краевым условиям (2) и начальным условиям (3).

Найдем достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $f(x) \in D_2(0, l)$, чтобы сумма ряда (5) была классическим решением. Для этого исследуем равномерную сходимость ряда (5), а также рядов, полученных из него почленным дифференцированием по x $(0 \leqslant x \leqslant l)$ и по t $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Это исследование требует дальнейшего преобразования контурных интегралов (10), дающих представление частичных сумм ряда (5), чем мы сейчас и займемся.

Лемма 6. *Если краевые условия* (2) *регулярны и функция $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ абсолютно непрерывна, то при обозначениях леммы* 1 *частичные суммы $u^{(k)}(x, t)$ ряда* (5) *для достаточно большого k можно представить в виде*

$$u^{(k)}(x, t) = K_0(x, t) f(l) -$$
$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_k} Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} [h_1(\lambda, f) + h_2^{(0)}(\lambda, f')] \, d\lambda, \tag{54}$$

где

$$h_1(\lambda, f) = \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0 \right) F(0, \lambda) f(0) + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0 \right) F(l, \lambda) f(l) -$$
$$- M f(0) - P f(l) + \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0 \right) Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) \frac{\partial F(\xi, \lambda)}{d\xi} f(\xi) \, d\xi, \tag{55}$$

$$h_2^{(0)}(\lambda,\ f')=\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\ \lambda)\int\limits_0^l Y^{-1}(\xi,\ \lambda)F(\xi,\ \lambda)f'(\xi)\,d\xi \tag{56}$$

и матричнозначная функция $K_0(x,t)=\sum \text{выч}\frac{1}{\lambda}\ Y(x,\lambda)\ Y^{-1}(l,\lambda)F(l,\lambda)e^{\lambda t}$ *непрерывно дифференцируема по* x *и* t $(0\leqslant x\leqslant l;\ \ 0\leqslant t\leqslant T)$, *причем*

$$F(\xi,\ \lambda)=\left[E-\frac{B(\xi)}{\lambda}\right]^{-1}.$$

Если же, кроме того, функция $f'(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ *абсолютно непрерывна, то те же частичные суммы* $u^{(k)}(x,\ t)$ *допускают представление*

$$u^{(k)}(x,\ t)=K_0(x,t)f(l)+K_1(x,t)f'(l)-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_k} Y(x,\ \lambda)D_0^{-1}(\lambda)\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\left[h_1(\lambda,\ f)+\frac{1}{\lambda}h_2(\lambda,\ f')+\frac{1}{\lambda}h_3(\lambda,f'')\right]d\lambda, \tag{57}$$

где

$$h_2(\lambda,\ f')=\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)F(0,\ \lambda)A(0)F(0,\ \lambda)f'(0)+$$
$$+\left(P_0+\frac{1}{\lambda}Q_0\right)F(l,\ \lambda)A(l)F(l,\ \lambda)f'(l)+$$
$$+\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\ \lambda)\int\limits_0^l Y^{-1}(\xi,\ \lambda)\frac{\partial}{\partial\xi}[F(\xi,\ \lambda)A(\xi)F(\xi,\ \lambda)]f'(\xi)\,d\xi, \tag{58}$$

$$h_3(\lambda,\ f'')=\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\lambda)\int\limits_0^l Y^{-1}(\xi,\ \lambda)F(\xi,\ \lambda)A(\xi)F(\xi,\ \lambda)f''(\xi)\,d\xi \tag{59}$$

и матричнозначная функция

$$K_1(x,\ t)=\sum\text{выч}\frac{1}{\lambda^2}Y(x,\ \lambda)\ Y^{-1}(l,\lambda)\ F(l,\lambda)\ A(l)F(l,\lambda)\ e^{\lambda t}$$

непрерывно дифференцируема по x *и* t $(0\leqslant x\leqslant l;\ 0\leqslant t\leqslant T)$.

Доказательство. Из леммы 1 следует, что

$$u^{(k)}(x,\ t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_k} Y(x,\ \lambda)D_0^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}h_0(\lambda,\ f)\,d\lambda, \tag{60}$$

где

$$h_0(\lambda,\ f)=-\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\ \lambda)\int\limits_0^l Y^{-1}(\xi,\lambda)\ A^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi+\frac{Mf(0)+Pf(l)}{\lambda}. \tag{61}$$

Из леммы 5 работы [5] следует, что матрица $Y^{-1}(\xi,\ \lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d}{dx}Y^{-1}(x,\ \lambda)+Y^{-1}(x,\lambda)A^{-1}(x)B(x)=\lambda Y^{-1}(x,\lambda)A^{-1}(x). \tag{62}$$

Отсюда следует, что

$$Y^{-1}(\xi,\lambda)\,A^{-1}(\xi)=\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\,[Y^{-1}(\xi,\lambda)]\right\}[B(\xi)-\lambda E]^{-1}=-\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}[Y^{-1}(\xi,\ \lambda)]\right\}F(\xi,\ \lambda),$$

где $F(\xi,\ \lambda)=\left[E-\frac{B(\xi)}{\lambda}\right]^{-1}$ (при этом мы считаем $|\lambda|$ столь большим, что $\det\left(E-\frac{B(\xi)}{\lambda}\right)\neq 0\Big)$. Пользуясь последней формулой, преобразуем выражение $D_0^{-1}(\lambda)\,h_0(\lambda,\ f)$ при условии, что функция $f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ абсолютно непрерывна. Из формул (61) и (62) имеем:

$$\begin{aligned}
&D_0^{-1}(\lambda)\,h_0(\lambda,\ f)=\\
&=D_0^{-1}(\lambda)\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\ \lambda)\int_0^l\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial\xi}[Y^{-1}(\xi,\ \lambda)]\,F(\xi,\ \lambda)\,f(\xi)\,d\xi+\\
&+\frac{1}{\lambda}\,D_0^{-1}(\lambda)\,[Mf(0)+Pf(l)]=\\
&=\frac{1}{\lambda}\,D_0^{-1}(\lambda)\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\ \lambda)\,Y^{-1}(\xi,\ \lambda)\,F(\xi,\ \lambda)\,f(\xi)\,\Big|_0^l-\\
&-\frac{1}{\lambda}\,D_0^{-1}(\lambda)\left\{\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\ \lambda)\int_0^l Y^{-1}(\xi,\ \lambda)\frac{\partial}{\partial\xi}[F(\xi,\ \lambda)\,f(\xi)]\,d\xi-\right.\\
&\left.-Mf(0)-Pf(l)\right\}.
\end{aligned}\tag{63}$$

Пользуясь тем, что

$$D_0^{-1}(\lambda)\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\ \lambda)=E-D_0^{-1}(\lambda)\left(P_0+\frac{1}{\lambda}Q_0\right)Y(l,\ \lambda),\tag{64}$$

преобразуем первое слагаемое в выражении (63) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\lambda}\,D_0^{-1}(\lambda)\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\ \lambda)\,Y^{-1}(\xi,\ \lambda)\,F(\xi,\ \lambda)\,f(\xi)\,\Big|_0^l=\\
&=\frac{1}{\lambda}\,Y^{-1}(l,\ \lambda)\,F(l,\ \lambda)\,f(l)-\frac{1}{\lambda}\,D_0^{-1}(\lambda)\left[\left(P_0+\frac{1}{\lambda}Q_0\right)F(l,\ \lambda)\,f(l)+\right.\\
&\left.+\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)F(0,\ \lambda)\,f(0)\right].
\end{aligned}$$

Подставляя в выражение (63), будем иметь:

$$\begin{aligned}
&D_0^{-1}(\lambda)\,h_0(\lambda,\ f)=\frac{1}{\lambda}\,Y^{-1}(l,\ \lambda)\,F(l,\ \lambda)\,f(l)-\\
&-\frac{1}{\lambda}\,D_0^{-1}(\lambda)\left\{\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)F(0,\ \lambda)\,f(0)+\right.\\
&+\left(P_0+\frac{1}{\lambda}Q_0\right)F(l,\ \lambda)\,f(l)-Mf(0)-Pf(l)+\\
&\left.+\left(M_0+\frac{1}{\lambda}N_0\right)Y(0,\ \lambda)\int_0^l Y^{-1}(\xi,\ \lambda)\frac{\partial}{\partial\xi}[F(\xi,\ \lambda)\,f(\xi)]\,d\xi\right\}=
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda} Y^{-1}(l, \lambda) F(l, \lambda) f(l) - \frac{1}{\lambda} D_0^{-1}(\lambda) [h_1(\lambda, f) + h_2^{(0)}(\lambda, f')].$$

Если теперь полученное выражение подставить в формулу (60), то как раз и получим представление (54).

Если же $f'(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ абсолютно непрерывна, то преобразуем выражение $h_2^{(0)}(\lambda, f')$ посредством еще одного интегрирования по частям. Из формул (56) и (62) имеем:

$$D_0^{-1}(\lambda) h_2^{(0)}(\lambda, f') =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} D_0^{-1}(\lambda) \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) \int_0^l \left[\frac{\partial}{\partial \xi} Y^{-1}(\xi, \lambda)\right] F(\xi, \lambda) A(\xi) F(\xi, \lambda) f'(\xi) d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} D_0^{-1}(\lambda) \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) F(\xi, \lambda) A(\xi) F(\xi, \lambda) f'(\xi) \Big|_0^l +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} D_0^{-1}(\lambda) \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) \frac{\partial}{\partial \xi} [F(\xi, \lambda) A(\xi) F(\xi, \lambda) f'(\xi)] d\xi.$$

Применение тождества (64) показывает, что

$$D_0^{-1}(\lambda) \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) Y^{-1}(\xi, \lambda) F(\xi, \lambda) A(\xi) F(\xi, \lambda) f'(\xi) \Big|_0^l =$$

$$= Y^{-1}(l, \lambda) F(l, \lambda) A(l) F(l, \lambda) f'(l) -$$

$$- D_0^{-1}(\lambda) \left[\left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) F(l, \lambda) A(l) F(l, \lambda) f'(l) + \right.$$

$$\left. + \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) F(0, \lambda) A(0) F(0, \lambda) f'(0)\right].$$

А это значит, что

$$D_0^{-1}(\lambda) h_2^{(0)}(\lambda, f') = -\frac{1}{\lambda} Y^{-1}(l, \lambda) F(l, \lambda) A(l) F(l, \lambda) f'(l) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} D_0^{-1}(\lambda) \left\{\left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) F(0, \lambda) A(0) F(0, \lambda) f'(0) + \right.$$

$$+ \left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) F(l, \lambda) A(l) F(l, \lambda) f'(l) +$$

$$\left. + \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) \frac{\partial}{\partial \xi} [F(\xi, \lambda) A(\xi) F(\xi, \lambda) f'(\xi)] d\xi\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\lambda} Y^{-1}(l, \lambda) F(l, \lambda) A(l) F(l, \lambda) f'(l) + \frac{1}{\lambda} D_0^{-1}(\lambda) [h_2(\lambda, f') + h_3(\lambda, f'')].$$

Подставляя полученное выражение в формулу (54) и учитывая то, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_k} \frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda t} Y(x, \lambda) Y^{-1}(l, \lambda) F(l, \lambda) A(l) F(l, \lambda) f'(l) d\lambda = K_1(x, t) f'(l),$$

получим представление (57). Лемма доказана.

Лемма 7. *При выполнении условий леммы 6 для функций $h_1(\lambda, f)$ и $h_2(\lambda, f')$ имеют место представления*

$$h_1(\lambda, f) = N_1 f(0) + Q_1 f(l) + \frac{1}{\lambda} h_1^{(1)}(\lambda, f), \tag{65}$$

$$h_1(\lambda, f) = N_1 f(0) + Q_1 f(l) + \frac{1}{\lambda}\Big\{[M_0 B(0) + N_0] f(0) + [P_0 B(l) + Q_0] f(l) + $$
$$+ M_0 Y(0, \lambda)\int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda)\left[\frac{d}{d\xi} B(\xi)\right] f(\xi)\, d\xi\Big\} + \frac{1}{\lambda^2} h_1^{(2)}(\lambda, f), \tag{66}$$

$$h_2(\lambda, f') = M_0 A(0) f'(0) + P_0 A(l) f'(l) +$$
$$+ M_0 Y(0, \lambda)\int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda)\frac{d}{d\xi}[A(\xi)] f'(\xi) d\xi + \frac{1}{\lambda} h_2^{(1)}(\lambda, f'), \tag{67}$$

где $N_1 = M_0 - M$, $Q_1 = P_0 - P$ и функции $h_1^{(1)}(\lambda, f)$, $h_1^{(2)}(\lambda, f)$ и $h_2^{(1)}(\lambda, f')$ на контурах ω_k $(k = 1, 2, \ldots)$ при некоторых достаточно больших m_1, m_2 и m_3 удовлетворяют неравенствам

$$\| h_1^{(1)}(\lambda, f)\| \leqslant m_1 \max_{0\leqslant x\leqslant l} \| f(x)\|, \quad \| h_1^{(2)}(\lambda, f)\| \leqslant m_2 \max_{0\leqslant x\leqslant l} \| f(x)\|$$

и

$$\| h_2^{(1)}(\lambda, f')\| \leqslant m_3 \max_{0\leqslant x\leqslant l} \| f'(x)\|.$$

Доказательство. Из того, что $F(\xi, \lambda)\left[E - \frac{B(\xi)}{\lambda}\right] = E$, следует, что $F(\xi, \lambda) = E + \frac{1}{\lambda} F(\xi, \lambda) B(\xi)$ (причем $BF = FB$). Подставляя это выражение в формулу (55) для $h_1(\lambda, f)$ и учитывая то, что $M_0 - M = N_1$ и $P_0 - P = Q_1$, получим:

$$h_1(\lambda, f) = \left[\left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) F(0, \lambda) - M\right] f(0) + \left[\left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) F(l, \lambda) - P\right] f(l) +$$
$$+ \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda)\int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda)\, \frac{\partial F(\xi, \lambda)}{\partial \xi} f(\xi)\, d\xi =$$
$$= N_1 f(0) + Q_1 f(l) + \frac{1}{\lambda} h_1^{(1)}(\lambda, f), \tag{68}$$

где

$$h_1^{(1)}(\lambda, f) = \left[\left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) F(0, \lambda) B(0) f(0) + \right.$$
$$\left. + \left(P_0 + \frac{1}{\lambda} Q_0\right) F(l, \lambda) B(l) f(l)\right] + \left[N_0 F(0, \lambda) f(0) + Q_0 F(l, \lambda) f(l)\right] +$$
$$+ \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda)\int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda)\frac{\partial}{\partial\xi}[F(\xi, \lambda) B(\xi)] f(\xi)\, d\xi. \tag{69}$$

Для того чтобы получить формулу (66), подставим опять $F(\xi, \lambda) = E + \frac{1}{\lambda} B(\xi) F(\xi, \lambda)$ в правую часть формулы (69). Получим:

$$h_1^{(1)}(\lambda, f) = [M_0 B(0) + N_0] f(0) + [P_0 B(l) + Q_0] f(l) + \\ + M_0 Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) \left[\frac{d}{d\xi} B(\xi)\right] f(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\lambda} h_1^{(2)}(\lambda, f), \tag{70}$$

где

$$h_1^{(2)}(\lambda, f) = [M_0 B^2(0) F(0, \lambda) + N_0 B(0) F(0, \lambda) + N_0 B(0) F(0, \lambda)] f(0) + \\ + [P_0 B^2(l) F(l, \lambda) + Q_0 B(l) F(l, \lambda) + Q_0 B(l) F(l, \lambda)] f(l) + \\ + N_0 Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) \frac{\partial}{\partial \xi} [F(\xi, \lambda) B(\xi)] f(\xi)\, d\xi + \\ + M_0 Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) \frac{\partial}{\partial \xi} [F(\xi, \lambda) B^2(\xi)] f(\xi)\, d\xi. \tag{71}$$

Так как теперь приведенные в формулировке леммы оценки $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ очевидны $\left(\text{отметим для этого тождество } \frac{\partial F(\xi,\lambda)}{\partial \xi} = \frac{1}{\lambda} F(\xi, \lambda) \frac{dB(\xi)}{d\xi}\text{, из которого следует ограниченность этой производной}\right)$, то формулы (65) и (66) доказаны.

Из того, что $F(\xi, \lambda) = E + \frac{1}{\lambda} B(\xi) F(\xi, \lambda) = E + \frac{1}{\lambda} F(\xi, \lambda) B(\xi)$, следует, что

$$F(\xi, \lambda) A(\xi) F(\xi, \lambda) = F(\xi, \lambda) A(\xi) + \frac{1}{\lambda} F(\xi, \lambda) A(\xi) B(\xi) F(\xi, \lambda) = \\ = A(\xi) + \frac{1}{\lambda} \Phi(\xi, \lambda),$$

где

$$\Phi(\xi, \lambda) = F(\xi, \lambda) A(\xi) B(\xi) F(\xi, \lambda) + F(\xi, \lambda) B(\xi) A(\xi). \tag{72}$$

Подставляя полученное выражение в формулу (58), получим:

$$h_2(\lambda, f') = M_0 A(0) f'(0) + P_0 A(l) f'(l) + \\ + M_0 Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) \left[\frac{d}{d\xi} A(\xi)\right] f'(\xi)\, d\xi + \frac{1}{\lambda} h_2^{(1)}(\lambda, f'), \tag{73}$$

где

$$h_2^{(1)}(\lambda, f') = [M_0 \Phi(0, \lambda) + N_0 F(0, \lambda) A(0) F(0, \lambda)] f'(0) + \\ + [P_0 \Phi(l, \lambda) + Q_0 F(l, \lambda) A(l) F(l, \lambda)] f'(l) + \\ + N_0 Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) \frac{\partial}{\partial \xi} [F(\xi, \lambda) A(\xi) F(\xi, \lambda)] f'(\xi)\, d\xi + \\ + M_0 Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\xi, \lambda)\right] f'(\xi)\, d\xi.$$

Так как теперь оценка $h_2^{(1)}$ очевидна, то это доказывает формулу (67) и завершает доказательство леммы.

Лемма 8. *Если* $g(x) \in L_2(0, l)$ *и*

$$\overline{h}(\lambda, g) = \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) g(\xi) d\xi,$$

то последовательность $\int\limits_{\omega_k} \| \overline{h}(\lambda, g) \|^2 | d\lambda |$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *сходится.*

Доказательство. Построим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x = 0, \\ A(x) g(x) & \text{для } 0 < x < l, \\ 0 & \text{для } x = l. \end{cases}$$

Очевидно, $f(x) \in \dot{D}_2(0, l)$. Кроме того,

$$h_0(\lambda, f) = -\left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) A^{-1}(\xi) f(\xi) d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\lambda}[Mf(0) + Pf(l)] = -\left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) \overline{h}(\lambda, g),$$

т. е.

$$\overline{h}(\lambda, g) = -Y^{-1}(0, \lambda)\left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right)^{-1} h_0(\lambda, f).$$

Тогда

$$\int\limits_{\omega_k} \| \overline{h}(\lambda, g) \|^2 | d\lambda | = \int\limits_{-h_k}^{h_k} \left\| Y^{-1}(0, \gamma + i\tau)\left[M_0 + \frac{N_0}{\gamma + i\tau}\right]^{-1} h_0(\gamma + i\tau, f) \right\|^2 d\tau +$$

$$+ \int\limits_{-h_k}^{h_k} \left\| Y^{-1}(0, -\gamma + i\tau)\left[M_0 + \frac{N_0}{-\gamma + i\tau}\right]^{-1} h_0(-\gamma + i\tau, f) \right\|^2 d\tau +$$

$$+ \int\limits_{C_k^+} \left\| Y^{-1}(0, \lambda)\left[M_0 + \frac{N_0}{\lambda}\right]^{-1} h_0(\lambda, f) \right\|^2 | d\lambda | +$$

$$+ \int\limits_{C_k^-} \left\| Y^{-1}(0, \lambda)\left[M_0 + \frac{N_0}{\lambda}\right]^{-1} h_0(\lambda, f) \right\|^2 | d\lambda |. \tag{74}$$

Первые два слагаемых при $k \to \infty$ имеют предел, так как функции

$$Y^{-1}(0, \gamma + i\tau)\left[M_0 + \frac{N_0}{\gamma + i\tau}\right]^{-1} \quad \text{и} \quad Y^{-1}(0, -\gamma + i\tau)\left[M_0 + \frac{N_0}{-\gamma + i\tau}\right]^{-1}$$

$(-\infty < \tau < +\infty)$ ограничены, а функции $\varphi^+(\tau) = h_0(\gamma + i\tau, f)$ и $\varphi^-(\tau) = h_0(-\gamma + i\tau, f)$ $(-\infty < \tau < +\infty)$, в силу леммы 3, принадлежат пространству $L_2(-\infty, \infty)$. Два последних слагаемых стремятся к нулю в силу леммы 2. Лемма доказана.

Теорема 2. *Если краевые условия* (2) *регулярны, функция* $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ *абсолютно непрерывна и удовлетворяет краевым условиям*

$$N_1 f(0) + Q_1 f(l) = 0 \tag{75}$$

$(N_1 = M_0 - M,\ Q_1 = P_0 - P)$, *а функция* $f'(x)$ *принадлежит пространству* $L_2(0, l)$, *то ряд* (5) *сходится* (*в смысле теоремы разложения*) *равномерно на прямоугольнике* $\Omega = [0 \leqslant x \leqslant l;\ 0 \leqslant t \leqslant T]$.

Доказательство. Для доказательства теоремы воспользуемся представлением (54) частичной суммы $u^{(k)}(x, t)$ $(k = 1, 2, \ldots; (x, t) \in \Omega)$ ряда (5). При этом достаточно доказать равномерную сходимость последовательности $\widetilde{u}^{(k)}(x, t)$ $(k = 1, 2, \ldots; (x, t) \in \Omega)$, где

$$\widetilde{u}^{(k)}(x, t) = \int_{\omega_k} Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} [h_1(\lambda, f) + h_2^{(0)}(\lambda, f')] \, d\lambda \tag{76}$$

и $h_1(\lambda, f)$ и $h_2^{(0)}(\lambda, f')$ вычисляются по формулам (55) и (56). Но, в силу условия (75) и леммы 7, $h_1(\lambda, f) = \frac{1}{\lambda} h_1^{(1)}(\lambda, f)$, где $h_1^{(1)}(\lambda, f)$ — равномерно ограниченная на контурах ω_k $(k = 1, 2, \ldots)$ функция λ. Кроме того, так как $F(\xi, \lambda) = E + \frac{F(\xi, \lambda) B(\xi)}{\lambda}$, то функцию

$$h_2^{(0)}(\lambda, f') = \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) F(\xi, \lambda) f'(\xi) \, d\xi$$

можно представить в виде

$$h_2^{(0)}(\lambda, f') = \overline{h}_2^{(0)}(\lambda, f') + \frac{1}{\lambda} \widetilde{h}_2^{(0)}(\lambda, f'),$$

где

$$\overline{h}_2^{(0)}(\lambda, f') = \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) f'(\xi) \, d\xi,$$

$$\widetilde{h}_2^{(0)}(\lambda, f') = \left(M_0 + \frac{1}{\lambda} N_0\right) Y(0, \lambda) \int_0^l Y^{-1}(\xi, \lambda) F(\xi, \lambda) B(\xi) f'(\xi) \, d\xi,$$

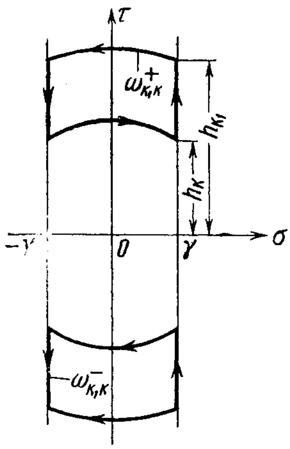
причем функции $\overline{h}_2^{(0)}(\lambda, f')$ и $\widetilde{h}_2^{(0)}(\lambda, f')$ равномерно ограничены на контурах ω_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$\widetilde{u}^{(k)}(x, t) = \int_{\omega_k} Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} \frac{1}{\lambda^2} [h_1^{(1)}(\lambda, f) + \widetilde{h}_2^{(0)}(\lambda, f')] \, d\lambda + $$
$$+ \int_{\omega_k} Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} \frac{1}{\lambda} \overline{h}_2^{(0)}(\lambda, f') \, d\lambda. \tag{77}$$

Пусть $k_1 > k$ и $\varphi(\lambda)$ — некоторая функция, заданная в полосе $|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma$. Тогда

$$\int\limits_{\omega_{k_1}} \varphi(\lambda)\,d\lambda - \int\limits_{\omega_k} \varphi(\lambda)\,d\lambda = \int\limits_{\omega_{k_1 k}} \varphi(\lambda)\,d\lambda,$$

где (см. фиг. 2) $\omega_{k_1 k}$ обозначает контур, состоящий из двух контуров



Фиг. 2

$$\omega^{+}_{k_1 k} \text{ и } \omega^{-}_{k_1 k} \quad (\omega_{k_1 k} = \omega^{+}_{k_1 k} \cup \omega^{-}_{k_1 k}),$$

$$\omega^{+}_{k_1 k} = [\mathscr{R}\lambda = \gamma,\ h_k \leqslant \mathscr{I}\lambda \leqslant h_{k_1};\ |\lambda| = R_{k_1},$$
$$|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma;\quad \mathscr{R}\lambda = -\gamma,\quad h_k \leqslant \mathscr{I}\lambda \leqslant h_{k_1};$$
$$|\lambda| = R_k,\quad |\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma],$$

$$\omega^{-}_{k_1 k} = [\mathscr{R}\lambda = \gamma,\ -h_{k_1} \leqslant \mathscr{I}\lambda \leqslant -h_k;\ |\lambda| = R_{k},$$
$$|\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma;\quad \mathscr{R}\lambda = -\gamma,\quad -h_{k_1} \leqslant \mathscr{I}\lambda \leqslant -h_k;$$
$$|\lambda| = R_k,\quad |\mathscr{R}\lambda| \leqslant \gamma].$$

Пользуясь этим замечанием, напишем:

$$\tilde{u}^{(k_1)}(x, t) - \tilde{u}^{(k)}(x, t) =$$
$$= \int\limits_{\omega_{k_1 k}} Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} \frac{1}{\lambda^2} \left[h_1^{(1)}(\lambda, f) + \tilde{h}_2^{(0)}(\lambda, f')\right] d\lambda +$$
$$+ \int\limits_{\omega_{k_1 k}} Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} \frac{1}{\lambda} \overline{h}_2^{(0)}(\lambda, f')\,d\lambda. \tag{77'}$$

Найдем теперь число m такое, чтобы выполнялись неравенства

$$\| Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} [h_1^{(1)}(\lambda, f) + \tilde{h}_2^{(0)}(\lambda, f')] \| < m,$$
$$\| Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} \| < m,$$

когда $(x, t) \in \Omega$, а λ принадлежит контурам ω_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда из равенства (77′) следует, что

$$\| \tilde{u}^{(k_1)}(x, t) - \tilde{u}^{(k)}(x, t) \| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\omega_{k_1 k}} \| Y(x, \lambda) D^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} [h_1^{(1)}(\lambda, f) + \tilde{h}_2^{(0)}(\lambda, f')] \| \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^2} +$$
$$+ \int\limits_{\omega_{k_1 k}} \| Y(x, \lambda) D_0^{-1}(\lambda) e^{\lambda t} \| \, \| \overline{h}_2^{(0)}(\lambda, f') \| \frac{|d\lambda|}{|\lambda|} <$$
$$< \int\limits_{\omega_{k_1 k}} \frac{m}{|\lambda|^2} |d\lambda| + \int\limits_{\omega_{k_1 k}} \frac{m}{|\lambda|} \| \overline{h}_2^{(0)}(\lambda, f') \| \, |d\lambda|. \tag{78}$$

Так как интеграл $\int\limits_{\pm\gamma-i\infty}^{\pm\gamma+i\infty} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^2} < \infty$, то для $k_1 \to \infty$, $k \to \infty$ $(k_1 > k)$

$$\int\limits_{\omega_{k_1 k}} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^2} \to 0.$$

Точно так же из неравенства

$$\int\limits_{\omega_{k_1 k}} \frac{\| \overline{h}_2^{(0)}(\lambda, f') \| \cdot |d\lambda|}{|\lambda|} < \sqrt{\int\limits_{\omega_{k_1 k}} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^2}} \sqrt{\int\limits_{\omega_{k_1 k}} \| \overline{h}_2^{(0)}(\lambda, f') \|^2 |d\lambda|}$$

и сходимости интегралов

$$\int\limits_{\pm\gamma-i\infty}^{\pm\gamma+i\infty} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^2} \quad \text{и} \quad \int\limits_{\pm\gamma-i\infty}^{\pm\gamma+i\infty} \| \overline{h}_2^{(0)}(\lambda, f') \|^2 |d\lambda|$$

последний сходится в силу леммы 8) следует, что при $k \to \infty$, $k_1 \to \infty$ $(k_1 > k)$

$$\int\limits_{\omega_{k_1 k}} \frac{\| \overline{h}_2^{(0)}(\lambda, f') \|}{|\lambda|} |d\lambda| \to 0,$$

что и доказывает теорему.

Поскольку ряд (5) при $t = 0$ обращается в разложение функции $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ по собственным и присоединенным функциям оператора L_0, то из теоремы 2 имеем

Следствие. *Если функция $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет краевым условиям (75), а $f'(x) \in L_2(0, l)$, то разложение этой функции по собственным и присоединенным функциям оператора L_0 сходится (в смысле теоремы разложения) равномерно к функции $f(x)$.*

Теорема 3. *Если краевые условия (2) регулярны и функции $f(x)$ и $f'(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ абсолютно непрерывны и удовлетворяют условиям*

$$N_1 f(0) + Q_1 f(l) = 0, \tag{75}$$

$$M_0 A(0) f'(0) + [M_0 B(0) + N_0] f(0) + P_0 A(l) f'(l) + [P_0 B(l) + Q_0] f(l) = 0, \tag{79}$$

а $f''(x) \in L_2(0, l)$, то ряд (5) не только сам равномерно сходится (в смысле теоремы разложения), но и ряды

$$\text{a)} \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d}{dx} Y_{nk_s}^{(s)}(x)\right] e^{l_s t} a_s,$$

$$\text{b)} \quad \sum_{s=-\infty}^{+\infty} Y_{nk_s}^{(s)}(x) e^{l_s t} l_s a_s, \tag{80}$$

полученные из него почленным дифференцированием по x и t, сходятся (в смысле теоремы разложения) равномерно на $\Omega=[0\leqslant x\leqslant l;\ 0\leqslant t\leqslant T]$.

Доказательство. Воспользуемся интегральным представлением (57) частичной суммы $u^{(k)}(x,t)$ ряда (5). Из него для частичных сумм $\frac{\partial}{\partial x}u^{(k)}(x,t)$ и $\frac{\partial}{\partial t}u^{(k)}(x,t)$ рядов (80) a) и (80) b) будем иметь представления:

$$
\begin{gathered}
\text{a)}\qquad \frac{\partial u^{(k)}(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial K_0(x,t)}{\partial x}f(l)+\frac{\partial K_1(x,t)}{\partial x}f'(l)-\\
-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_k}\frac{\partial}{\partial x}Y(x,\lambda)D_0^{-1}(\lambda)\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}\left[h_1(\lambda,f)+\frac{1}{\lambda}h_2(\lambda,f')+\frac{1}{\lambda}h_3(\lambda,f'')\right]d\lambda,\\
\text{b)}\qquad \frac{\partial u^{(k)}(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial K_0(x,t)}{\partial t}f(l)+\frac{\partial K_1(x,t)}{\partial t}f'(l)-\\
-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_k}Y(x,\lambda)D_0^{-1}(\lambda)e^{\lambda t}\left[h_1(\lambda,f)+\frac{1}{\lambda}h_2(\lambda,f')+\frac{1}{\lambda}h_3(\lambda,f'')\right]d\lambda.
\end{gathered}
\tag{81}
$$

Рассмотрим частичную сумму ряда (80) a). Прежде всего заметим, что так как $F(\xi,\lambda)=E+\frac{1}{\lambda}B(\xi)F(\xi,\lambda)$, то

$$
F(\xi,\lambda)A(\xi)F(\xi,\lambda)=A(\xi)+\frac{1}{\lambda}[F(\xi,\lambda)B(\xi)A(\xi)F(\xi,\lambda)+A(\xi)B(\xi)F(\xi,\lambda)],
$$

а тогда, пользуясь условиями (75), (79) и леммой 7, выражение

$$
h_1(\lambda,f)+\frac{1}{\lambda}h_2(\lambda,f')+\frac{1}{\lambda}h_3(\lambda,f'')
$$

можно переписать в виде

$$
\begin{gathered}
h_1(\lambda,f)+\frac{1}{\lambda}h_2(\lambda,f')+\frac{1}{\lambda}h_3(\lambda,f'')=\frac{1}{\lambda}[\overline{h}_1(\lambda,f)+\overline{h}_2(\lambda,f')+\overline{h}_3(\lambda,f'')]+\\
+\frac{1}{\lambda^2}[h_1^{(2)}(\lambda,f)+h_2^{(1)}(\lambda,f')+h_3^{(1)}(\lambda,f'')],
\end{gathered}
\tag{82}
$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
\overline{h}_1(\lambda,f)&=M_0Y(0,\lambda)\int\limits_0^l Y^{-1}(\xi,\lambda)\left[\frac{d}{d\xi}B(\xi)\right]f(\xi)d\xi,\\
\overline{h}_2(\lambda,f')&=M_0Y(0,\lambda)\int\limits_0^l Y^{-1}(\xi,\lambda)\left[\frac{d}{d\xi}A(\xi)\right]f'(\xi)\,d\xi,\\
\overline{h}_3(\lambda,f'')&=M_0Y(0,\lambda)\int\limits_0^l Y^{-1}(\xi,\lambda)A(\xi)f''(\xi)\,d\xi,
\end{aligned}
\right\}
\tag{83}
$$

а функции $h_1^{(2)}(\lambda, f)$, $h_2^{(1)}(\lambda, f')$ и $h_3^{(1)}(\lambda, f'')$ равномерно ограничены на контурах ω_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Подставим правую часть выражения (82) вместо левой в формулу (81) a), а также подставим в нее

$$\frac{\partial Y(x, \lambda)}{\partial x} = A^{-1}(x)[\lambda E - B(x)]\,Y(x, \lambda)$$

и составим разность

$$\frac{\partial u^{(k_1)}(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u^{(k)}(x, t)}{\partial x} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\omega_{k_1k}} A^{-1}(x)[\lambda E - B(x)]\,Y(x, \lambda)\,D_0^{-1}(\lambda)\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2}[\overline{h}_1(\lambda, f) + \overline{h}_2(\lambda, f') +$$
$$+ \overline{h}_3(\lambda, f'') + \frac{1}{\lambda}h_1^{(2)}(\lambda, f) + \frac{1}{\lambda}h_2^{(1)}(\lambda, f') + \frac{1}{\lambda}h_3^{(1)}(\lambda, f'')]\,d\lambda,$$

где $k_1 > k$ и $\omega_{k_1k} = \omega_{k_1k}^{+} \cup \omega_{k_1k}^{-}$ (см. фиг. 2). Найдем число m такое, чтобы для любых x и t $(0 \leqslant x \leqslant l;\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ выполнялись неравенства

$$\left\| \frac{1}{2\pi i}A^{-1}(x)\left[E - \frac{1}{\lambda}B(x)\right]Y(x, \lambda)\,D_0^{-1}(\lambda)\,e^{\lambda t}\right\| < m,$$

$$\left\| \frac{1}{2\pi i}A^{-1}(x)\left[E - \frac{1}{\lambda}B(x)\right]Y(x, \lambda)\,D_0^{-1}(\lambda)\,e^{\lambda t}\,[h_1^{(2)}(\lambda, f) + \right.$$
$$\left. + h_2^{(1)}(\lambda, f') + h_3^{(1)}(\lambda, f'')]\right\| < m, \tag{84}$$

когда λ принадлежит контурам ω_k $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$\left\| \frac{\partial u^{(k_1)}(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u^{(k)}(x, t)}{\partial x} \right\| <$$

$$< \int\limits_{\omega_{k_1k}} m\,\frac{[\,\|\overline{h}_1(\lambda, f)\| + \|\overline{h}_2(\lambda, f')\| + \|\overline{h}_3(\lambda, f'')\|\,]}{|\lambda|}\,|d\lambda| + \int\limits_{\omega_{k_1k}} \frac{m\,|d\lambda|}{|\lambda|^2}. \tag{85}$$

Из леммы 8, аналогично тому, как это показано при доказательстве теоремы 2, следует, что для $k \to \infty$ и $k_1 \to \infty$ $(k_1 > k)$ правая часть стремится к нулю. Этим теорема доказана для ряда (80) a). Нетрудно видеть, что приведенное доказательство равномерной сходимости ряда (80) a) переносится на случай ряда (80) b). Теорема доказана.

Так как каждый член ряда (5) удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2), то следствием из доказанной теоремы и теоремы разложения 6 из [6] является

Теорема 4. *Если краевые условия* (2) *регулярны, а начальные условия* $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ *вместе со своей первой производной* $f'(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ *абсолютно непрерывны и удовлетворяют условиям* (75) *и* (79), *а* $f''(x) \in L_2(0, l)$, *то сумма ряда* (5) *есть классическое решение смешанной задачи* (1), (2), (3).

Замечание. Из доказательства вытекает, что эта теорема (как и предыдущие) справедлива, если отрезок $[0, T]$ заменить на любой конечный отрезок $[-T_1, T_2]$ $(0 \leqslant T_1, T_2 < \infty)$.

Касаясь свойств полученного классического решения задачи (1), (2), (3), заметим, что в следующем параграфе будет доказано, что оно является единственным решением этой задачи для указанных в теореме 4 начальных условий. Кроме того, сейчас докажем, что это решение непрерывно зависит от начальных условий. С этой целью докажем, что если начальные условия удовлетворяют условиям теоремы 2, то сумма ряда (5) будет удовлетворять неравенству

$$\| u(x, t) \| \leqslant K [\max_{0 \leqslant x \leqslant l} \| f(x) \| + \| f'(x) \|_{L_2(0, l)}], \tag{86}$$

где K — достаточно большое число, не зависящее от выбора функции $f(x)$ и $x \in [0, l]$, $t \in [0, T]$.

Для доказательства воспользуемся представлением (54) для частичной суммы $u^{(k)}(x, t)$ ряда (5), причем в этом представлении второе слагаемое (без делителя $2\pi i$) преобразуем к виду (77). Пользуясь оценками $| h_1^{(1)}(\lambda, f) | \leqslant m_1 \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant l} \| f(x) \|$ (см. лемму 7), $| \widetilde{h}_2^{(0)}(\lambda, f') \| \leqslant K_1 \| f'(x) \|_{L_2(0, l)}$ (следует из определения $\widetilde{h}_2^{(0)}$) и

$$\int\limits_{\pm\gamma - i\infty}^{\pm\gamma + i\infty} \| \widetilde{h}_2^{(0)}(\lambda, f') \|^2 \, | d\lambda | \leqslant K_2 \| f'(x) \|^2_{L_2(0, l)}$$

(см. замечание к лемме 3), получим требуемую оценку для $| \widetilde{u}^{(k)} |$, не зависящую от k. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим оценку (86).

Если теперь $f_1(x)$ и $f_2(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ — две функции, удовлетворяющие условиям теоремы 4, то соответствующие им решения задачи (1), (2), (3) $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ будут удовлетворять неравенству

$$\| u_1(x, t) - u_2(x, t) \| \leqslant K [\max_{0 \leqslant x \leqslant l} \| f_1(x) - f_2(x) \| + \| f_1'(x) - f_2'(x) \|_{L_2(0, l)}]$$
$$(0 \leqslant x \leqslant l;\ 0 \leqslant t \leqslant T). \tag{87}$$

Это доказывает непрерывную зависимость классического решения задачи (1), (2), (3) от начальных условий, удовлетворяющих условиям теоремы 4.

§ 3. Обобщенное решение

Из теоремы 4 следует, что ряд (5) дает решение задачи (1), (2), (3) для достаточно гладких начальных условий. Но и для негладких функций, лишь бы они принадлежали пространству $D_2(0, l)$, этот ряд, согласно теореме 1, сходится по норме пространства $M_2(\Omega)$ к некоторой функции $u(x, t) \in M_2(\Omega)$. Для приложений важно выяснить, при каких условиях этой функцией можно пользоваться как решением той задачи, для которой была составлена система (1) с условиями (2), (3), т. е. выяснить, когда $u(x, t)$ будет обобщенным решением задачи (1), (2), (3).

Дадим более точное определение обобщенного решения в данном случае (для других случаев см., например, [3], стр. 72). Для этого рассмотрим множество $C_0^{(1)}(\Omega)$ непрерывно дифференцируемых функций $v(x, t)$ $((x, t) \in \Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям (см. [5], § 1)

$$S_{n-q\,n} v(0, t) + W_{n-q\,n} v(l, t) = 0. \tag{88}$$

Лемма 9. *Для того чтобы функция* $u(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$ *была классическим решением задачи* (1), (2), (3) (*при* $f(x) \in C^{(1)}[0, l]$), *необходимо и достаточно, чтобы она для любого* $v(x, t) \in C_0^{(1)}(\Omega)$ *и каждого* $t \in [0, T]$ *удовлетворяла равенству* (см. [5], § 1)

$$\iint\limits_{\Omega(t)} [L^* v(\xi, \tau)]^* u(\xi, \tau)\, d\xi d\tau = [u(\xi, t),\ v(\xi, t)] - [f(\xi),\ v(\xi, 0)] +$$

$$+ \int\limits_0^t [l^* v(\tau)]^* [Mu(0, \tau) + Pu(l, \tau)]\, d\tau, \tag{89}$$

где $\Omega(t) = [0 \leqslant \xi \leqslant l;\ 0 \leqslant \tau \leqslant t]$.

Доказательство. Воспользуемся полученной в [5] (формула (45)) формулой Грина:

$$\iint\limits_{\Omega(t)} [v^*(\xi, \tau) Lu(\xi, \tau) - \{L^* v(\xi, \tau)\}^*\ u(\xi, \tau)]\, d\xi d\tau =$$

$$= [u(x, 0),\ v(x, 0)] - [u(x, t),\ v(x, t)] +$$

$$+ \int\limits_0^t [H_{n\,2n} v(\tau)]^*\, lu(\tau)\, d\tau + \int\limits_0^t [l^* v(\tau)]^* G_{n\,2n} u(\tau)\, d\tau, \tag{90}$$

где $u(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$, $v(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$. Если функция $u(x, t)$ $((x, t) \in \Omega)$ является классическим решением задачи (1), (2), (3), то для нее выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned} Lu(x, t) &\equiv -\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + A(x)\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + B(x)\, u(x, t) = 0, \\ lu(t) &\equiv M\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} + Nu(0, t) + P\frac{\partial u(l, t)}{\partial t} + Qu(l, t) = 0, \\ & u(x, 0) = f(x). \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Из формулы (90) следует, что для каждого $t \in [0, T]$ и каждого $v(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$

$$-\iint\limits_{\Omega(t)} [L^* v(\xi, \tau)]^* u(\xi, \tau)\, d\xi d\tau = [f(x),\ v(x, 0)] - [u(x, t),\ v(x, t)] +$$

$$+ \int\limits_0^t [l^* v(\tau)]^* G_{n\,2n} u(\tau)\, d\tau. \tag{92}$$

Докажем, что если $v \in C_0^{(1)}(\Omega)$, то

$$[l^* v(t)]^* G_{n\,2n} u(t) = -[l^* v(t)]^* [Mu(0, t) + Pu(l, t)].$$

Пусть $l^* v(t) = \begin{Vmatrix} l_q^{(1)*} v(t) \\ l_{n-q}^{(2)} v(t) \end{Vmatrix}$, где $l_q^{(1)*} v(t)$ — вектор, составленный из q первых координат вектора $l^* v(t)$, и $l_{n-q}^{(2)*} v(t)$ — вектор, составленный из $n-q$ последних координат того же вектора $l^* v(t)$. Согласно [5] § 1,

$$l_{n-q}^{(2)*} v(t) = S_{n-q\,n} v(0, t) + W_{n-q\,n} v(l, t)$$

и так как $v \in C_0^{(1)}(\Omega)$, то $l_{n-q}^{(2)*} v(t) = 0$. Кроме того, из того же § 1 работы [5] (лемма 3) следует, что

$$G_{n\,2n} u(t) = \begin{Vmatrix} -M_{qn} u(0, t) - P_{qn} u(l, t) \\ G_{n-q\,n}^{(1)} u(0, t) + G_{n-q\,n}^{(2)} u(l, t) \end{Vmatrix},$$

где $G_{n-q\,n}^{(1)}$ и $G_{n-q\,n}^{(2)}$ — некоторые матрицы, а $\begin{Vmatrix} M_{qn} & P_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{Vmatrix} = \| M, P \|$.

Таким образом, если $v \in C_0^{(1)}(\Omega)$, то

$$[l^* v(t)]^* G_{n\,2n} u(t) = -[l_q^{(1)*} v(t)]^* [M_{qn} u(0, t) + P_{qn} u(l, t)] =$$
$$= -[l^* v(t)]^* [Mu(0, t) + Pu(l, t)].$$

Это и доказывает равенство

$$[l^* v(t)]^* G_{n\,2n} u(t) = -[l^* v(t)]^* [Mu(0, t) + Pu(l, t)];$$

подставляя последнее выражение в (92), получим равенство (89).

Пусть теперь для любого $v \in C_0^{(1)}(\Omega)$ выполняется равенство (89). Докажем, что

$$Lu(x, t) = 0, \quad lu(t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l;\ 0 \leqslant t \leqslant T).$$

Из равенства (89) и тождества (90) следует, что

$$\iint_{\Omega(t)} v^*(\xi, t) Lu(\xi, \tau)\, d\xi d\tau =$$
$$= [f(\xi) - u(\xi, 0),\ v(\xi, 0)] + \int_0^t [H_{n\,2n} v(\tau)]^* lu(\tau)\, d\tau. \tag{93}$$

Рассматривая только такие функции $v(x, t) \in C_0^{(1)}(\Omega)$, которые в некоторой окрестности границы прямоугольника $\Omega(t)$ обращаются в нуль, из равенства (93) получим:

$$\iint_{\Omega(t)} v^*(\xi, \tau) Lu(\xi, \tau)\, d\xi d\tau = 0.$$

А это значит, что $Lu(\xi, \tau) = 0$ $(0 < \xi < l;\ 0 < t < T)$. По непрерывности это равенство распространяется и на граничные точки прямоугольника $\Omega = [0 \leqslant x \leqslant l;\ 0 \leqslant t \leqslant T]$. Отсюда

$$[f(\xi) - u(\xi, 0),\ v(\xi, 0)] + \int_0^t [H_{n\,2n} v(\tau)]^* \, lu(\tau)\, d\tau = 0.$$

Произвол в выборе функции $v(\xi, \tau) \in C_0^{(1)}(\Omega)$ дает:

$$[f(\xi) - u(\xi, 0),\ v(\xi, 0)] = 0 \text{ или } f(\xi) - u(\xi, 0) = 0.$$

Отсюда следует, что для любого $v(\xi, \tau) \in C_0^{(1)}(\Omega)$

$$\int_0^t [H_{n\,2n} v(\tau)]^* \, lu(\tau)\, d\tau = 0.$$

Так как $\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} H^{(1)} & H^{(2)} \\ S_{n-q\,n} & W_{n-q\,n} \end{Vmatrix} = 2n - q$ (см. [5], § 1), где $\| H^{(1)}, H^{(2)} \| = H_{n\,2n}$, то можно найти такую функцию $v(x, t) \in C_0^{(1)}(\Omega)$, что $H_{n\,2n} v(t)$ равно любой наперед заданной непрерывно дифференцируемой функции t $(0 \leqslant t \leqslant T)$, которую можно выбрать как угодно близкой к $lu(t)$. А это значит, что

$$\int_0^t \| lu(\tau) \|^2 d\tau = 0, \text{ т. е. } lu(\tau) = 0 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant T).$$

Лемма доказана.

Таким образом, уравнение (89), когда функция $v(x, t)$ пробегает множество $C_0^{(1)}(\Omega)$, $t \in [0, T]$, есть интегральный эквивалент смешанной задачи (1), (2), (3). Но так как уравнение (89) не содержит производных, то можно ожидать, что оно будет иметь решения и при менее сильных требованиях для начальных условий, чем те, при которых существует классическое решение.

Определение. Функция $u(x, t) \in M_2(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи (1), (2), (3) при $f(x) \in D_2(0, l)$, если для каждого $v(x, t) \in C_0^{(1)}(\Omega)$ и каждого $t \in [0, T]$ она удовлетворяет интегральному уравнению (89).

Отметим два свойства обобщенного решения.

Свойство 1. *Всякое классическое решение задачи* (1), (2), (3) *является ее обобщенным решением.*

Свойство 2. *Если для некоторой функции $f(x) \in D_2(0, l)$ при регулярных краевых условиях* (2) *обобщенное решение задачи* (1), (2), (3) *существует, то оно единственно (в смысле эквивалентности в $M_2(\Omega)$).*

Доказательство. Покажем, что если $f(x) \equiv 0$ (в смысле $D_2(0, l)$), то для каждого t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ $\| u(x, t) \|_{D_2(0,l)} = 0$. Пусть для $t = t_0$ $\| u(x, t) \|^2_{D_2(0,l)} = d > 0$. Построим функцию $\eta(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, для которой $\eta'(x)$ абсолютно непрерывна, а $\eta''(x) \in L_2(0, l)$, и которая удовлетворяет краевым условиям

$$-R_0\frac{d}{dx}[A^*(x)\eta(x)]\mid_{x=0}+[R_0B(0)+S_0]\eta(0)-V_0\frac{d}{dx}[A^*(x)\eta(x)]\mid_{x=l}+$$
$$+[V_0B^*(l)+W_0]\eta(l)=0, \tag{94a}$$

$$S_{n-q\,n}\eta(0)+W_{n-q\,n}\eta(l)=0, \tag{94b}$$

$$R\eta(0)+V\eta(l)=-Mu(0,t_0)-Pu(l,t_0), \tag{94c}$$

где R_0, S_0, V_0 и W_0 строятся из матриц R, S, V, W тем же способом каким матрицы M_0, P_0, N_0 и Q_0 строились из матриц M, P, N, Q, т. е.

$$\| R_0,\ V_0 \| = \begin{Vmatrix} R_{qn} & V_{qn} \\ S_{n-q\,n} & W_{n-q\,n} \end{Vmatrix},$$
$$\| S_0,\ W_0 \| = \begin{Vmatrix} S_{qn} & W_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{Vmatrix}.$$

Покажем, что краевые условия (94) непротиворечивы. Для этого положим

$$-\frac{d}{dx}[A^*(x)\eta(x)]\mid_{x=0}+B(0)\eta(0)=0,$$
$$-\frac{d}{dx}[A^*(x)\eta(x)]\mid_{x=l}+B^*(l)\eta(l)=0.$$

Из условий (94) будем иметь:

$$\begin{gathered} S\eta(0)+W\eta(l)=0, \\ R_{qn}\eta(0)+V_{qn}\eta(l)=-M_{qn}u(0,t_0)-P_{qn}u(l,t_0). \end{gathered} \tag{95}$$

Так как

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} S & W \\ R_{qn} & V_{qn} \end{Vmatrix}=n+q$$

(см. [5], следствие из леммы 2), то система (95) разрешима и функцию $\eta(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$, удовлетворяющую условиям (94), построить можно.

Кроме того, потребуем, чтобы для функции $\eta(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ выполнялось неравенство

$$\left|\int_0^l [u(\xi,t_0)-\eta(\xi)]^* u(\xi,t_0)\,d\xi\right|<\frac{d}{2}. \tag{96}$$

Построенная таким образом функция $\eta(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4 для смешанной задачи

$$L^*v(x,t)\equiv\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}[A^*(x)v(x,t)]+B^*(x)v(x,t)=0,$$

$$l^*v(t) \equiv R\frac{\partial v(0, t)}{\partial t} + Sv(0, t) + V\frac{\partial v(l, t)}{\partial t} + Wv(l, t) = 0,$$

$$v(x, t_0) = \eta(x),$$

а потому, согласно замечанию к теореме 4 (при его применении надо предварительно $t - t_0$ вновь обозначить через t), для этой задачи существует классическое решение $v(x, t) = \bar{v}(x, t)$. В силу граничного условия, $\bar{v}(x, t) \in C_0^{(1)}(\Omega)$. Из равенства (89) имеем тогда, что $[u(x, t_0), \eta(x)] = 0$, т. е.

$$\int_0^l \eta^*(\xi) u(\xi, t_0) d\xi + \| Mu(0, t_0) + Pu(l, t_0) \|^2 = 0.$$

Но

$$\int_0^l \eta^*(\xi) u(\xi, t_0) d\xi = \int_0^l [\eta(\xi) - u(\xi, t_0)]^* u(\xi, t_0) d\xi + \int_0^l \| u(\xi, t_0) \|^2 d\xi,$$

а потому

$$\| u(\xi, t_0) \|_{D_2(0,l)} + \int_0^l [u(\xi, t_0) - \eta(\xi)]^* u(\xi, t_0) d\xi = 0,$$

что противоречит равенству $\| u(x, t_0) \|_{D_2(0,l)} = d > 0$ и неравенству (96). Таким образом, $\| u(x, t) \|^2_{D_2(0,l)} = 0$ для любых $t \in [0, T]$, т. е. $\| u(x, t) \|_{M_2(\Omega)} = 0$. Свойство 2 доказано.

Следствие. *Если функция* $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 4, *а краевые условия* (2) *регулярны, то задача* (1), (2), (3) *имеет единственное классическое решение.*

Теорема 5. *Если краевые условия* (2) *регулярны, то для каждой функции* $f(x) \in D_2(0, l)$ *сумма ряда* (5) *есть обобщенное решение задачи* (1), (2), (3).

Доказательство. Так как каждый член ряда (5) является классическим решением краевой задачи (1), (2), то для частичной суммы $u^{(k)}(x, t)$ ряда (5), каждого t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ и каждого $v(x, \tau) \in C_0^{(1)}(\Omega)$ выполняется равенство

$$\begin{gathered}\iint_{\Omega(t)} [L^*v(\xi, \tau)]^* u^{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau - \\ - [u^{(k)}(x, t), v(x, t)] + [u^{(k)}(x, 0), v(x, 0)] - \\ - \int_0^t [l^*v(x, \tau)]^* [Mu^{(k)}(0, \tau) + Pu^{(k)}(l, \tau)] d\tau = 0. \end{gathered} \tag{97}$$

Если в правой части равенства (97) для каждого $t \in [0, T]$ и $v(x, \tau) \in C_0^{(1)}(\Omega)$ перейти к пределу при $k \to \infty$, то получим, что сумма ряда (5) удовлетворяет уравнению (89). Теорема доказана.

(Поступило в редакцию 20/V 1957 г.)

Литература

1. И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Москва, Гостехиздат, 1953.
2. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Москва — Ленинград, Гостехиздат, 1948.
3. О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, Москва, Гостехиздат, 1953.
4. А. Н. Крылов, Собрание трудов, т. III, ч. II, Москва, Изд. АН СССР, 1949.
5. В. Ф. Жданович, Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости. I, Матем. сб., **47** (**89**) (1959), 307—354.
6. В. Ф. Жданович, Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости. II, Матем. сб., **48** (**90**) (1959), 447—498.
7. М. Л. Расулов, Исследование вычетного метода решения некоторых смешанных задач для дифференциальных уравнений, Матем. сб., **30** (**72**) (1952), 509—528.
8. М. Л. Расулов, Вычетный метод решения смешанных задач для дифференциальных уравнений и формула разложения произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром, Матем. сб., **48** (**90**) (1959), 277—310.