Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости. I

В. Ф. Жданович (Минск)

В настоящей работе, на основании работ М. В. Келдыша о несамосопряженных операторах [1], Биркгофа и Лангера [2] и М. А. Наймарка [3] о дифференциальных операторах, А. Д. Мышкиса [4], [5], Н. А. Бразма и А. Д. Мышкиса [6] и О. А. Ладыженской [7] о смешанной задаче и С. Л. Соболева об обобщенных решениях, дается обоснование метода Фурье решения смешанных задач для системы

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t}=A(x)\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}+B(x)u(x,\ t) \tag{1}$$

$$(0\leqslant x\leqslant l<+\infty,\ 0\leqslant t\leqslant T<+\infty)$$

с краевыми условиями

$$M\frac{\partial u(0,\ t)}{\partial t}+Nu(0,\ t)+P\frac{\partial u(l,\ t)}{\partial t}+Qu(l,\ t)=0 \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u(x,\ 0)=f(x), \tag{3}$$

где $u(x,\ t)$ $(0\leqslant x\leqslant l,\ 0\leqslant t\leqslant T)$ — искомая n-мерная вектор-функция с комплексными координатами, $A(x)$ — дважды, а $B(x)$ — один раз непрерывно дифференцируемые на $[0,\ l]$ матрицы (комплексные или действительные) и, кроме того, матрица $A(x)$ имеет действительные, всюду на сегменте $[0, l]$ различные и нигде не обращающиеся на нем в нуль собственные значения; M, N, P и Q — постоянные матрицы, на которые будут наложены дополнительные условия, невыполнение которых носит характер вырождения, $f(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ — известная функция. Система (1) описывает процессы, происходящие в одномерной среде (процессы в электрических схемах, движение жидкости в системах труб, механические колебания решеток и др.) с учетом рассеяния энергии (последнее вызывает несамосопряженность системы (1)). Кроме того, в этих процессах, наряду с непрерывным распределением физических констант, допускается их сосредоточенное распределение в отдельных точках, что вызывает появление производной по t в краевых условиях. К такому типу задач относятся, например, смешанные задачи для обыкновенной системы телеграфных уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} + C(x)\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + G(x)v(x, t) = 0, \\ &\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + L(x)\frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + R(x)i(x, t) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

$$(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T),$$

где $i(x, t)$ и $v(x, t)$ — сила тока и напряжение в двухпроводной линии с потерями, а $C(x)$, $L(x)$, $G(x)$ и $R(x)$ — соответственно емкость, самоиндукция, утечка и сопротивление, распределенные вдоль линии; при этом функции $i(x, t)$ и $v(x, t)$ удовлетворяют некоторым краевым условиям $\left(\text{например, } i(0, t) = -\gamma\frac{\partial v(0, t)}{\partial t},\ v(l, t) = \rho i(l, t)\right)$ и некоторым начальным данным. К рассматриваемому типу смешанных задач относятся также задачи для обобщенной системы телеграфных уравнений [6], описывающие процессы в многопроводной линии с потерями. К задаче (1), (2), (3) можно свести многие смешанные задачи для одного уравнения высшего порядка с двумя независимыми переменными, содержащие в краевых условиях производные по x и t.

В первой части работы дается формальная схема построения решения задачи (1), (2), (3). Как и обычно в методе Фурье, в данном случае находится запас функций вида $y(x)e^{\lambda t}$ ($y(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ — вектор-функция, λ — комплексное число), удовлетворяющих системе (1) и краевым условиям (2). Для нахождения вектор-функций $y(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ получается задача, содержащая параметр λ, а именно, система

$$A(x)y'(x) + B(x)y(x) = \lambda y(x) \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$(M\lambda + N)y(0) + (P\lambda + Q)y(l) = 0. \tag{6}$$

Те значения λ, для которых эта система имеет ненулевые решения, называются, как обычно, *собственными значениями*, а соответствующие им функции $y(x)$ — *собственными функциями*. Для собственных значений получается характеристическое уравнение

$$\det[(M\lambda + N)Y(0, \lambda) + (P\lambda + Q)Y(l, \lambda)] = 0, \tag{7}$$

где $Y(x, \lambda)$ — какая-нибудь фундаментальная матрица системы (5).

Следующим шагом в схеме построения решения является разложение начальной функции $f(x)$ по собственным функциям $y_s(x)$ $(s = 0, \pm 1, \ldots)$ задачи (5), (6), т. е. получение представления

$$f(x) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} y_s(x)\alpha_s. \tag{8}$$

Для вычисления чисел α_s $(s = 0, \pm 1, \ldots)$ — коэффициентов разложения —

нельзя пользоваться формулами Фурье — Эйлера, так как функции $y_s(x)$ $(s=0, \pm 1, \ldots)$, вообще говоря, не ортогональны. Ввиду этого, для нахождения коэффициентов α_s $(s=0, \pm 1, \ldots)$ привлекаются собственные функции параметрической задачи, сопряженной задаче (5), (6). Системы собственных функций этих задач оказываются в некотором смысле биортогональными, что дает возможность построить формулы для коэффициентов α_s $(s=0, \pm 1, \ldots)$, аналогичные формулам Фурье — Эйлера.

Когда коэффициенты α_s $(s=0, \pm 1, \ldots)$ в разложении (8) получены, решение смешанной задачи (в случае простых собственных значений) строится в виде ряда

$$u(x, t)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty} y_s(x)\, e^{\lambda_s t} \alpha_s. \tag{9}$$

Если же все собственные значения (или некоторые из них) — кратные, то решение задачи (1), (2), (3) получается в виде ряда

$$u(x, t)=\sum_{s=-\infty}^{+\infty} Y_{nk_s}^{(s)}(x)\, e^{I_s t} a_s, \tag{10}$$

где $Y_{nk_s}^{(s)}(x)$ — прямоугольная матрица размерности $n \times k_s$, столбцами которой являются собственные и присоединенные функции задачи (5), (6) (о присоединенных функциях см. [1] или [3], стр. 21), I_s — некоторая квадратная квазидиагональная матрица размерности $k_s \times k_s$ и a_s — k_s-мерный вектор, являющийся линейным функционалом от начальных условий $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$.

Во второй и третьей частях работы дается обоснование изложенной схемы решения задачи (1), (2), (3) для так называемых регулярных краевых условий. Регулярными оказываются почти все краевые условия (2), за исключением вырожденных случаев, которые состоят в том, что некоторые определители, составленные из элементов матриц M, N, P, Q, $A(0)$ и $A(l)$, обращаются в нуль. Нужно заметить, что эта регулярность содержит, как частный случай, регулярность по Биркгофу (см. [2]), которая введена им для изучения параметрической задачи для системы (5) с краевыми условиями $My(0)+Ny(l)=0$. Для регулярных краевых условий (2) в третьей части строятся и изучаются классическое и обобщенное в смысле С. Л. Соболева (см. [7]) решения.

Значительная часть основных теорем настоящей работы сформулирована без доказательств в заметке автора [12] (см. также [13], стр. 62).

Настоящую работу в рукописи прочитал А. Д. Мышкис. Пользуюсь случаем, чтобы выразить ему благодарность за те замечания и советы, которые он при этом сделал и которые я использовал при доработке.

§ 1. Основная и сопряженная смешанные задачи

Прежде чем перейти к исследованию смешанной задачи, сделаем несколько замечаний относительно обозначений и основных понятий.

Квадратные матрицы обозначаем большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$. Их элементами будут либо постоянные комплексные числа $\alpha_{ik}: A=\|\alpha_{ik}\|$ $(i, k=1, 2, \ldots, n)$, либо комплексные функции действительного аргумента. Прямоугольные матрицы обозначаем такими же буквами, но только с индексами внизу (например, A_{mn}), причем первый индекс показывает число строк, второй — число столбцов: $A_{mn} = \| \alpha_{ik} \|$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ \ k = 1,\ 2, \ldots, n)$. A^*_{mn} будет означать матрицу, сопряженную с матрицей A_{mn} : i-й столбец $(i = 1, 2, \ldots, m)$ матрицы A^*_{mn} получается из i-й строки матрицы A_{mn} путем замены элементов на комплексно-сопряженные. Сложение матриц, умножение матрицы на число и произведение матриц определяются по обычным правилам. Нормой матрицы $A_{mn} = \| \alpha_{ij} \|$ будем называть число $\| A \| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} | \alpha_{ij} |^2}$. Имеют место неравенства

$$\text{a) } \| A_{mn} + B_{mn} \| \leqslant \| A_{mn} \| + \| B_{mn} \|, \ \text{b) } \| A_{mn} B_{np} \| \leqslant \| A_{mn} \| \cdot \| B_{np} \|. \quad (11)$$

Первое из этих неравенств есть не что иное, как неравенство треугольника для mn-мерного векторного пространства, которое образуют все прямоугольные матрицы из m строк и n столбцов. Доказательство второго неравенства получается из соотношения

$$\| A_{mn} B_{np} \|^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \Big| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_{jk} \Big|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{n} | \alpha_{ij} |^2 \sum_{j=1}^{n} | \beta_{jk} |^2 \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} | \alpha_{ij} |^2 \Big) \cdot \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{n} | \beta_{jk} |^2 \Big) = \| A_{mn} \|^2 \, \| B_{np} \|^2.$$

0_{mn} будет означать прямоугольную матрицу из нулей.

Векторы обозначаем малыми латинскими буквами: $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Их координатами будут либо постоянные комплексные числа, либо функции. Вектор будем отождествлять с прямоугольной матрицей, состоящей из одного столбца. Таким образом, если $a = \begin{Vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{Vmatrix}$, $b = \begin{Vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{Vmatrix}$, то $b^* = \| \bar\beta_1, \bar\beta_2, \ldots, \bar\beta_n \|$ и скалярное произведение $(a, b) = \alpha_1 \bar\beta_1 + \alpha_2 \bar\beta_2 + \ldots$ $\ldots + \alpha_n \bar\beta_n = b^* a$.

После этих замечаний перейдем к смешанной задаче и дадим ей следующую формулировку:

Найти функцию

$$u(x, t) = \begin{Vmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \\ \cdots\cdots \\ u_n(x, t) \end{Vmatrix} \quad (0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T),$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = A(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + B(x) u(x, t), \qquad (1)$$

краевым условиям

$$M\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} + Nu(0, t) + P\frac{\partial u(l, t)}{\partial t} + Qu(l, t) = 0 \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = f(x). \tag{3}$$

От матриц $A(x)$ и $B(x)$ будем требовать, чтобы они обладали указанными во введении свойствами, а именно, чтобы матрица $A(x)$ была дважды непрерывно дифференцируема на сегменте $[0, l]$, а $B(x)$ непрерывно дифференцируема на сегменте $[0, l]$ и, кроме того, чтобы матрица $A(x)$ приводилась к диагональному виду

$$\Lambda(x) = \left\| \begin{matrix} \nu_1(x) & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \nu_2(x) \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & \nu_n(x) \end{matrix} \right\|, \tag{12}$$

где $\nu_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — действительные, всюду различные и нигде не обращающиеся в нуль на $[0, l]$ функции. От матриц, входящих в условие (2), потребуем, чтобы они удовлетворяли следующему условию: если ранг матрицы $\|M, P\|$ равен q $(0 \leqslant q \leqslant n)$, то

$$\operatorname{rang} \left\| \begin{matrix} M & P \\ N & Q \end{matrix} \right\| = n + q. \tag{13}$$

Кроме того, потребуем, чтобы у матрицы $\|M, P\|$ в последних $n - q$ строчках все элементы были равны нулю. Это последнее ограничение несущественно, так как указанного вида для $\|M, P\|$ всегда можно достигнуть линейной комбинацией уравнений из условия (2), причем при таком преобразовании условие (13) не нарушается. На функцию $f(x)$ из условия (3) никаких ограничений пока налагать не будем, а определение ее наиболее общих свойств, обеспечивающих существование решения сформулированной задачи, включим в саму задачу.

Задачу (1), (2), (3) в изложенной формулировке будем называть основной, а краевые условия (2), для которых выполняется (13), — невырожденными.

Условия, наложенные на $\nu_i(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, означают, что система (1) должна быть гиперболической в узком смысле по И. Г. Петровскому (см. [9], стр. 81). Функции $\nu_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ всегда можно выбрать непрерывными и расположить их по диагонали в матрице $\Lambda(x)$ так, чтобы в матрице $\Lambda^{-1}(x)$ диагональные элементы располагались в убывающем порядке. В дальнейшем, не оговаривая особо, будем предполагать, что $\Lambda(x)$ обладает этими свойствами.

Кроме основной задачи, будем рассматривать еще сопряженную ей задачу. Для того чтобы сформулировать, в чем эта задача заключается, введем некоторые вспомогательные понятия. Пусть $C^{(1)}(\Omega)$ — линейное пространство непрерывно дифференцируемых на $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ функций. Введем для функций $u(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$ операторы

$$Lu(x, t) = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + A(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + B(x) u(x, t), \tag{14}$$

$$lu(t) = M\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} + Nu(0, t) + P\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} + Qu(l, t), \tag{15}$$

где $u(t) = \begin{Vmatrix} u(0, t) \\ u(l, t) \end{Vmatrix}$. Если, кроме $u(x, t)$, еще и $v(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$, то легко проверяется справедливость тождества

$$v^*(x, t) Lu(x, t) = -\frac{\partial}{\partial t}[v^*(x, t) u(x, t)] + \frac{\partial}{\partial x}[v^*(x, t) A(x) u(x, t)] +$$

$$+ [L^* v(x, t)]^* u(x, t), \tag{16}$$

где

$$L^* v(x, t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}[A^*(x) v(x, t)] + B^*(x) v(x, t). \tag{17}$$

Оператор $L^* v(x, t)$ назовем сопряженным оператору $Lu(x, t)$. Для оператора $lu(t)$ сопряженный оператор определим следующим образом:

Определение. Дифференциальный оператор

$$l^* v(t) = R\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} + Sv(0, t) + V\frac{\partial v(l,t)}{\partial t} + Wv(l, t), \tag{18}$$

где $v(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$, а $v(t) = \begin{Vmatrix} v(0, t) \\ v(l, t) \end{Vmatrix}$, называется сопряженным оператору $lu(t) = M\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} + Nu(0, t) + P\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} + Qu(l, t)$, где $u(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$, если найдутся такие матрицы $H_{n\,2n}$ и $G_{n\,2n}$, что выполняется тождество

$$v^*(x, t) A(x) u(x, t)\Big|_{x=0}^{x=l} = \frac{d}{dt}\{[Rv(0, t) + Vv(l, t)]^* [Mu(0, t) + Pu(l, t)] +$$

$$+ [H_{n\,2n}v(t)]^* lu(t) + [l^* v(t)]^* G_{n\,2n}u(t)\}. \tag{19}$$

Выясним некоторые нужные для дальнейшего свойства сопряженного оператора $l^* v(t)$, а также получим метод его построения.

Свойство 1. Если оператор $l^* v(t)$ является сопряженным оператору $lu(t)$, то и, обратно, оператор $lu(t)$ является сопряженным оператору $l^* v(t)$.

На основании этого свойства, мы можем в дальнейшем говорить о парах взаимно сопряженных операторов $lu(t)$ и $l^* v(t)$. Для его доказательства достаточно в левой и правой частях тождества (19) перейти к сопряженным матрицам.

Для того чтобы получить следующие свойства, докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Если* $\operatorname{rang}\|A_{mn}, B_{mn}\| = m$, *то из уравнений* $U_{nm}A_{mn} = 0$, $U_{nm}B_{mn} = 0$ *следует, что* $U_{nm} = 0_{nm}$.

Доказательство. Умножим справа первое из данных уравнений на X_{nm}, а второе — на Y_{nm}, где X_{nm} и Y_{nm} — пока неопределенные матрицы. Складывая полученные уравнения, получим:

$$U_{nm}(A_{mn}X_{nm}+B_{mn}Y_{nm})=0_{nm}. \tag{20}$$

Докажем, что можно так выбрать матрицы X_{nm} и Y_{nm}, что матрица $Z_{mm}=A_{mn}X_{nm}+B_{mn}Y_{nm}$ будет невырожденной. Так как rang $\| A_{mn}, B_{mn}\|=m$, то вычеркиванием столбцов из матрицы $\| A_{mn}, B_{mn}\|$ можно получить невырожденную матрицу C_{mm}. В матрице $\begin{Vmatrix} X_{nm} \\ Y_{nm} \end{Vmatrix}$ все строчки, имеющие номера вычеркнутых столбцов матрицы $\| A_{mn}, B_{mn}\|$, будем считать нулевыми, а оставшиеся строчки построим так, чтобы они образовали единичную матрицу E_{mm}. Тогда по правилу умножения блочных матриц (см. [10], стр. 42) будем иметь:

$$Z_{mm}=A_{mn}X_{nm}+B_{mn}Y_{nm}=\| A_{mn}, B_{mn}\|\cdot\begin{Vmatrix} X_{nm} \\ Y_{nm} \end{Vmatrix}=C_{mm},$$

и, следовательно, Z_{mm} — невырожденная матрица. А тогда умножение левой и правой частей равенства (20) на Z_{mm}^{-1} справа даст: $U_{nm}=0$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Для того чтобы выполнялось тождество* (19), *необходимо и достаточно, чтобы между матрицами* $H_{n\,2n}=\| H^{(1)}, H^{(2)}\|$, $G_{n\,2n}=\| G^{(1)}, G^{(2)}\|$ *и матрицами* R, V, S, W, M, P, N, Q *имели место соотношения*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I a) } (H^{(1)*}+R^*)M=0, & \text{I b) } (H^{(1)*}+R^*)P=0, \\ \text{II a) } (H^{(2)*}+V^*)M=0, & \text{II b) } (H^{(2)*}+V^*)P=0, \\ \text{III a) } (G^{(1)*}+M^*)R=0, & \text{III b) } (G^{(1)*}+M^*)V=0, \\ \text{IV a) } (G^{(2)*}+P^*)R=0, & \text{IV b) } (G^{(2)*}+P^*)V=0 \end{array}\right\} \tag{21}$$

и соотношение

$$\begin{Vmatrix} H^{(1)*} & S^* \\ H^{(2)*} & W^* \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} N & Q \\ G^{(1)} & G^{(2)} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} -A(0) & 0 \\ 0 & A(l) \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть выполняется тождество (19) и пусть $u(t)=\begin{Vmatrix} u(0, t) \\ u(l, t) \end{Vmatrix}$, $v(t)=\begin{Vmatrix} v(0, t) \\ v(l, t) \end{Vmatrix}$. Тогда, используя то, что для любых матриц A_1, A_2, B_1, B_2

$$[A_1v(0, t)+A_2v(l, t)]^*[B_1u(0, t)+B_2u(l, t)]=v^*(t)\begin{Vmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{Vmatrix}\cdot\| B_1, B_2\| u(t),$$

тождество (19) можно переписать в виде:

$$v^*(t)\begin{Vmatrix}-A(0) & 0\\ 0 & A(l)\end{Vmatrix}u(t)=\frac{d}{dt}\left\{v^*(t)\begin{Vmatrix}R^*\\ V^*\end{Vmatrix}\cdot\|M,\ P\|u(t)\right\}+$$

$$+v^*(t)\begin{Vmatrix}H^{(1)*}\\ H^{(2)*}\end{Vmatrix}\|M,\ P\|\frac{du(t)}{dt}+v^*(t)\begin{Vmatrix}H^{(1)*}\\ H^{(2)*}\end{Vmatrix}\cdot\|N,\ Q\|u(t)+$$

$$+\frac{dv^*(t)}{dt}\begin{Vmatrix}R^*\\ V^*\end{Vmatrix}\cdot\|G^{(1)},\ G^{(2)}\|u(t)+v^*(t)\begin{Vmatrix}S^*\\ W^*\end{Vmatrix}\cdot\|G^{(1)},\ G^{(2)}\|u(t).$$

Произведем дифференцирование в первом члене правой части и члены полученного тождества сгруппируем следующим образом:

$$v^*(t)\left\{\begin{Vmatrix}-A(0) & 0\\ 0 & A(l)\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}H^{(1)*}\\ H^{(2)*}\end{Vmatrix}\cdot\|N,\ Q\|-\begin{Vmatrix}S^*\\ W^*\end{Vmatrix}\cdot\|G^{(1)},\ G^{(2)}\|\right\}u(t)=$$

$$=\frac{dv^*(t)}{dt}\left\{\begin{Vmatrix}R^*\\ V^*\end{Vmatrix}\cdot\|M,\ P\|+\begin{Vmatrix}R^*\\ V^*\end{Vmatrix}\|G^{(1)},\ G^{(2)}\|\right\}u(t)+$$

$$+v^*(t)\left\{\begin{Vmatrix}R^*\\ V^*\end{Vmatrix}\cdot\|M,\ P\|+\begin{Vmatrix}H^{(1)*}\\ H^{(2)*}\end{Vmatrix}\cdot\|M,\ P\|\right\}\frac{du(t)}{dt}. \qquad (23)$$

Докажем, что

$$\left.\begin{aligned}&\text{a)}\ \|\alpha_{ij}\|=\begin{Vmatrix}H^{(1)*}\\ H^{(2)*}\end{Vmatrix}\|N,\ Q\|+\begin{Vmatrix}S^*\\ W^*\end{Vmatrix}\|G^{(1)},\ G^{(2)}\|-\begin{Vmatrix}-A(0) & 0\\ 0 & A(l)\end{Vmatrix}=0,\\ &\text{b)}\ \|\beta_{ij}\|=\begin{Vmatrix}R^*\\ V^*\end{Vmatrix}\|M,\ P\|+\begin{Vmatrix}R^*\\ V^*\end{Vmatrix}\|G^{(1)},\ G^{(2)}\|=0,\\ &\text{c)}\ \|\gamma_{ij}\|=\begin{Vmatrix}R^*\\ V^*\end{Vmatrix}\|M,\ P\|+\begin{Vmatrix}H^{(1)*}\\ H^{(2)*}\end{Vmatrix}\|M,\ P\|=0\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

$$(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n).$$

Для этого в тождестве (23) положим $v(t)=e_i$, $u(t)=e_j$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$, где e_i — вектор, у которого i-я координата равна единице, а все остальные равны нулю, и получим: $\alpha_{ij}=0$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$, откуда следует равенство (24a). Если же после этого в тождестве (23) положить $\frac{dv(t)}{dt}=e_i$, $u(t)=e_j$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$, то получим: $\beta_{ij}=0$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$, что доказывает равенство (24b). Для доказательства равенства (24c) в тождестве (23) достаточно положить $v(t)=e_i$, $\frac{du(t)}{dt}=e_j$ $(i,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n)$ и учесть уже доказанное равенство (24a). Так как

$$\begin{Vmatrix}H^{(1)*}\\ H^{(2)*}\end{Vmatrix}\cdot\|N,\ Q\|+\begin{Vmatrix}S^*\\ W^*\end{Vmatrix}\cdot\|G^{(1)},\ G^{(2)}\|=\begin{Vmatrix}H^{(1)*}N & H^{(1)*}Q\\ H^{(2)*}N & H^{(2)*}Q\end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix}S^*G^{(1)} & S^*G^{(2)}\\ W^*G^{(1)} & W^*G^{(2)}\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}H^{(1^*)}N+S^*G^{(1)} & H^{(1)*}Q+S^*G^{(2)}\\ H^{(2)*}N+W^*G^{(1)} & H^{(2)*}Q+W^*G^{(2)}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}H^{(1)*} & S^*\\ H^{(2)*} & W^*\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}N & Q\\ G^{(1)} & G^{(2)}\end{Vmatrix},$$

то из (24a) следует равенство (22). Из (24b) и (24c) получаем:

$$\left\|\begin{matrix} R^* \\ V^* \end{matrix}\right\| \| M, P \| + \left\|\begin{matrix} R^* \\ V^* \end{matrix}\right\| \| G^{(1)}, G^{(2)} \| = \left\|\begin{matrix} R^*(M + G^{(1)}) & R^*(P + G^{(2)}) \\ V^*(M + G^{(1)}) & V^*(P + G^{(2)}) \end{matrix}\right\| = 0,$$

$$\left\|\begin{matrix} R^* \\ V^* \end{matrix}\right\| \| M, P \| + \left\|\begin{matrix} H^{(1)*} \\ H^{(2)*} \end{matrix}\right\| \| M, P \| = \left\|\begin{matrix} (R^* + H^{(1)*}) M & (R^* + H^{(1)*}) P \\ (V^* + H^{(2)*}) M & (V^* + H^{(2)*}) P \end{matrix}\right\| = 0,$$

что доказывает равенства (21).

Если же, наоборот, выполняются равенства (21) и (22), то выполняются равенства (24), а тогда имеет место тождество (23) и, следовательно, имеет место эквивалентное ему тождество (19). Лемма доказана.

Следствие. *Если имеет место тождество* (19), *то матрицы* $\left\|\begin{matrix} H^{(1)} & H^{(2)} \\ S & W \end{matrix}\right\|$ *и* $\left\|\begin{matrix} N & Q \\ G^{(1)} & G^{(2)} \end{matrix}\right\|$ *не выроящены.*

Лемма 3. *Пусть для оператора*

$$lu(t) = M\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} + P\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} + Nu(0, t) + Qu(l, t),$$

где

$$\| M, P \| = \left\|\begin{matrix} M_{qn} & P_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{matrix}\right\|, \quad \operatorname{rang} \| M_{qn}, P_{qn} \| = q,$$

существует сопряженный оператор $l^* v(t) = R\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} + V\frac{\partial v(l,t)}{\partial t} + Sv(0, t) + Wv(l, t)$, *удовлетворяющий тождеству* (19) *при некоторых матрицах*

$$G_{n\,2n} = \| G^{(1)}, G^{(2)} \| = \left\|\begin{matrix} G^{(1)}_{qn} & G^{(2)}_{qn} \\ G^{(1)}_{n-q\,n} & G^{(2)}_{n-q\,n} \end{matrix}\right\|$$

и

$$H_{n\,2n} = \| H^{(1)}, H^{(2)} \| = \left\|\begin{matrix} H^{(1)}_{qn} & H^{(2)}_{n-q\,n} \\ H^{(1)}_{n-q\,n} & H^{(2)}_{n-q\,n} \end{matrix}\right\|.$$

Тогда можно построить второй оператор $\tilde{l}^* v(t) = \tilde{R}\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} + \tilde{V}\frac{\partial v(l,t)}{\partial t} + \tilde{S}v(0, t) + \tilde{W}v(l, t)$, *сопряженный оператору* $lu(t)$ *и удовлетворяющий тождеству* (19) *для матриц*

$$\tilde{G}_{n\,2n} = \left\|\begin{matrix} -M_{qn} & -P_{qn} \\ G^{(1)}_{n-q\,n} & G^{(2)}_{n-q\,n} \end{matrix}\right\|, \quad \tilde{H}_{n\,2n} = \left\|\begin{matrix} -R_{qn} & -V_{qn} \\ H^{(1)}_{n-q\,n} & H^{(2)}_{n-q\,n} \end{matrix}\right\|, \tag{25}$$

у которого

$$\| \tilde{R}, \tilde{V} \| = \left\|\begin{matrix} R_{qn} & V_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{matrix}\right\|, \quad \operatorname{rang} \| R_{qn}, V_{qn} \| = q$$

При этом $\operatorname{rang} G_{n\,2n} = \operatorname{rang} H_{n\,2n} = \operatorname{rang} \tilde{G}_{n\,2n} = \operatorname{rang} \tilde{H}_{n\,2n} = n$, *а измененное граничное условие* $\tilde{l}^* v(t) = 0$ *равносильно условию* $l^* v(t) = 0$.

Доказательство. Так как $M = \left\|\begin{matrix} M_{qn} \\ 0_{n-q\,n} \end{matrix}\right\|$ и $P = \left\|\begin{matrix} P_{qn} \\ 0_{n-q\,n} \end{matrix}\right\|$, то из равенств (21) Ia) и Ib) следует, что $(H_{qn}^{(1)*}+R_{qn}^{*})M_{qn}=0$ и $(H_{qn}^{(1)*}+R_{qn}^{*})P_{qn}=0$. Так как $\operatorname{rang}\|M_{qn}, P_{qn}\|=q$, то из леммы 1 вытекает, что $H_{qn}^{(1)*}+R_{qn}^{*}=0_{nq}$, т. е. $H_{qn}^{(1)}=-R_{qn}$. Аналогично доказывается, что $H_{qn}^{(2)}=-V_{qn}$. Из следствия из леммы 2 вытекает, что строчки матрицы $\|H^{(1)}, H^{(2)}\|$ линейно независимы, откуда получается, что $\operatorname{rang}\|R_{qn}, V_{qn}\|=$ $=\operatorname{rang}\|-H_{qn}^{(1)}, -H_{qn}^{(2)}\|=q$.

Из того, что $M=\left\|\begin{matrix}M_{qn}\\0_{n-q\,n}\end{matrix}\right\|$ и $P=\left\|\begin{matrix}P_{qn}\\0_{n-q\,n}\end{matrix}\right\|$, из равенств (21) IIIa) и и IVa) следует, что

$$R_{qn}^{*}(G_{qn}^{(1)}+M_{qn})+R_{n-q\,n}^{*}G_{n-q\,n}^{(1)}=0,\quad R_{qn}^{*}(G_{qn}^{(2)}+P_{qn})+R_{n-q\,n}^{*}G_{n-q\,n}^{(2)}=0$$

или

$$R_{qn}^{*}\|G_{qn}^{(1)}+M_{qn}, G_{qn}^{(2)}+P_{qn}\|+R_{n-q\,n}^{*}\|G_{n-q\,n}^{(1)}, G_{n-q\,n}^{(2)}\|=0.$$

Так как $\operatorname{rang}\|G_{n-q\,n}^{(1)}, G_{n-q\,n}^{(2)}\|=n-q$ (это вытекает из следствия из леммы 2), то в матрице $\|G_{n-q\,n}^{(1)}, G_{n-q\,n}^{(2)}\|$ можно выбрать $n-q$ столбцов так, что они образуют невырожденную матрицу $T_{n-q\,n-q}$. Пусть $K_{q\,n-q}$ — матрица, образованная из соответствующих столбцов матрицы $\|G_{qn}^{(1)}+M_{qn}, G_{qn}^{(2)}+P_{qn}\|$. Тогда из последнего равенства следует, что

$$R_{qn}^{*}K_{q\,n-q}+R_{n-q\,n}^{*}T_{n-q\,n-q}=0_{n\,n-q}.$$

Отсюда

$$R_{n-q\,n}=Q_{n-q\,q}R_{qn}, \tag{26*}$$

где $Q_{n-q\,q}=-T_{n-q\,n-q}^{*-1}K_{q\,n-q}^{*}$. Аналогично, из равенств (21) IIIb) и IVb) получается равенство

$$V_{n-q\,n}=Q_{n-q\,q}V_{qn}. \tag{26**}$$

Из равенств

$$R_{qn}^{*}(G_{qn}^{(1)}+M_{qn})+R_{n-q\,n}^{*}G_{n-q\,n}^{(1)}=0,\quad V_{qn}^{*}(G_{qn}^{(1)}+M_{qn})+V_{n-q\,n}^{*}G_{n-q\,n}^{(1)}=0,$$

которые мы использовали выше, и равенств (26*) и (26**) получаем, что

$$R_{qn}^{*}(G_{qn}^{(1)}+M_{qn}+Q_{n-q\,q}^{*}G_{n-q\,n}^{(1)})=0,\quad V_{qn}^{*}(G_{qn}^{(1)}+M_{qn}+Q_{n-q\,q}^{*}G_{n-q\,n}^{(1)})=0.$$

Так как $\operatorname{rang}\|R_{qn}, V_{qn}\|=q$, то из леммы 1 следует, что

$$G_{qn}^{(1)}+M_{qn}+Q_{n-q\,q}^{*}G_{n-q\,n}^{(1)}=0_{qn}. \tag{27*}$$

Аналогично доказывается, что

$$G_{qn}^{(2)}+P_{qn}+Q_{n-q\,q}^{*}G_{n-q\,n}^{(2)}=0_{qn}. \tag{27**}$$

Теперь положим

$$\| \widetilde{R}, \widetilde{V} \| = \begin{Vmatrix} R_{qn} & V_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{Vmatrix}, \quad \widetilde{S} = \begin{Vmatrix} S_{qn} \\ S_{n-q\,n} - Q_{n-q\,q} S_{qn} \end{Vmatrix},$$

$$\widetilde{W} = \begin{Vmatrix} W_{qn} \\ W_{n-q\,n} - Q_{n-q\,q} W_{qn} \end{Vmatrix},$$

$$\widetilde{G}_{n\,2n} = \begin{Vmatrix} -M_{qn} & -P_{qn} \\ G^{(1)}_{n-q\,n} & G^{(2)}_{n-q\,n} \end{Vmatrix}, \quad \widetilde{H}_{n\,2n} = H_{n\,2n}.$$

Простой подстановкой проверяем, что построенные матрицы удовлетворяют равенствам (21). Для того чтобы доказать, что они удовлетворяют и равенству (22), заметим, что если воспользоваться равенством (27*), то будем иметь:

$$\widetilde{S}^* \widetilde{G}^{(1)} = -S^*_{qn} (M_{qn} + Q^*_{n-q\,q} G^{(1)}_{n-q\,n}) + S^*_{n-q\,n} G^{(1)}_{n-q\,n} =$$

$$= S^*_{qn} G^{(1)}_{qn} + S^*_{n-q\,n} G^{(1)}_{n-q\,n} = S^* G^{(1)}.$$

Аналогично устанавливается, что

$$\widetilde{W}^* \widetilde{G}^{(1)} = W^* G^{(1)}, \quad \widetilde{S}^* \widetilde{G}^{(2)} = S^* G^{(2)}, \quad \widetilde{W}^* \widetilde{G}^{(2)} = W^* G^{(2)},$$

причем при доказательстве последних двух равенств нужно воспользоваться равенством (27**). Но тогда

$$\begin{Vmatrix} \widetilde{H}^{(1)*} & \widetilde{S}^* \\ \widetilde{H}^{(2)*} & \widetilde{W}^* \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} N & Q \\ \widetilde{G}^{(1)} & \widetilde{G}^{(2)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \widetilde{H}^{(1)*} N + \widetilde{S}^* \widetilde{G}^{(1)} & \widetilde{H}^{(1)*} Q + \widetilde{S}^* \widetilde{G}^{(2)} \\ \widetilde{H}^{(2)*} N + \widetilde{W}^* \widetilde{G}^{(1)} & \widetilde{H}^{(2)*} Q + \widetilde{W}^* \widetilde{G}^{(2)} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} H^{(1)*} N + S^* G^{(1)} & H^{(1)*} Q + S^* G^{(2)} \\ H^{(2)*} N + W^* G^{(1)} & H^{(2)*} Q + W^* G^{(2)} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} H^{(1)*} & S^* \\ H^{(2)*} & W^* \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} N & Q \\ G^{(1)} & G^{(2)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -A(0) & 0 \\ 0 & A(l) \end{Vmatrix},$$

т. е. выполняется и равенство (22). По лемме 2 отсюда следует, что оператор $\widetilde{l}^* v(t)$ удовлетворяет тождеству (19) для матриц $\widetilde{G}_{n\,2n}$ и $\widetilde{H}_{n\,2n}$ и является сопряженным к оператору $lu(t)$. Теперь матрицы $\|\widetilde{R}, \widetilde{V}\|$, $\widetilde{G}_{n\,2n}$, $\widetilde{H}_{n\,2n}$ имеют требуемый условием леммы вид; кроме того, $\operatorname{rang} \widetilde{G}_{n\,2n} = \operatorname{rang} \widetilde{H}_{n\,2n} = \operatorname{rang} G_{n\,2n} = \operatorname{rang} H_{n\,2n} = n$ (последнее следует из равенства (22)). Наконец, эквивалентность граничных условий $\widetilde{l}^* v(t) = 0$ и $l^* v(t) = 0$ вытекает из следующего легко проверяемого с помощью равенств (26*) и (26**) соотношения:

$$\begin{Vmatrix} E_{qq} & 0_{q\,n-q} \\ -Q_{n-q\,q} & E_{n-q\,n-q} \end{Vmatrix} \cdot \| R\ S\ V\ W \| = \| \widetilde{R}\ \widetilde{S}\ \widetilde{V}\ \widetilde{W} \|.$$

Лемма доказана.

Замечание. Лемма 3 показывает, что без ограничения общности можно считать, что не только матрицы M, P, но и матрицы R, V имеют специальный вид:

$$M=\left\|\begin{matrix} M_{qn} \\ 0_{n-q\,n}\end{matrix}\right\|,\quad P=\left\|\begin{matrix} P_{qn} \\ 0_{n-q\,n}\end{matrix}\right\|,\quad R=\left\|\begin{matrix} R_{qn} \\ 0_{n-q\,n}\end{matrix}\right\|,\quad V=\left\|\begin{matrix} V_{qn} \\ 0_{n-q\,n}\end{matrix}\right\|,$$
$$\operatorname{rang}\| M_{qn}P_{qn}\| = \operatorname{rang}\| R_{qn}V_{qn}\| = q. \tag{28}$$

Мы так и будем считать без особой оговорки. При этом начало доказательства леммы 3 показывает, что тогда сами матрицы $G_{n\,2n}$ и $H_{n\,2n}$ имеют вид (25).

Свойство 2. Если оператор $lu(t)$ соответствует невырожденным краевым условиям (2), то сопряженный ему оператор $l^*v(t)$ также будет порождать невырожденные краевые условия.

Доказательство. Согласно лемме 3, $\|R, V\| = \left\|\begin{matrix} R_{qn} & V_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n}\end{matrix}\right\|$ и, в силу этой же леммы и следствия из леммы 2, матрица

$$\left\|\begin{matrix} H^{(1)} & H^{(2)} \\ S & W\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} -R_{qn} & -V_{qn} \\ H^{(1)}_{n-q\,n} & H^{(2)}_{n-q\,n} \\ S & W\end{matrix}\right\|$$

— невырожденная, а потому $\operatorname{rang}\left\|\begin{matrix} R_{qn} & V_{qn} \\ S & W\end{matrix}\right\| = n+q$, что и доказывает свойство 2.

Замечание. Из доказанных лемм следует более сильное утверждение, чем свойство 2, а именно, из них следует, что если два оператора $lu(t)$ и $l^*v(t)$ взаимно сопряжены и если имеют место формулы (28), то эти операторы порождают невырожденные краевые условия. Однако нам удобнее в дальнейшем ссылаться не на это утверждение, а на свойство 2.

Лемма 4. *Для того чтобы операторы* $lu(t) = M\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} + Nu(0, t) + P\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} + Qu(l, t)$ *и* $l_1v(t) = R\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} + Sv(0, t) + V\frac{\partial v(l,t)}{\partial t} + Wv(l, t)$ *при условиях* (28) *были взаимно сопряженными, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие матрицы* $\| C^{(1)}_{n-q\,n}, C^{(2)}_{n-q\,n}\|$ *и* $\| D^{(1)}_{n-q\,n}, D^{(2)}_{n-q\,n}\|$, *для которых выполнялось бы равенство*

$$\left\|\begin{matrix} -R^*_{qn} & C^{(1)*}_{n-q\,n} & S^* \\ -V^*_{qn} & C^{(2)*}_{n-q\,n} & W^*\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} N & Q \\ -M_{qn} & -P_{qn} \\ D^{(1)}_{n-q\,n} & D^{(2)}_{n-q\,n}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} -A(0) & 0 \\ 0 & A(l)\end{matrix}\right\|. \tag{29}$$

Доказательство. Если операторы $lu(t)$ и $l_1v(t)$ являются взаимно сопряженными, то выполняется тождество (19), а тогда из равенства (22) и представления (25) следует равенство (29), причем $C^{(i)}_{n-q\,n} = H^{(i)}_{n-q\,n}$, $D^{(i)}_{n-q\,n} = C^{(i)}_{n-q\,n}$ $(i = 1, 2)$. Если же, наоборот, существуют матрицы $C^{(1)}_{n-q\,n}$,

$C^{(2)}_{n-q\,n}$, $D^{(1)}_{n-q\,n}$, $D^{(2)}_{n-q\,n}$, для которых выполняется условие (29), то положим

$$H_{n\,2n}=\begin{Vmatrix}-R_{qn} & -V_{qn}\\ C^{(1)}_{n-q\,n} & C^{(2)}_{n-q\,n}\end{Vmatrix},\quad G_{n\,2n}=\begin{Vmatrix}-M_{qn} & -P_{qn}\\ D^{(1)}_{n-q\,n} & D^{(2)}_{n-q\,n}\end{Vmatrix}\tag{30}$$

и докажем, что для этих $H_{n\,2n}$ и $G_{n\,2n}$ и данных $lu(t)$ и $l_1v(t)$ будет выполняться тождество (19), т. е. операторы $lu(t)$ и $l_1v(t)$ будут взаимно сопряженными. Но, пользуясь специальным видом матриц $\|R, V\|$, $\|M, P\|$, $H_{n\,2n}$, $G_{n\,2n}$ и равенством (29), убеждаемся, что матрицы R, V, M, P, S, W, N, Q, $H_{n\,2n}$ и $G_{n\,2n}$ удовлетворяют соотношениям (21) и (22), а тогда из леммы 2 следует, что $lu(t)$ и $l_1v(t)$ — взаимно сопряженные операторы. Лемма доказана.

Свойство 3. Если оператор $l^*v(t)=R\frac{\partial v(0,t)}{\partial t}+Sv(0,t)+V\frac{\partial v(l,t)}{\partial t}+$ $+Wv(l,t)$ является сопряженным оператору $lu(t)=M\frac{\partial u(0,t)}{\partial t}+Nu(0,t)+$ $+P\frac{\partial u(l,t)}{\partial t}+Qu(l,t)$ (при условиях (28)), то матрицы R, V, S, W связаны с матрицами M, P, N, Q соотношениями

$$\begin{aligned}&\text{a) } MA^{-1}(0)S^*-PA^{-1}(l)W^*=E_q,\quad \text{b) } -MA^{-1}(0)R^*+PA^{-1}(l)V^*=0,\\ &\text{c) } -NA^{-1}(0)S^*+QA^{-1}(l)W^*=0,\quad \text{d) } NA^{-1}(0)R^*-QA^{-1}(l)V^*=E_q,\end{aligned}\tag{31}$$

где

$$E_q=\begin{Vmatrix}E_{qq} & 0_{q\,n-q}\\ 0_{n-q\,q} & 0_{n-q\,n-q}\end{Vmatrix}$$ и E_{qq} — единичная матрица.

Доказательство. Из лемм 2 и 3 следует, что

$$\begin{Vmatrix}-R^*_{qn} & H^{(1)*}_{n-q\,n} & S^*\\ -V^*_{qn} & H^{(2)*}_{n-q\,n} & W^*\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}N & Q\\ -M_{qn} & -P_{qn}\\ G^{(1)}_{n-q\,n} & G^{(2)}_{n-q\,n}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}-A(0) & 0\\ 0 & A(l)\end{Vmatrix}\tag{32}$$

или

$$\begin{Vmatrix}-R^*_{qn} & H^{(1)*}_{n-q\,n} & S^*\\ -V^*_{qn} & H^{(2)*}_{n-q\,n} & W^*\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-NA^{-1}(0) & QA^{-1}(l)\\ M_{qn}A^{-1}(0) & -P_{qn}A^{-1}(l)\\ -G^{(1)}_{n-q\,n}A^{-1}(0) & G^{(2)}_{n-q\,n}A^{-1}(l)\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{Vmatrix}.\tag{33}$$

Так как взаимно обратные матрицы перестановочны, то

$$\begin{Vmatrix}-NA^{-1}(0) & QA^{-1}(l)\\ M_{qn}A^{-1}(0) & -P_{qn}A^{-1}(l)\\ -G^{(1)}_{n-q\,n}A^{-1}(0) & G^{(2)}_{n-q\,n}A^{-1}(l)\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}-R^*_{qn} & H^{(1)*}_{n-q\,n} & S^*\\ -V^*_{qn} & H^{(2)*}_{n-q\,n} & W^*\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{Vmatrix}.\tag{34}$$

Производя перемножение матриц слева и пользуясь представлениями (28) как раз и получим равенства (31). Свойство 3 доказано.

Перейдем к вопросу о существовании сопряженного оператора.

Теорема 1. *Если оператор* $lu(t) = M\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} + Nu(0, t) + P\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} + Qu(l, t)$, *где* $\|M, P\| = \begin{Vmatrix} M_{qn} & P_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{Vmatrix}$ *и* $\operatorname{rang} \|M_{qn}, P_{qn}\| = q$, *является оператором, соответствующим невырожденным краевым условиям, то для него существует сопряженный оператор* $l^*v(t) = R\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} + Su(0, t) + V\frac{\partial u(l,t)}{\partial t} + Wu(l, t)$ (*вообще говоря, неединственный*); *матрицы* R, S, V, W *для этого оператора находятся по формулам*:

$$R = \begin{Vmatrix} -K_{nq}^{(1)*} \\ 0_{n-q\,n} \end{Vmatrix}, \quad V = \begin{Vmatrix} -K_{nq}^{(3)*} \\ 0_{n-q\,n} \end{Vmatrix}, \quad S = K_{nn}^{(2)*}, \quad W = K_{nn}^{(4)*}, \tag{35}$$

где

$$\begin{Vmatrix} K_{nq}^{(1)} & K_{n\,n-q}^{(1)} & K_{nn}^{(2)} \\ K_{nq}^{(3)} & K_{n\,n-q}^{(3)} & K_{nn}^{(4)} \end{Vmatrix} = K^{-1}, \quad K = \begin{Vmatrix} -NA^{-1}(0) & QA^{-1}(l) \\ M_{qn}A^{-1}(0) & -P_{qn}A^{-1}(l) \\ -D_{n-q\,n}^{(1)}A^{-1}(0) & D_{n-q\,n}^{(2)}A^{-1}(l) \end{Vmatrix}, \tag{36}$$

а $\|D_{n-q\,n}^{(1)}, D_{n-q\,n}^{(2)}\|$ — *произвольная матрица, удовлетворяющая условию*

$$\det \begin{Vmatrix} N & Q \\ M_{qn} & P_{qn} \\ D_{n-q\,n}^{(1)} & D_{n-q\,n}^{(2)} \end{Vmatrix} \neq 0. \tag{37}$$

Доказательство. Так как оператор $lu(t)$ соответствует невырожденным краевым условиям, то выполняется условие (13) и, следовательно, существует матрица $\|D_{n-q\,n}^{(1)}, D_{n-q\,n}^{(2)}\|$, для которой будет выполняться условие (37). Но тогда уравнение

$$X \begin{Vmatrix} N & Q \\ M_{qn} & P_{qn} \\ D_{n-q\,n}^{(1)} & D_{n-q\,n}^{(2)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -A(0) & 0 \\ 0 & A(l) \end{Vmatrix}, \tag{38}$$

которое можно переписать в виде $XK = E$, где K — то же, что и в соотношении (36), будет разрешимо. Разобьем матрицу $X = K^{-1}$ на блоки так, как это указано в условии теоремы. Если теперь положим

$$\begin{Vmatrix} -K_{nq}^{(1)*} \\ 0_{n-q\,n} \end{Vmatrix} = R, \quad \begin{Vmatrix} -K_{nq}^{(3)*} \\ 0_{n-q\,n} \end{Vmatrix} = V, \quad K_{nn}^{(2)*} = S, \quad K_{nn}^{(4)*} = W, \tag{39}$$

то матрицы R, V, S, W, как это следует из соотношения (38), удовлетворяют условию (29) для $C_{n-q\,n}^{(1)} = K_{n\,n-q}^{(1)*}$, $C_{n-q\,n}^{(2)} = K_{n\,n-q}^{(3)*}$. Из леммы 4 следует, что оператор $l^*v(t) = R\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} + Sv(0, t) + V\frac{\partial v(l,t)}{\partial t} + Wv(l, t)$, построенный из этих матриц, будет оператором, сопряженным оператору $lu(t)$.

Для доказательства теоремы остается показать, что только что описанным способом можно получить любой из сопряженных операторов (при условии (28)). Пусть $\mathring{l}v(t) = \mathring{R}\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} + \mathring{S}v(0, t) + \mathring{V}\frac{\partial v(l,t)}{\partial t} + \mathring{W}v(l, t)$ —

какой-нибудь из операторов, сопряженных оператору $lu(t)$. Тогда для некоторых $\overset{\circ}{H}_{n\,2n}$ и $\overset{\circ}{G}_{n\,2n}$ выполняется тождество (19), причем $\overset{\circ}{R}$ и $\overset{\circ}{V}$ имеют вид $\|\overset{\circ}{R},\ \overset{\circ}{V}\| = \begin{Vmatrix} \overset{\circ}{R}_{qn} & \overset{\circ}{V}_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{Vmatrix}$. Из лемм 2 и 3 следует, что между матрицами $\overset{\circ}{R}, \overset{\circ}{V}, \overset{\circ}{S}, \overset{\circ}{W}, \overset{\circ}{H}_{n\,2n}, \overset{\circ}{G}_{n\,2n}$ и M, P, N, Q имеет место соотношение

$$\begin{Vmatrix} -\overset{\circ}{R}{}^{*}_{qn} & \overset{\circ}{H}{}^{(1)*}_{n-q\,n} & \overset{\circ}{S}{}^{*} \\ -\overset{\circ}{V}{}^{*}_{qn} & \overset{\circ}{H}{}^{(2)*}_{n-q\,n} & \overset{\circ}{W}{}^{*} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} N & Q \\ -M_{qn} & -P_{qn} \\ \overset{\circ}{G}{}^{(1)}_{n-q\,n} & \overset{\circ}{G}{}^{(2)}_{n-q\,n} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -A(0) & 0 \\ 0 & A(l) \end{Vmatrix}. \tag{40}$$

Из этого соотношения нетрудно заключить, что если в описанном выше процессе построения сопряженного оператора в качестве произвольной матрицы $\|D^{(1)}_{n-q\,n},\ D^{(2)}_{n-q\,n}\|$ взять матрицу $\|\overset{\circ}{G}{}^{(1)}_{n-q\,n},\ \overset{\circ}{G}{}^{(2)}_{n-q\,n}\|$, то этот процесс как раз приведет к оператору $\overset{\circ}{l}v(t)$. Теорема доказана.

Формулами (35) можно пользоваться для эффективного построения сопряженного оператора.

Существование сопряженного оператора $l^{*}v(t)$ дает возможность дать следующее

Определение. Смешанная задача для системы

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}[A^{*}(x)\,v(x,t)] + B^{*}(x)\,v(x,t) = 0 \tag{41}$$

с краевыми условиями

$$R\frac{\partial v(0,t)}{\partial t} + Sv(0,t) + V\frac{\partial v(l,t)}{\partial t} + Wv(l,t) = 0 \tag{42}$$

и начальными условиями

$$v(x,0) = g(x) \tag{43}$$

называется сопряженной основной задаче (1), (2), (3), а краевые условия (42) — сопряженными краевым условиям (2).

Из тождества (16) для операторов $L^{*}v(x,t)$ и $Lu(x,t)$, свойства 1 для оператора $l^{*}v(t)$ и последнего определения имеем

Следствие. *Если смешанная задача* (41), (42), (43) *является сопряженной к задаче* (1), (2), (3), *то и задача* (1), (2), (3) *будет сопряженной к задаче* (41), (42), (43).

§ 2. Билинейный интеграл энергии

Если тождество (16), выполняющееся для любых $u(x,t) \in C^{(1)}(\Omega)$, $v(x,t) \in C^{(1)}(\Omega)$, проинтегрировать по прямоугольнику $\Omega = [0, l] \times [0, T]$, а потом интегралы от производных преобразовать интегрированием по частям, то получим следующее тождество Грина:

$$\iint\limits_{\Omega} [v^{*}(x,t)\,Lu(x,t) - \{L^{*}v(x,t)\}^{*}\,u(x,t)]\,dxdt =$$

$$= \int_0^T v^{*}(x,t)A(x)\,u(x,t)\Big|_{x=0}^{x=l} dt - \int_0^l v^{*}(x,t)\,u(x,t)\Big|_{t=0}^{t=T} dx. \tag{44}$$

Если в первый интеграл, стоящий в правой части тождества (44), подставить выражение (19), то получим новое тождество, также выполняющееся для любых $u(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$ и $v(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$:

$$\iint_{\Omega} [v^*(x, t) Lu(x, t) - \{L^*v(x, t)\}^* u(x, t)]\, dxdt = [u(x, 0), v(x, 0)] -$$

$$- [u(x, T), v(x, T)] + \int_0^T \{H_{n\,2n} v(t)\}^* lu(t)\, dt + \int_0^T \{l^*v(t)\}^* G_{n\,2n} u(t)\, dt, \quad (45)$$

где первые два слагаемых в правой части записаны при помощи введенного здесь обозначения:

$$[f(x), g(x)] = \int_0^l g^*(x) f(x)\, dx - [Rg(0) + Vg(l)]^* [Mf(0) + Pf(l)]. \quad (46)$$

Если вместо постоянной области Ω в полученном тождестве рассматривать переменную область $\Omega(t) = [0, l] \times [0, t]$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, то тождество, очевидно, сохранится. Если же, кроме того, считать, что $u(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$ является решением смешанной задачи (1), (2), (3), т. е. $Lu(x, t) = 0$, $lu(t) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$, а $v(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$ является решением сопряженной ей задачи (41), (42), (43), т. е. $L^*v(x, t) = 0$, $l^*v(t) = 0$, $v(x, 0) = g(x)$, то для такой пары решений $u(x, t)$, $v(x, t)$ тождество (45) дает:

$$[u(x, t), v(x, t)] = [f(x), g(x)]. \quad (47)$$

Билинейный функционал

$$J_t(u, v) = [u(x, t), v(x, t)] = \int_0^l v^*(x, t) u(x, t)\, dx -$$

$$- [Rv(0, t) + Vv(l, t)]^* [Mu(0, t) + Pu(l, t)], \quad (48)$$

где $u(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$, $v(x, t) \in C^{(1)}(\Omega)$, будем называть б и л и н е й н ы м и н т е г р а л о м э н е р г и и. $J_t(u, v)$ является билинейным функционалом относительно $u(x, t)$ и $v(x, t)$, как функций от x $(0 \leqslant x \leqslant l)$, а t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ является здесь параметром. Но если $u(x, t)$ и $v(x, t)$ являются решениями сопряженных задач, то, согласно равенству (47), $J_t(u, v)$ не зависит от времени t и равен значению этого функционала для начальных функций $f(x)$, $g(x)$, т. е.

$$J_t(u, v) = [f(x), g(x)] \quad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Билинейный функционал $[f(x), g(x)]$ будет играть в дальнейшем значительную роль, а потому остановимся на нем более подробно. Для этого введем банахово пространство $D_2(0, l)$. С этой целью рассмотрим множество вектор-функций $f(x) \in L_2(0, l)$, каждая из которых определена в каждой точке сегмента $[0, l]$. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ будем называть э к в и в алентными, если $f(x)-g(x)=0$ почти всюду внутри интервала $(0,l)$ и на концах интервала $(0, l)$ удовлетворяется условие

$$M[f(0)-g(0)]+P[f(l)-g(l)]=0. \qquad (49)$$

Элементом пространства $D_2(0, l)$ будем считать, по определению, класс эквивалентных между собой функций. Класс определяется каким-нибудь его представителем — функцией $f(x)$ (будем писать $f(x)\in D_2(0, l)$) с точностью до множества меры нуль внутри интервала $(0, l)$ и с точностью до равенства (49) на концах интервала. Норму в пространстве $D_2(0, l)$ определим по формуле

$$\| f(x)\|^2_{D_2(0,l)}=\| f(x)\|^2_{L_2(0,l)}+\| Mf(0)+Pf(l)\|^2. \qquad (50)$$

Из этого определения нормы следует, что

$$\| f(x)\|_{D_2(0,l)}\leqslant\| f(x)\|_{L_2(0,l)}+\| Mf(0)+Pf(l)\|. \qquad (51)$$

Из (50) нетрудно заключить, что если последовательность $\{f_i(x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ сходится по норме пространства $D_2(0, l)$, то она сходится по норме пространства $L_2(0, l)$. Обратное не всегда верно.

Пространство $D_2(0, l)$ — полное. В самом деле, если последовательность $f_i(x)$ $(i=1, 2, \ldots)$ — фундаментальная в смысле нормы в пространстве $D_2(0, l)$, т. е. если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $n_0(\varepsilon)$ такое, что

$$\| f_{i_1}(x)-f_{i_2}(x)\|_{D_2(0,l)}<\varepsilon, \qquad (52)$$

когда $i_1>n_0(\varepsilon)$ и $i_2>n_0(\varepsilon)$, то такая последовательность сходится по норме пространства $L_2(0, l)$ к некоторой функции $f_0(x)$. Но это значит, что для этой функции $f_0(x)$ и достаточно большого i $(i=1, 2, \ldots)$ будет выполняться неравенство

$$\| f_i(x)-f_0(x)\|_{L_2(0,l)}<\frac{\varepsilon}{2} \quad (0\leqslant x\leqslant l). \qquad (53)$$

Докажем, что можно так подобрать значения функции $f_0(x)$ при $x=0$ и $l=l$, что для достаточно больших i $(i=1, 2, \ldots)$ будет выполняться неравенство

$$\| M[f_i(0)-f_0(0)]+P[f_i(l)-f_0(l)]\|<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (54)$$

Из неравенств (53), (54) и (51) и будет следовать, что $f_0(x)$ будет пределом последовательности $\{f_i(x)\}$ $(i=1, 2, \ldots)$ в смысле сходимости в $D_2(0, l)$. Для нахождения таких значений $f_0(0)$ и $f_0(l)$ заметим, что из неравенства (52) следует, что для достаточно больших i_1 и i_2

$$\| M[f_{i_1}(0)-f_{i_2}(0)]+P[f_{i_1}(l)-f_{i_2}(l)]\|<\varepsilon, \qquad (55)$$

а это значит, что существует предел $\lim\limits_{i\to\infty}h_i=h$, где $h_i=Mf_i(0)+Pf_i(l)$ $(i=1, 2, \ldots)$.

Подберем два вектора φ_0 и φ_1 так, чтобы было

$$M\varphi_0+P\varphi_1=h. \qquad (56)$$

Это возможно, так как множество векторов вида $M\varphi_0 + P\varphi_1$ при произвольных φ_0 и φ_1 линейно и потому замкнуто. Тогда если для построенной выше на сегменте $[0, l]$ с точностью до множества меры нуль функции $f_0(x)$ положить $f_0(0) = \varphi_0$ и $f_0(l) = \varphi_1$, то такая функция $f_0(x)$ и будет удовлетворять неравенствам (53), (54). Этим полнота пространства $D_2(0, l)$ доказана.

Если в вышеприведенном определении пространства $D_2(0, l)$ матрицы M и P заменить на матрицы R и V, то получим, вообще говоря, новое пространство с нормой

$$\| g(x) \|_{D_2^*(0, l)} = \sqrt{\| g(x) \|^2_{L_2(0, l)} + \| Rg(0) + Vg(l) \|^2}, \tag{57}$$

которое мы будем называть сопряженным с пространством $D_2(0, l)$ и обозначать через $D_2^*(0, l)$. Формула (46) определяет на паре пространств $D_2(0, l)$, $D_2^*(0, l)$ билинейный функционал $[f(x), g(x)]$, где $f(x) \in D_2(0, l)$, $g(x) \in D_2^*(0, l)$. Как и всякий билинейный функционал, он обладает свойствами:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad [\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x),\ g(x)] = \lambda_1 [f_1(x), g(x)] + \lambda_2 [f_2(x), g(x)], \\ &\text{b)} \quad [f(x), \mu_1 g_1(x) + \mu_2 g_2(x)] = \bar{\mu}_1 [f(x),\ g_1(x)] + \bar{\mu}_2 [f(x), g_2(x)]. \end{aligned} \tag{58}$$

Кроме того, для него выполняется еще следующее свойство:

c) Из того, что $[f_0(x), g(x)] = 0$ для всех $g(x) \in D_2^*(0, l)$, следует, что $f_0(x) = 0$ в смысле пространства $D_2(0, l)$, а также из того, что $[f(x), g_0(x)] = 0$ для всех $f(x) \in D_2(0, l)$, следует, что $g_0(x) = 0$ в смысле пространства $D_2^*(0, l)$.

Для доказательства этого свойства заметим, что из того, что $[f_0(x), g(x)] = 0$ для всех $g(x) \in D_2^*(0, l)$, следует, что

$$\int_0^l g^*(x) f_0(x)\, dx = 0, \quad [Rg(0) + Vg(l)]^* [Mf_0(0) + Pf_0(l)] = 0. \tag{59}$$

Из первого из этих равенств вытекает, что $f_0(x) = 0$ почти всюду на $[0, l]$. Докажем, что из второго равенства следует, что $Mf_0(0) + Pf_0(l) = 0$. Так как последние $n - q$ строчек матрицы $\| M, P \|$ равны нулю, то второе из равенств (59) эквивалентно равенству

$$[R_{qn} g(0) + V_{qn} g(l)]^* [M_{qn} f_0(0) + P_{qn} f_0(l)] = 0. \tag{60}$$

Так как $\operatorname{rang} \| R_{qn}, V_{qn} \| = q$, то можно так подобрать q пар векторов $g_i(0)$, $g_i(l)$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$, чтобы векторы $b_i = R_{qn} g_i(0) + V_{qn} g_i(l)$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$ были линейно независимы, т. е. $\det T \neq 0$, где $T = \| b_1, b_2, \ldots, b_q \|$. Но тогда из равенства (60) следует, что $T^* [M_{qn} f_0(0) + P_{qn} f_0(l)] = 0$ или $M_{qn} f_0(0) + P_{qn} f_0(l) = 0$. Таким образом, $Mf_0(0) + Pf_0(l) = 0$ и почти всюду на $[0, l]$ $f_0(x) = 0$, что доказывает первую часть свойства c). Вторая часть доказывается аналогично.

В заключение настоящего параграфа отметим, что если $f(x) \in D_2(0, l)$ и $g(x) \in \overset{*}{D_2}(0, l)$, то имеет место неравенство

$$|[f(x), g(x)]| \leqslant \|f(x)\|_{D_2(0, l)} \|g(x)\|_{\overset{*}{D_2}(0, l)}. \tag{61}$$

Его доказательство следует из неравенств Буняковского — Шварца и Коши.

§ 3. Разделение переменных

Основную задачу (1), (2), (3) будем решать методом разделения переменных. С этой целью отбросим сначала начальные условия (3) и найдем все решения уравнения (1), удовлетворяющие условию (2) и имеющие вид $u(x, t) = y(x) e^{\lambda t}$, где λ — числовой параметр, а $y(x)$ — вектор-функция. Подставляя это выражение в уравнения (1) и (2), получим для нахождения вектор-функции $y(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ уравнение

$$A(x) y'(x) + B(x) y(x) = \lambda y(x) \tag{62}$$

краевые условия

$$(M\lambda + N) y(0) + (P\lambda + Q) y(l) = 0. \tag{63}$$

Пусть $y(x) = Y(x, \lambda) c$ — общее решение системы (62), причем фундаментальная матрица $Y(x, \lambda)$ выбрана так, что $Y(0, \lambda) = \Phi(\lambda)$ — целая аналитическая функция λ (в частности, можно положить $Y(0, \lambda) = E$). Подставляя общее решение в краевые условия (63), получим для вектора c уравнение

$$[(M\lambda + N) Y(0, \lambda) + (P\lambda + Q) Y(l, \lambda)] c = 0. \tag{64}$$

Это уравнение будет иметь ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\Delta(\lambda) = \det [(M\lambda + N) Y(0, \lambda) + (P\lambda + Q) Y(l, \lambda)] = 0. \tag{65}$$

Последнее уравнение называется, как обычно, характеристическим, а его корни — собственными значениями. Характеристической будем называть также матрицу

$$D(\lambda) = (M\lambda + N) Y(0, \lambda) + (P\lambda + Q) Y(l, \lambda). \tag{66}$$

Из краевого условия (63) параметр λ можно исключить. Для этого $\lambda y(x)$ из уравнения (62) подставим в краевое условие (63). Получим:

$$hy \equiv MA(0) y'(0) + [MB(0) + N] y(0) + PA(l) y'(l) + \\ + [PB(l) + Q] y(l) = 0. \tag{67}$$

Параметрическую задачу для уравнения (62) с краевыми условиями (67) можно тогда рассматривать как задачу на собственные значения для линейного дифференциального оператора

$$Ly(x) = A(x) y'(x) + B(x) y(x) \tag{68}$$

с областью определения Θ_0, состоящей из функций $y(x) \in C^{(1)}(0, l)$, удовлетворяющих краевому условию (67).

Параллельно с основной задачей будем решать с ней сопряженную задачу (41), (42), (43), и притом также методом разделения переменных. Для этого в задаче (41), (42) положим $v(x, t) = z(x) e^{-\mu t}$. Для нахождения вектор-функции $z(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ получим уравнение

$$-\frac{d}{dx}[A^*(x) z(x)] + B^*(x) z(x) = \mu z(x) \tag{69}$$

и краевые условия

$$(-R\mu + S) z(0) + (-V\mu + W) z(l) = 0. \tag{70}$$

Параметрическую задачу (69), (70) будем называть **сопряженной параметрической задаче** (62), (63). Пользуясь следствием из определения сопряженной смешанной задачи, заключаем, что задача (62), (63) будет сопряженной к задаче (69), (70). Если $z(x) = Z(x, \mu) d$ — общее решение системы (69), то характеристическим уравнением для задачи (69), (70) будет уравнение

$$\Delta_1(\mu) \equiv \det[(-R\mu + S) Z(0, \mu) + (-V\mu + W) Z(l, \mu)] = 0, \tag{71}$$

характеристической матрицей — матрица

$$D_1(\mu) = (-R\mu + S) Z(0, \mu) + (-V\mu + W) Z(l, \mu), \tag{72}$$

а уравнению (64) соответствует уравнение

$$D_1(\mu) d = 0. \tag{73}$$

Лемма 5. *Если* $Y(x, \lambda)$ — *фундаментальная матрица системы* (62), *то матрица* $Z(x, \mu) = A^{*-1}(x) Y^{*-1}(x, \bar{\mu})$ *будет фундаментальной матрицей системы* (69).

Доказательство. Из системы (62) следует, что

$$A(x) \frac{\partial}{\partial x} Y(x, \lambda) + B(x) Y(x, \lambda) = \lambda Y(x, \lambda)$$

или

$$Y^{*-1}(x, \lambda) \frac{\partial}{\partial x} Y^*(x, \lambda) + B^*(x) A^{*-1}(x) = \bar{\lambda} A^{*-1}(x). \tag{74}$$

Из тождества $Y^{*-1}(x, \lambda) Y^*(x, \lambda) = E$ следует, что $Y^{*-1}(x, \lambda) \frac{\partial}{\partial x} Y^*(x, \lambda) = -\left[\frac{\partial}{\partial x} Y^{*-1}(x, \lambda)\right] Y^*(x, \lambda)$. Подставляя это выражение в равенство (74) и заменяя λ на $\bar{\mu}$, получим:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} Y^{*-1}(x, \bar{\mu})\right] Y^*(x, \bar{\mu}) + B^*(x) A^{*-1}(x) = \mu A^{*-1}(x)$$

или

$$-\frac{\partial}{\partial x}\{A^*(x)[A^{*-1}(x) Y^{*-1}(x, \bar{\mu})]\} + B^*(x)[A^{*-1}(x) Y^{*-1}(x, \bar{\mu})] =$$

$$= \mu [A^{*-1}(x) Y^{*-1}(x, \bar{\mu})],$$

что и доказывает лемму.

Если в матрице $D_1(\mu)$ положить $Z(x, \mu) = A^{*-1}(x) Y^{*-1}(x, \bar{\mu})$, то на основании соотношений (31) легко проверяется, что между матрицами $D(\lambda)$ и $D_1(\mu)$ имеет место следующая связь:

$$\text{a)}\quad (M\mu + N) Y(0, \mu) D_1^*(\bar{\mu}) - D(\mu) Y^{-1}(l, \mu) A^{-1}(l)(-V^*\mu + W^*) = 0, \tag{75}$$

$$\text{b)}\quad (P\mu + Q) Y(l, \mu) D_1^*(\bar{\mu}) - D(\mu) Y^{-1}(0, \mu) A^{-1}(0)(-R^*\mu + S^*) = 0.$$

Если, пользуясь уравнением (69), из краевого условия (70) исключить параметр μ, то вместо краевого условия (70) получим краевое условие

$$h^*z \equiv R\frac{d}{dx}[A^*(x) z(x)]\big|_{x=0} + [-RB^*(0) + S] z(0) + V\frac{d}{dx}[A^*(x) z(x)]\big|_{x=l} +$$
$$+ [-VB^*(l) + W] z(l) = 0. \tag{76}$$

Параметрическую задачу для системы (69) с краевыми условиями (76) можно рассматривать как задачу на собственные значения для оператора

$$L^*z(x) = -\frac{d}{dx}[A^*(x) z(x)] + B^*(x) z(x) \tag{77}$$

с областью определения Θ_1, состоящей из функций $z(x) \in C^{(1)}(0, l)$, для которых выполняется условие (76).

Лемма 6. *Если $y(x) \in C^{(1)}(0, l)$, $z(x) \in C^{(1)}(0, l)$, то имеет место тождество*

$$[Ly(x), z(x)] - \{H^{(1)}z(0) + H^{(2)}z(l)\}^* hy =$$
$$= [y(x), L^*z(x)] + (h^*z)^* \{G^{(1)}y(0) + G^{(2)}y(l)\}, \tag{78}$$

где $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ — матрицы из тождества (19).

Доказательство. Если в тождестве (19) положить $u(x, t) = y(x)$, $v(x, t) = z(x)$, то получим тождество

$$z^*(x) A(x) y(x)\big|_{x=0}^{x=l} = [H^{(1)}z(0) + H^{(2)}z(l)]^* [Ny(0) + Qy(l)] +$$
$$+ [Sz(0) + Wz(l)]^* [G^{(1)}y(0) + G^{(2)}y(l)]. \tag{79}$$

Кроме того, так как

$$\begin{aligned} hy &= MLy(x)\big|_{x=0} + PLy(x)\big|_{x=l} + Ny(0) + Qy(l), \\ h^*z &= -RL^*z(x)\big|_{x=0} - VL^*z(x)\big|_{x=l} + Sz(0) + Wz(l), \end{aligned} \tag{80}$$

то из того, что $\|M, P\| = \left\| \begin{matrix} M_{qn} & P_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{matrix} \right\|$, $\|R, V\| = \left\| \begin{matrix} R_{qn} & V_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{matrix} \right\|$,

$\|H^{(1)}, H^{(2)}\| = \left\| \begin{matrix} -R_{qn} & -V_{qn} \\ H^{(1)}_{n-q\,n} & H^{(2)}_{n-q\,n} \end{matrix} \right\|$, $\|G^{(1)}, G^{(2)}\| = \left\| \begin{matrix} -M_{qn} & -P_{qn} \\ G^{(1)}_{n-q\,n} & G^{(2)}_{n-q\,n} \end{matrix} \right\|$, из равенств (80) следует, что

$$[Rz(0)+Vz(l)]^*\,[MLy(x)|_{x=0}+PLy(x)|_{x=l}]+[H^{(1)}z(0)+H^{(2)}z(l)]^*hy=$$
$$=[H^{(1)}z(0)+H^{(2)}z(l)]^*\,[Ny(0)+Qy(l)],$$
$$[RL^*z(x)|_{x=0}+VL^*z(x)|_{x=l}]^*\,[My(0)+Py(l)]-(h^*z)^*\,[G^{(1)}y(0)+G^{(2)}y(l)]=$$
$$=-[Sz(0)+Wz(l)]^*\,[G^{(1)}y(0)+G^{(2)}y(l)].$$

Но тогда, пользуясь последними равенствами и равенством (79), получим:

$$[Ly(x),\ z(x)]-[H^{(1)}z(0)+H^{(2)}z(l)]^*hy=$$
$$=\int_0^l z^*(x)\,[A(x)\,y'(x)+B(x)\,y(x)]\,dx-$$
$$-[Rz(0)+Vz(l)]^*\,[MLy(x)|_{x=0}+PLy(x)|_{x=l}]-[H^{(1)}z(0)+H^{(2)}z(l)]^*\,hy=$$
$$=\int_0^l\left\{-\frac{d}{dx}[A^*(x)\,z(x)]+B^*(x)\,z(x)\right\}^*y(x)\,dx+z^*(x)\,A(x)\,y(x)\Big|_{x=0}^{x=l}-$$
$$-[H^{(1)}z(0)+H^{(2)}z(l)]^*\,[Ny(0)+Qy(l)]=$$
$$=\int_0^l[L^*z(x)]^*\,y(x)\,dx-[RL^*z(x)|_{x=0}+VL^*z(x)|_{x=l}]^*\,[My(0)+Py(l)]+$$
$$+(h^*z)^*\,[G^{(1)}y(0)+G^{(2)}y(l)]=[y(x),\ L^*z(x)]+(h^*z)^*\,[G^{(1)}y(0)+G^{(2)}y(l)],$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если* $y(x)\in\Theta_0$, $z(x)\in\Theta_1$, *то*

$$[Ly(x),\ z(x)]=[y(x),\ L^*z(x)]. \tag{81}$$

Теорема 2. (Ср. [11], стр. 298.) *Решение* $y(x,\lambda)$ *системы* (62) *с начальными условиями* $y(0,\lambda)=\Phi(\lambda)$, *где* $\Phi(\lambda)$ — *целая аналитическая функция, будет целой аналитической функцией параметра* λ, *причем* $y(x,\lambda)$, $y'_x(x,\lambda)$ *и производные любого порядка от* y *и от* y'_x *по* λ *непрерывно зависят от совокупности* x,λ $(0\leqslant x\leqslant l,\ \lambda$ — *любое), все производные вида* $\dfrac{\partial^{k+1+l}y}{\partial\lambda^k\partial x\partial\lambda^l}$ *существуют и не зависят от порядка дифференцирования.*

Доказательство этой теоремы проходит совершенно так же, как доказательство аналогичной теоремы о дифференцируемости решения по вещественному параметру.

Следствие. *Характеристический определитель* $\Delta(\lambda)$, *характеристическая матрица* $D(\lambda)$, *а также* $\Delta_1(\mu)$ *и* $D_1(\mu)$ *для сопряженной задачи, будут целыми аналитическими функциями* λ *(соответственно* μ*), если только они построены, исходя из фундаментальной матрицы* $Y(x,\lambda)$, *имеющей в качестве начального условия целую аналитическую функцию параметра* λ.

Так как $\Delta(\lambda)$ — целая аналитическая функция, то либо $\Delta(\lambda)=0$ на всей комплексной плоскости, либо $\Delta(\lambda)$ имеет не более чем счетное (и притом конечное во всякой ограниченной части плоскости) множество нулей. Мы будем считать, что имеет место второй случай (в частях II и III работы это будет следовать из приведенного в ч. II требования «регулярности» граничных условий). Эти нули λ_s $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$—собственные значения задачи (62), (63) — будем нумеровать по возрастанию мнимой части, а при равных мнимых частях — по возрастанию действительной части. Нули λ_s $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ могут быть кратными. Будем различать кратность k_s нуля λ_s функции $\Delta(\lambda)$ (когда $\Delta(\lambda_s) = \Delta'(\lambda_s) = \ldots = \Delta^{(k_s-1)}(\lambda_s) = 0$, а $\Delta^{(k_s)}(\lambda_s) \neq 0$) и кратность p_s собственного значения λ_s.

Определение (см. [3]). Наибольшее число p_s линейно независимых собственных функций, принадлежащих собственному значению λ_s, называется *кратностью собственного значения* λ_s.

Так как система (62) имеет не более чем n линейно независимых решений, то ясно, что $p_s \leqslant n$; кроме того, $p_s \leqslant k_s$, ибо если бы было $p_s > k_s$, то это, как нетрудно проверить k_s-кратным дифференцированием определителя $\Delta(\lambda)$, противоречило бы тому, что $\Delta^{(k_s)}(\lambda_s) \neq 0$. Если $p_s = k_s$, то мы имеем случай, аналогичный случаю кратного собственного значения у самосопряженного оператора. Если же $p_s < k_s$ хотя бы для одного s $(s = 0, \pm 1, \ldots)$, то набора решений задачи (1), (2) вида $y_s(x) e^{\lambda_s t}$ со всевозможными собственными значениями и всевозможными собственными функциями оказывается заведомо недостаточно для построения решения задачи (1), (2), (3) для всех тех случаев, когда такое решение существует. Ввиду этого, указанный набор решений задачи (1), (2) дополняем решениями вида $u(x, t) = \sum_{i=0}^{k} y_i(x) t^i e^{\lambda t}$, а именно решениями, являющимися столбцами матрицы

$$U_{nk}(x, t) = Y_{nk}(x) e^{J_k(\lambda) t} \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{82}$$

где $Y_{nk}(x)$ — прямоугольная матрица, а $J_k(\lambda)$ — k-мерная клетка Жордана

$$J_k(\lambda) = \left\| \begin{matrix} \lambda & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \\ 0 & 0 & 0 \ldots \lambda \end{matrix} \right\|, \tag{83}$$

а потому

$$e^{J_k(\lambda) t} = \left\| \begin{matrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \ldots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\| e^{\lambda t}. \tag{84}$$

Подставляя матрицу (82) в уравнение (1) и краевые условия (2), получим, что матрица $Y_{nk}(x)$ должна удовлетворять системе

$$A(x)\frac{d}{dx}Y_{nk}(x)+B(x)Y_{nk}(x)=Y_{nk}(x)J_k(\lambda) \tag{85}$$

и краевым условиям

$$MY_{nk}(0)J_k(\lambda)+NY_{nk}(0)+PY_{nk}(l)J_k(\lambda)+QY_{nk}(l)=0. \tag{86}$$

Одновременно с параметрической задачей (85), (86) будем рассматривать параметрическую задачу, которая получается из сопряженной краевой задачи (41), (42) после подстановки вместо неизвестной функции $v(x,t)$ столбцов матрицы

$$V_{nk}(x,t)=Z_{nk}(x)e^{-H_k(\mu)t} \quad (k=1,2,\ldots), \tag{87}$$

где

$$H_k(\mu)=J_k^*(\overline{\mu})=\begin{Vmatrix} \mu & 0 \ldots 0 & 0 \\ 1 & \mu \ldots 0 & 0 \\ . & . \quad . \quad . & . \\ 0 & 0 \ldots 1 & \mu \end{Vmatrix}. \tag{88}$$

Эта задача будет состоять из уравнения

$$-\frac{d}{dx}[A^*(x)Z_{nk}(x)]+B^*(x)Z_{nk}(x)=Z_{nk}(x)H_k(\mu) \tag{89}$$

и краевых условий

$$-RZ_{nk}(0)H_k(\mu)+SZ_{nk}(0)-VZ_{nk}(l)H_k(\mu)+WZ_{nk}(l)=0. \tag{90}$$

Если в задаче (85), (86) положить $Y_{nk}(x)=\|y_1(x),\ y_2(x),\ldots,y_k(x)\|$, то для нахождения вектор-функций $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,k)$ получим систему

$$\left.\begin{aligned} &A(x)y_1'(x)+B(x)y_1(x)=\lambda y_1(x),\\ &A(x)y_2'(x)+B(x)y_2(x)=\lambda y_2(x)+y_1(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A(x)y_k'(x)+B(x)y_k(x)=\lambda y_k(x)+y_{k-1}(x) \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{gathered} (M\lambda+N)y_1(0)+(P\lambda+Q)y_1(l)=0,\\ (M\lambda+N)y_2(0)+(P\lambda+Q)y_2(l)+My_1(0)+Py_1(l)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (M\lambda+N)y_k(0)+(P\lambda+Q)y_k(l)+My_{k-1}(0)+Py_{k-1}(l)=0\\ (k=1,2,\ldots). \end{gathered}\right\} \tag{92}$$

Точно так же, если $Z_{rk}(x) = \| z_1(x), z_2(x), \ldots, z_k(x) \|$, то для нахождения вектор-функций $z_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,k)$ получим систему

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{d}{dx}[A^*(x) z_1(x)] + B^*(x) z_1(x) = \mu z_1(x) + z_2(x), \\ &-\frac{d}{dx}[A^*(x) z_2(x)] + B^*(x) z_2(x) = \mu z_2(x) + z_3(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &-\frac{d}{dx}[A^*(x) z_k(x)] + B^*(x) z_k(x) = \mu z_k(x) \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} &(-R\mu + S) z_1(0) + (-V\mu + W) z_1(l) - R z_2(0) - V z_2(l) = 0, \\ &(-R\mu + S) z_2(0) + (-V\mu + W) z_2(l) - R z_3(0) - V z_3(l) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(-R\mu + S) z_k(0) + (-V\mu + W) z_k(l) = 0 \\ &(k = 1,2,\ldots). \end{aligned}\right\} \tag{94}$$

Для изучения параметрических задач (91), (92) и (93), (94) введем операторы

$$\text{a) } \mathscr{D}_k f(\lambda) = \begin{Vmatrix} f(\lambda) & 0 & \ldots & 0 \\ f'(\lambda) & f(\lambda) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} & \ldots & f(\lambda) \end{Vmatrix}, \quad \text{b) } \mathscr{D}_k^0 f(\lambda) = \begin{Vmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \ldots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \ldots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & f(\lambda) \end{Vmatrix} \tag{95}$$

$$(k = 1,2,\ldots).$$

Эти операторы будем применять к числовым, векторным и матричным функциям. Они линейны и обладают свойствами:

$$\text{a) } \mathscr{D}_k(f \cdot g) = \mathscr{D}_k f \cdot \mathscr{D}_k g, \quad \text{b) } \mathscr{D}_k^0(f \cdot g) = \mathscr{D}_k^0 f \cdot \mathscr{D}^0 g, \tag{96}$$

что проверяется применением формулы Лейбница

$$\frac{1}{m!}(f \cdot g)^{(m)} = \sum_{s=0}^{m} \frac{1}{s!} f^{(s)} \frac{1}{(m-s)!} g^{(m-s)}.$$

Докажем, что если $F(\lambda)$ — аналитическая матричная функция λ, то операторы $\mathscr{D}_k$ и $\mathscr{D}_k^0$ от нее связаны соотношением

$$\mathscr{D}_k F^*(\bar{\xi})\,|_{\xi=\lambda} = [\mathscr{D}_k^0 F(\xi)]^*\,|_{\xi=\bar{\lambda}} \quad (k = 1,2,\ldots). \tag{97}$$

Для этого заметим, что

$$\frac{d^s F^*(\lambda)}{d\lambda^s} = \left[\frac{d^s F(\bar{\lambda})}{(d\bar{\lambda})^s}\right]^* = \left[\frac{d^s F(\xi)}{d\xi^s}\right]^*_{\xi=\bar{\lambda}} \quad (s = 0,1,2,\ldots),$$

откуда

$$\mathcal{D}_k F^*(\bar{\xi})\,|_{\xi=\lambda} = \left\| \begin{matrix} F^*(\bar{\lambda}) & & 0 & \dots & 0 \\ \dfrac{dF^*(\bar{\lambda})}{d\lambda} & & F^*(\bar{\lambda}) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{1}{(k-1)!} & \dfrac{d^{k-1}F^*(\bar{\lambda})}{d\lambda^{k-1}} \dfrac{1}{(k-2)!} & \dfrac{d^{k-2}F^*(\bar{\lambda})}{d\lambda^{k-2}} & \dots & F^*(\bar{\lambda}) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} [F(\xi)]^* & 0 & \dots & 0 \\ [F'(\xi)]^* & [F(\xi)]^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left[\dfrac{F^{(k-1)}(\xi)}{(k-1)!}\right]^* & \left[\dfrac{F^{(k-2)}(\xi)}{(k-2)!}\right]^* & \dots & [F(\xi)]^* \end{matrix} \right\|_{\xi=\bar{\lambda}} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} F(\xi) & F'(\xi) & \dots & \dfrac{F^{(k-1)}(\xi)}{(k-1)!} \\ 0 & F(\xi) & \dots & \dfrac{F^{(k-2)}(\xi)}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F(\xi) \end{matrix} \right\|^*_{\xi=\bar{\lambda}} = [\mathcal{D}_k^0 F(\xi)]^*|_{\xi=\bar{\lambda}}\,.$$

Пользуясь оператором $\mathcal{D}_k$, параметрическую задачу (91), (92) можно записать в виде:

$$A_k(x)\,y'(x) + B_k(x)\,y(x) = \mathcal{D}_k(\lambda E)\,y(x), \tag{98}$$

$$[M_k\mathcal{D}_k(\lambda E) + N_k]\,y(0) + [P_k\mathcal{D}_k(\lambda E) + Q_k]\,y(l) = 0, \tag{99}$$

где

$$A_k = \mathcal{D}_k A = \left\| \begin{matrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{matrix} \right\|, \ B_k = \mathcal{D}_k B, \ \ M_k = \mathcal{D}_k M \text{ и т. д.}, \ \ y(x) = \left\| \begin{matrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_k(x) \end{matrix} \right\|.$$

Лемма 7. *Если $Y(x,\lambda)$ — фундаментальная матрица системы* (62), *то матрицы $\mathcal{D}_k Y(x,\lambda)$ $(k = 1,2,\dots)$ будут фундаментальными матрицами систем* (91) *при $k = 1,2,\dots$, и если $D(\lambda)$ — характеристическая матрица, а $\Delta(\lambda)$ — характеристический определитель параметрической задачи* (62), (63), *то матрицы $\mathcal{D}_k D(\lambda)$ $(k = 1,2,\dots)$ будут характеристическими матрицами, а $[\Delta(\lambda)]^k$ $(k = 1,2,\dots)$ — характеристическими определителями задач* (91), (92).

Доказательство. Если $Y(x,\lambda)$ — фундаментальная матрица системы (62), то

$$A(x)\frac{\partial}{\partial x}Y(x,\lambda) + B(x)\,Y(x,\lambda) = \lambda\,Y(x,\lambda). \tag{100}$$

Применяя к этому тождеству оператор $\mathcal{D}_k$, получим:

$$A_k(x)\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{D}_k Y(x,\lambda) + B_k(x)\,\mathcal{D}_k Y(x,\lambda) = \mathcal{D}_k(\lambda E)\,\mathcal{D}_k Y(x,\lambda).$$

Так как $\det \mathscr{D}_k Y(x, \lambda) = [\det Y(x, \lambda)]^k \neq 0$, то матрица

$$\mathcal{J}(x, \lambda) = \mathscr{D}_k Y(x, \lambda) \tag{101}$$

будет фундаментальной матрицей системы (98), а следовательно, и системы (91).

Подставим теперь общее решение системы (91)

$$y(x) = [\mathscr{D}_k Y(x, \lambda)]\, c, \tag{102}$$

где $c = \begin{Vmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{Vmatrix}$ — произвольный nk-мерный вектор, в краевые условия (99). Получим:

$$\{[M_k \mathscr{D}_k(\lambda E) + N_k]\, \mathscr{D}_k Y(0, \lambda) + [P_k \mathscr{D}_k(\lambda E) + Q_k]\, \mathscr{D}_k Y(l, \lambda)\}\, c = 0,$$

что, пользуясь свойствами оператора $\mathscr{D}_k$, можно записать в виде

$$[\mathscr{D}_k D(\lambda)]\, c = 0. \tag{103}$$

Но это значит, что матрица $\mathscr{D}_k D(\lambda)$ является характеристической матрицей задачи (91), (92). Характеристическим определителем для этой задачи будет $\det \mathscr{D}_k D(\lambda) = [\det D(\lambda)]^k = [\Delta(\lambda)]^k$. Лемма доказана.

Следствие. *Все параметрические задачи* (85), (86) *при* $k = 2, 3, \ldots$ *имеют те же собственные значения, что и задача* (62), (63).

Совершенно аналогично доказывается тот факт, что для задачи (93), (94) имеет место

Лемма 7а. *Если* $Z(x, \mu)$ — *фундаментальная матрица системы* (69), *то матрицы* $\mathscr{D}_k^0 Z(x, \mu)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *будут фундаментальными матрицами систем* (93), *и если* $D_1(\mu)$ — *характеристическая матрица, а* $\Delta_1(\mu)$ — *характеристический определитель параметрической задачи* (69), (70), *то матрицы* $\mathscr{D}_k^0 D_1(\mu)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *будут характеристическими матрицами, а* $[\Delta_1(\mu)]^k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — *характеристическими определителями задач* (93), (94).

Заметим, что если $Y_{nk}(x) = \|0, 0, \ldots, 0, y_1(x), \ldots, y_s(x)\|$, где $y_1(x) \neq 0$, является решением задачи (85), (86) при $\lambda = \lambda_0$, то из задачи (91), (92) следует, что $y_1(x)$ будет собственной функцией задачи (62), (63) для собственного значения $\lambda = \lambda_0$, а функции $y_2(x), y_3(x), \ldots, y_s(x)$ образуют цепочку присоединенных к ней функций (см. [1], [3]). Ввиду этого, свойства решений задач (85), (86) можно получить из свойств собственных и присоединенных функций. В книге [3] (п. 9, § 3, гл. 1) приводятся доказательства ряда свойств этих функций для параметрических задач, состоящих из дифференциального уравнения n-го порядка и n краевых условий $U_\nu(y) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Как мы увидим ниже (см. теоремы 3 и 4), эти доказательства почти без изменения переносятся на случай задачи (85), (86). Для удобства изложения введем несколько определений.

Определение 1. Матрица $Y_{nk}(x)$ называется **собственной матрицей задачи** (85), (86) **для собственного значения** $\lambda = \lambda_0$, если она не равна тождественно нулю и является решением этой задачи при $\lambda = \lambda_0$.

Определение 2. Матрица $\|0, 0, \ldots, 0, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)\|$, состоящая из k столбцов, называется k-мерной цепочкой вектор-функций, если для нее *все* вектор-функции $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ отличны от тождественного нуля; при этом число m называется длиной цепочки.

Следствие. *Каждая собственная матрица каждой из задач* (85), (86) *образует цепочку.*

Определение 3. Матрица $\overset{(s)}{Y}_{nk} = \|0, 0, \ldots, 0, \ y_1, \ldots, y_{k-s}\|$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$ называется s-ой производной матрицей от матрицы

$$Y_{nk} = \| y_1, y_2, \ldots, y_k \|.$$

Следствие. *Если матрица $Y_{nk}(x)$ является собственной матрицей задачи* (85), (86), *то и все производные от нее матрицы (отличные от нуля) будут линейно независимыми* собственными матрицами той же задачи.*

Определение 4. Число m называется кратностью собственной функции $y_0(x)$ задачи (62), (63) для собственного значения $\lambda = \lambda_0$, если существует цепочка длины m с первой отличной от тождественного нуля вектор-функцией $y_0(x)$, являющаяся собственной матрицей одной из задач (85), (86) для $\lambda = \lambda_0$, но не существует такой цепочки длины $m + 1$.

Теорема 3. *Кратность каждой из собственных функций задачи* (62), (63) *для собственного значения $\lambda = \lambda_0$ не превосходит кратности k_0 нуля λ_0 характеристического определителя $\Delta(\lambda)$.*

Доказательство. Пусть k_0 — кратность нуля λ_0. Предположим, что для собственной функции $y_1(x)$ задачи (62), (63) существует цепочка $\|0, \ldots, 0, y_1(x), \ldots, y_{k_0+1}(x)\|$, удовлетворяющая одной из задач (85), (86) при $k = k_0 + 1$. Тогда цепочка $\|y_1(x), \ y_2(x), \ldots, y_{k_0+1}(x)\|$ будет решением задачи (85), (86) при $k = k_0 + 1$. Следуя доказательству предложения V из книги [3] (стр. 23), построим для системы (62) решение $z_1(x, \lambda)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$z_1(0, \lambda) = \psi(0, \lambda), \tag{104}$$

где

$$\psi(x, \lambda) = y_1(x) + y_2(x)(\lambda - \lambda_0) + \ldots + y_{k_0+1}(x)(\lambda - \lambda_0)^{k_0}. \tag{105}$$

Продифференцируем почленно равенство (104) по λ k_0 раз и подставим $\lambda = \lambda_0$. Учитывая соотношение (105), получим:

$$\left\| z_1(0, \lambda_0), \frac{\partial z_1(0, \lambda_0)}{\partial \lambda}, \ldots, \frac{1}{k_0!} \frac{\partial^{k_0} z_1(0, \lambda_0)}{\partial \lambda^{k_0}} \right\| = \| y_1(0), y_2(0), \ldots, y_{k_0+1}(0) \|. \tag{106}$$

Дифференцируя систему (62) k_0 раз по λ, полагая затем $\lambda = \lambda_0$ и сравнивая с уравнением (85) при $k = k_0 + 1$ и $\lambda = \lambda_0$, получим, в силу теоремы един-

* Линейная зависимость системы матриц $Y_{nk}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ понимается как линейная зависимость системы векторов nk-мерного пространства, которую образуют матрицы $Y_{nk}^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

ственности решения задачи Коши для системы, что

$$\left\| z_1(x,\lambda_0), \frac{\partial z_1(x,\lambda_0)}{\partial\lambda}, \ldots, \frac{1}{k_0!}\frac{\partial^{k_0} z_1(x,\lambda_0)}{\partial\lambda^{k_0}} \right\| = \| y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{k_0+1}(x) \|. \quad (107)$$

Отсюда следует, что разложение функции $z_1(x,\lambda)$ по степеням $\lambda-\lambda_0$ можно представить в виде

$$z_1(x,\lambda) = y_1(x) + y_2(x)(\lambda-\lambda_0) + \ldots + y_{k_0+1}(x)(\lambda-\lambda_0)^{k_0} + \\ + \varphi(x,\lambda)(\lambda-\lambda_0)^{k_0+1}, \quad (108)$$

где $\varphi(x,\lambda)$ — некоторая целая аналитическая функция λ для каждого x $(0 \leqslant x \leqslant l)$. Присоединим теперь (при малых $|\lambda-\lambda_0|$) к функции $z_1(x,\lambda)$ решения системы (62) так, чтобы матрица $Y(x,\lambda) = \| z_1(x,\lambda), z_2(x,\lambda), \ldots, z_n(x,\lambda) \|$ была фундаментальной, и построим определитель

$$\Delta(\lambda) = \det \| (M\lambda+N)Y(0,\lambda) + (P\lambda+Q)Y(l,\lambda) \| = \\ = \det \| f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda) \|,$$

где

$$f_i(\lambda) = (M\lambda+N)z_i(0,\lambda) + (P\lambda+Q)z_i(l,\lambda) \quad (i=1,2,\ldots,n). \quad (109)$$

Этот определитель $\Delta(\lambda)$ отличается от определителя (65) множителем, аналитически зависящим от λ и отличным от нуля вблизи $\lambda=\lambda_0$. Пользуясь формулой (108) и соотношением (107), разложение по степеням $\lambda-\lambda_0$ функции $f_1(\lambda)$ из семейства (109) можно преобразовать так:

$$f_1(\lambda) = \sum_{m=0}^{k_0} \frac{1}{m!} f_1^{(m)}(\lambda_0)(\lambda-\lambda_0)^m + \theta(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^{k_0+1} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k_0} \left[(M\lambda_0+N)\frac{1}{m!}\frac{\partial^m z_1(0,\lambda_0)}{\partial\lambda^m} + (P\lambda_0+Q)\frac{1}{m!}\frac{\partial^m z_1(l,\lambda_0)}{\partial\lambda^m} + \right.$$

$$\left. + M\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1} z_1(0,\lambda_0)}{\partial\lambda^{m-1}} + P\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1} z_1(l,\lambda_0)}{\partial\lambda^{m-1}} \right](\lambda-\lambda_0)^m +$$

$$+ \theta(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^{k_0+1} = \sum_{m=0}^{k_0} [(M\lambda_0+N)y_{m+1}(0) + (P\lambda_0+Q)y_{m+1}(l) +$$

$$+ My_m(0) + Py_m(l)](\lambda-\lambda_0)^m + \theta(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^{k_0+1} = \theta(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^{k_0+1},$$

где $\theta(\lambda)$ — некоторая целая аналитическая функция λ. Тогда $\Delta(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^{k_0+1}\det \| \theta(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda) \|$, и мы получаем, что λ_0 — нуль функции $\Delta(\lambda)$ кратности k_0+1, а не k_0, как предполагалось. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Определение 5. Система матриц $Y_{nk}^{(1)}(x), Y_{nk}^{(2)}(x), \ldots, Y_{nk}^{(s)}(x)$ называется **основной системой собственных матриц задачи** (85), (86) **для собственного значения** $\lambda=\lambda_0$, если она вместе со всеми от нее производными отличными от нуля матрицами образует полную систему линейно независимых собственных матриц задачи (85), (86) при $\lambda=\lambda_0$. При этом считается, что k не меньше максимальной кратности собственных функций задачи (62), (63) при $\lambda=\lambda_0$.

Лемма 8. *Если* $\{Y_{nk}^{(i)}(x)\}$ $(i=1,2,\ldots,s)$ — *основная система собственных матриц задачи* (85), (86) *для собственного значения* $\lambda=\lambda_0$, *то*

1) $s=p_0$, *где* p_0 — *кратность собственного значения* $\lambda=\lambda_0$ *задачи* (62), (63);

2) *матрицы* $Y_{nk}^{(i)}(x)$ $(i=1,2,\ldots,p_0)$ *имеют следующее строение*:

$$Y_{nk}^{(i)}(x)=\|0,0,\ldots,0,y_i(x),y_{i1}(x),\ldots,y_{i\,m_i-1}(x)\|, \tag{110}$$

где функции $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,p_0)$ *образуют полную систему собственных функций задачи* (62), (63) *для* $\lambda=\lambda_0$;

3) *числа* m_i $(i=1,2,\ldots,p_0)$ *являются кратностями собственных функций* $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,p_0)$.

Доказательство. Из того, что каждая из матриц $Y_{nk}^{(i)}(x)$ $(i=1,2,\ldots,s)$ является цепочкой вектор-функций, следует, что эти матрицы имеют вид (110). Из задачи (91), (92) следует, что все функции $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,s)$ суть собственные функции задачи (62), (63) для собственного значения $\lambda=\lambda_0$. Функции $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,s)$ линейно независимы, ибо в противном случае были бы линейно зависимы m_i-1 производные матрицы $Y_{nk}^{(i)}(x)$ $(i=1,2,\ldots,s)$, что противоречило бы определению основной системы. Если мы теперь докажем, что $s=p_0$, то первый и второй пункты леммы будут доказаны. Но s не может быть больше p_0, так как тогда задача (62), (63) при $\lambda=\lambda_0$ имела бы больше чем p_0 линейно независимых решений $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,s)$, что противоречит определению числа p_0. С другой стороны, если $s<p_0$, то для задачи (62), (63) при $\lambda=\lambda_0$ существует собственная функция $y_{s+1}(x)$, линейно независимая от функций $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,s)$, и k-мерная цепочка $\|0,\ldots,0,0,y_{s+1}(x)\|$ будет собственной матрицей задачи (85), (86) для $\lambda=\lambda_0$, линейно независимой как от матриц $Y_{nk}^{(i)}(x)$ $(i=1,2,\ldots,s)$, так и от всех от нее производных матриц, что противоречит определению основной системы. Таким образом, остается одна возможность $s=p_0$.

Перейдем к доказательству третьего пункта леммы. Очевидно, число m_i не больше кратности собственной функции $y_i(x)$. Предположим, что m_i меньше кратности m_i' собственной функции $y_i(x)$. Поскольку $k\geqslant m_i'$ $(i=1,2,\ldots,p_0)$, существует k-мерная цепочка $\|0,\ldots,0,\ y_i(x),y_{i1}^0(x),\ldots,y_{i\,m_i'-1}^0(x)\|$, являющаяся собственной матрицей задачи (85), (86) для $\lambda=\lambda_0$. Эта собственная матрица будет линейно независимой как от матриц основной системы, так и от всех от нее производных матриц, что противоречит определению основной системы. Таким образом, $m_i=m_i'$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Для любого собственного значения* $\lambda=\lambda_0$ *задачи* (85), (86) *можно построить основную систему матриц.*

Доказательство. Пусть A — пространство всех собственных матриц задачи (85), (86) при $\lambda=\lambda_0$. Рассмотрим одну из матриц этой системы, образующую цепочку наибольшей длины m_1. Пусть это будет матрица $Z_{nk}^{(1)}(x)$. Построим все от нее производные матрицы $\overset{(1)}{Z}{}_{nk}^{(1)}(x),\overset{(2)}{Z}{}_{nk}^{(1)}(x),\ldots,\overset{(m_1-1)}{Z}{}_{nk}^{(1)}(x)$. Тогда система $B_1=\{Z_{nk}^{(1)}(x),\ \overset{(1)}{Z}{}_{nk}^{(1)}(x),\ldots,\overset{(m_1-1)}{Z}{}_{nk}^{(1)}(x)\}$ образует систему из m_1 линейно независимых собственных матриц задачи (85), (86) при $\lambda=\lambda_0$. Если A не совпадает с линейной сболочкой системы B_1, то легко проверить, что в A имеются матрицы, у которых первый ненулевой столбец не пропорционален первому ненулевому столбцу матриц из B_1. Выберем среди таких матриц снова цепочку наибольшей длины m_2 (очевидно, $m_1 \geqslant m_2$). Пусть это будет матрица $Z_{nk}^{(2)}(x)$; исходя из нее, построим систему $B_2 = \{Z_{nk}^{(2)}(x), \overset{(1)}{Z}{}_{nk}^{(2)}(x), \ldots, \overset{(m_2-1)}{Z}{}_{nk}^{(2)}(x)\}$. Если A не совпадает с линейной оболочкой систем B_1, B_2, то в A найдутся матрицы, у которых первый ненулевой столбец не является линейной комбинацией первых ненулевых столбцов матриц из B_1 и B_2. Выберем из таких матриц цепочку наибольшей длины и т. д. В силу конечномерности линейного пространства A, этот процесс, если его продолжать дальше, оборвется на некотором шаге, и мы получим систему, состоящую из систем $B_1, B_2, \ldots, B_{r_0}$. В силу построения, это будет полная система собственных матриц задачи (85), (86) для $\lambda = \lambda_0$, и притом линейно независимых, а это значит, что матрицы $Z_{nk}^{(1)}(x), Z_{nk}^{(2)}(x), \ldots, Z_{nk}^{(r_0)}(x)$ образуют основную систему собственных матриц. Лемма доказана.

Замечание. Нетрудно проверить, заменяя по одной матрице основной системы, что длины цепочек, составляющих эту систему, определены однозначно с точностью до порядка.

Теорема 4. *Полная система линейно независимых собственных матриц задачи* (85), (86) *для собственного значения* $\lambda = \lambda_0$ *при* $k \geqslant k_0$, *где* k_0 — *кратность нуля функции* $\Delta(\lambda)$, *состоит из* k_0 *таких матриц.*

Доказательство. Пусть $B = \{Y_{nk}^{(1)}(x), Y_{nk}^{(2)}(x), \ldots, Y_{nk}^{(p_0)}(x)\}$ — основная система собственных матриц задачи (85), (86) для собственного значения $\lambda = \lambda_0$, причем $Y_{nk}^{(i)}(x) = \| 0, 0, \ldots, 0, y_i(x), y_{i1}(x), \ldots, y_{i\,m_i-1}(x) \|$ $(m_{i+1} \leqslant m_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, p_0)$. Следуя М. А. Наймарку (см. [3], стр. 23), дополним систему функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{p_0-1}(x), y_{p_0}(x)$, образующую согласно лемме 8 полную систему собственных функций задачи (62), (63) для собственного значения $\lambda = \lambda_0$, решениями $\psi_{p_0+1}(x), \psi_{p_0+2}(x), \ldots, \psi_n(x)$ системы (62) при $\lambda = \lambda_0$ так, чтобы матрица $Y(x, \lambda_0) = \| y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{p_0}(x); \psi_{p_0+1}(x), \ldots, \psi_n(x) \|$ была фундаментальной матрицей системы (62) для $\lambda = \lambda_0$. Кроме того, как и при доказательстве теоремы 3, построим для задачи (62), (63) при малых $|\lambda - \lambda_0|$ фундаментальную матрицу $Y(x, \lambda) = \| y_1(x, y), y_2(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda) \|$ таким образом, чтобы разложения $y_i(x, \lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ по степеням $\lambda - \lambda_0$ имели вид

$$
\begin{aligned}
y_i(x, \lambda) &= y_i(x) + y_{i1}(x)(\lambda - \lambda_0) + \ldots + y_{i\,m_i-1}(x)(\lambda - \lambda_0)^{m_i-1} + \\
&\quad + \psi_i(x)(\lambda - \lambda_0)^{m_i} + \ldots \qquad \text{для } i \leqslant p_0, \\
y_i(x, \lambda) &= \psi_i(x) + \psi_{i1}(x)(\lambda - \lambda_0) + \ldots \qquad \text{для } i > p_0
\end{aligned}
\tag{111}
$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пользуясь этой матрицей, построим определитель

$$
\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= \det \| (M\lambda + N) Y(0, \lambda) + (P\lambda + Q) Y(l, \lambda) \| = \\
&= \det \| f_1(\lambda), f_2(\lambda), \ldots, f_n(\lambda) \|,
\end{aligned}
\tag{112}
$$

где

$$f_i(\lambda) = (M\lambda + N)\, y_i(0, \lambda) + (P\lambda + Q)\, y_i(l, \lambda) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{113}$$

Разложив вектор-функции $f_i(\lambda)$ для $i \leqslant p_0$ в ряд по степеням $\lambda - \lambda_0$, получим:

$$f_i(\lambda) = \sum_{r=0}^{m_i - 1} \left[(M\lambda_0 + N) \frac{1}{r!} \frac{\partial^r y_i(0, \lambda_0)}{\partial \lambda^r} + (P\lambda_0 + Q) \frac{1}{r!} \frac{\partial^r y_i(l, \lambda_0)}{\partial \lambda^r} + \right.$$

$$\left. + M \frac{1}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1} y_i(0, \lambda_0)}{\partial \lambda^{r-1}} + P \frac{1}{(r-1)!} \frac{\partial^{r-1} y_i(l, \lambda_0)}{\partial \lambda^{r-1}} \right] (\lambda - \lambda_0)^r + \theta_i(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{m_i} =$$

$$= \sum_{r=0}^{m_i - 1} [(M\lambda_0 + N)\, y_{ir}(0) + (P\lambda_0 + Q)\, y_{ir}(l) + M y_{i\, r-1}(0) + P y_{i\, r-1}(l)] (\lambda - \lambda_0)^r +$$

$$+ \theta_i(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{m_i} = \theta_i(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{m_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, p_0), \tag{114}$$

где положено $y_{i0}(x) = y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p_0)$ и где $\theta_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, \ldots, p_0)$ — некоторые целые аналитические функции, которые при $\lambda = \lambda_0$ имеют вид

$$\theta_i(\lambda_0) = (M\lambda_0 + N)\, \psi_i(0) + (P\lambda_0 + Q)\, \psi_i(l) + M y_{i\, m_i - 1}(0) + P y_{i\, m_i - 1}(l). \tag{115}$$

Подставляя выражения (114) в формулу (112), получим, что

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_1 + m_2 + \ldots + m_{p_0}} \det \| \theta_1(\lambda), \theta_2(\lambda), \ldots, \theta_{p_0}(\lambda), f_{p_0+1}(\lambda), \ldots, f_n(\lambda) \|. \tag{116}$$

Отсюда следует, что $m_1 + m_2 + \ldots + m_{p_0} \leqslant k_0$, где k_0 — кратность нуля функции $\Delta(\lambda)$. Однако, в силу теоремы 3, при $k \geqslant k_0$ все числа m_i $(i = 1, 2, \ldots, p_0)$ являются кратностями соответствующих собственных функций $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p_0)$ задачи (62), (63) при $\lambda = \lambda_0$. Докажем, что при $k \geqslant k_0$ и $\lambda = \lambda_0$ в формуле (116)

$$\Delta_0(\lambda_0) = \det \| \theta_1(\lambda_0), \theta_2(\lambda_0), \ldots, \theta_{p_0}(\lambda_0), f_{p_0+1}(\lambda_0), \ldots, f_n(\lambda_0) \| \neq 0.$$

В самом деле, пусть $\Delta_0(\lambda_0) = 0$. Тогда некоторый столбец определителя $\Delta_0(\lambda_0)$ будет линейной комбинацией последующих. Это не может быть столбец $f_i(\lambda_0)$ $(i = p_0 + 1, p_0 + 2, \ldots, n)$. В самом деле, если некоторый столбец $f_j(\lambda_0)$ $(j > p_0)$ представляется в виде $f_j(\lambda_0) = \sum_{s=j+1}^{n} d_s f_s(\lambda_0)$, то, подставляя сюда равенства (113) при $\lambda = \lambda_0$ и учитывая, что из равенств (111) следует, что $y_i(x, \lambda_0) = \psi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, получим, что функция $\psi(x) = \psi_j(x) - \sum_{s=j+1}^{n} \alpha_s \psi_s(x)$ является решением системы (62) и удовлетворяет краевым условиям (63) при $\lambda = \lambda_0$, т. е. она является собственной функцией задачи (62), (63) для $\lambda = \lambda_0$. Но это значит, что функция $\psi(x)$ является линейной комбинацией функций $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p_0)$, что невозможно, так как система $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{p_0}(x), \psi_{p_0+1}(x), \ldots, \psi_n(x)$ состоит из линейно независимых функций. Но это не может быть и столбец

$\theta_j(\lambda_0)$ $(j=1,2,\ldots,p_0)$. Докажем это. Пусть $\theta_j(\lambda_0)=\sum\limits_{s=j+1}^{p_0}\alpha_s\theta_s(\lambda_0)+$ $+\sum\limits_{s=p_0+1}^{n}\alpha_s f_s(\lambda_0)$. Тогда, подставляя сюда выражения (113) и (115) и учитывая разложения (111), получим:

$$(M\lambda_0+N)\left[\psi_j(0)-\sum_{s=j+1}^{n}\alpha_s\psi_s(0)\right]+(P\lambda_0+N)\left[\psi_j(l)-\sum_{s=j+1}^{n}\alpha_s\psi_s(l)\right]+$$

$$+M\left[y_{j\,m_j-1}(0)-\sum_{s=j+1}^{p_0}\alpha_s y_{s\,m_s-1}(0)\right]+P\left[y_{j\,m_j-1}(l)-\sum_{s=j+1}^{p_0}\alpha_s y_{s\,m_s-1}(l)\right]=0. \tag{117}$$

Построим функцию

$$y(x,\lambda)=y_j(x,\lambda)-\sum_{s=j+1}^{p_0}\alpha_s y_s(x,\lambda)(\lambda-\lambda_0)^{m_j-m_s}-$$
$$-\left[\sum_{s=p_0+1}^{n}\alpha_s y_s(x,\lambda)\right](\lambda-\lambda_0)^{m_j}. \tag{118}$$

Она представляет собой линейную комбинацию решений уравнения (62) и потому сама является решением этого уравнения. Подставив ее в уравнение (62) и затем продифференцировав уравнение m_j раз по λ, получим, что цепочка

$$\left\| y(x,\lambda),\ \frac{1}{1!}\frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial\lambda},\ldots,\ \frac{1}{m_j!}\frac{\partial^{m_j}y(x,\lambda)}{\partial\lambda^{m_j}}\right\| \tag{119}$$

удовлетворяет уравнению (85) при любом λ и $k=m_j+1$. Проверим, что она при $k=m_j+1$ и $\lambda=\lambda_0$ удовлетворяет еще и краевым условиям (86). Для этого возьмем последние в развернутом виде (92) и проверим, что выполняется последнее из уравнений (92), т. е. уравнение

$$(M\lambda_0+N)\frac{1}{m_j!}\frac{\partial^{m_j}y(0,\lambda_0)}{\partial\lambda^{m_j}}+(P\lambda_0+Q)\frac{1}{m_j!}\frac{\partial^{m_j}y(l,\lambda_0)}{\partial\lambda^{m_j}}+$$
$$+M\frac{1}{(m_j-1)!}\frac{\partial^{m_j-1}y(0,\lambda_0)}{\partial\lambda^{m_j-1}}+P\frac{1}{(m_j-1)!}\frac{\partial^{m_j-1}y(l,\lambda_0)}{\partial\lambda^{m_j-1}}=0. \tag{120}$$

Подставим в формулу (118) выражения для вектор-функций $y_s(x,\lambda)$ $(s=$ $=j,j+1,\ldots,n)$ из формул (111). Получим для вектор-функции $y(x,\lambda)$ разложение по степеням $\lambda-\lambda_0$. Коэффициентами при $(\lambda-\lambda_0)^{m_j-1}$ и $(\lambda-\lambda_0)^{m_j}$ будут вектор-функции $\frac{1}{(m_j-1)!}\frac{\partial^{m_j-1}y(x,\lambda_0)}{\partial\lambda^{m_j-1}}$ и $\frac{1}{m_j!}\frac{\partial^{m_j}y(x,\lambda_0)}{\partial\lambda^{m_j}}$ соответственно. Простой подсчет показывает, что

$$\frac{1}{(m_j-1)!}\frac{\partial^{m_j-1}y(x,\lambda_0)}{\partial\lambda^{m_j-1}}=y_{j\,m_j-1}(x)-\sum_{s=j+1}^{p_0}\alpha_s y_{s\,m_s-1}(x),$$
$$\text{b)}\quad \frac{1}{m_j!}\frac{\partial^{m_j}y(x,\lambda_0)}{\partial\lambda^{m_j}}=\psi_j(x)-\sum_{s=j+1}^{n}\alpha_s\psi_s(x). \tag{121}$$

Из формул (121) и равенства (117) следует выполнение равенства (120). Пусть теперь

$$\tilde{y}_i(x,\lambda)=\begin{cases}(\lambda-\lambda_0)^{m_j-m_i}\,y_i(x,\lambda), & j<i\leqslant p_0,\\ (\lambda-\lambda_0)^{m_j}\,y_i(x,\lambda), & p_0<i\leqslant n.\end{cases}\tag{122}$$

Тогда цепочки $\left\|\tilde{y}_i(x,\lambda),\ \frac{1}{1!}\frac{\partial\tilde{y}_i(x,\lambda)}{\partial\lambda},\ldots,\frac{1}{(m_j-1)!}\frac{\partial^{m_j-1}\tilde{y}_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^{m_j-1}}\right\|$

$(i=j+1,\ldots,n)$ удовлетворяют краевым условиям (86) (или (92)) при $k=m_j$, $\lambda=\lambda_0$. Это следует из того, что, в силу формул (122) и (111),

$$\left\|\tilde{y}_i(x,\lambda_0),\frac{1}{1!}\frac{\partial\tilde{y}_i(x,\lambda_0)}{\partial\lambda},\ldots,\frac{1}{(m_j-1)!}\frac{\partial^{m_j-1}\tilde{y}_i(x,\lambda_0)}{\partial\lambda^{m_j-1}}\right\|=$$

$$=\|\underbrace{0,0,\ldots,0}_{m_j-m_i},y_i(x),y_{i1}(x),\ldots,y_{i\,m_i-1}(x)\|.$$

Но тогда из того, что $y(x,\lambda)=\tilde{y}_j(x,\lambda)-\sum\limits_{s=j+1}^{n}\alpha_s\tilde{y}_s(x,\lambda)$, следует, что и цепочка $\left\|y(x,\lambda),\frac{1}{1!}\frac{\partial y(x,\lambda)}{\partial\lambda},\ldots,\frac{1}{(m_j-1)!}\frac{\partial^{m_j-1}y(x,\lambda)}{\partial\lambda^{m_j-1}}\right\|$ удовлетворяет краевым условиям (86) (или (92)) при $k=m_j$, $\lambda=\lambda_0$. Это вместе с равенством (120) доказывает, что цепочка (119) удовлетворяет краевым условиям (86) при $\lambda=\lambda_0$, $k=m_j+1$. Это значит, что собственная функция $y(x,\lambda_0)$ задачи (62), (63) имеет кратность $\geqslant m_j+1$. Но это противоречит тому, что, функция

$$y(x,\lambda_0)=\begin{cases}y_j(x), & \text{если } m_j>m_{j+1},\\ y_j(x)-\sum\limits_{s=j+1}^{q_0}\alpha_s y_s(x), & \text{если } m_j=m_{j+1}=\ldots=m_{q_0}\end{cases}$$

$(q_0\leqslant p_0)$, являясь линейной комбинацией собственных функций кратности m_j и меньше ($m_s\geqslant m_{s+1}$; $s=1,2,\ldots,p_0-1$), должна иметь кратность $\leqslant m_j$. Таким образом, определитель $\Delta_0(\lambda_0)$ не имеет линейно зависимых столбцов и потому отличен от нуля. Поскольку, по условию теоремы, λ_0 есть нуль функции $\Delta(\lambda)$ кратности k_0, из равенства (116) следует, что $m_1+m_2+\ldots+m_{p_0}=k_0$.

Построим для каждой из матриц $Y_{nk}^{(i)}(x)=\|0,0,\ldots,0,y_i(x),y_{i1}(x),\ldots,y_{i\,m_i-1}(x)\|$ $(i=1,2,\ldots,p_0)$ основной системы $B=\{Y_{nk}^{(1)}(x),Y_{nk}^{(2)}(x),\ldots,Y_{nk}^{(p_0)}(x)\}$ все от нее производные (отличные от нуля) матрицы. Получим системы

$$B_i=\{Y_{nk}^{(i)}(x),\overset{(1)}{Y}{}_{nk}^{(i)}(x),\ldots,\overset{(m_i-1)}{Y}{}_{nk}^{(i)}(x)\}\quad(i=1,2,\ldots,p_0).$$

Объединение этих систем, по определению основной системы, дает полную систему линейно независимых собственных матриц задачи (85), (86) для $\lambda=\lambda_0$. Так как каждая из систем B_i $(i=1,2,\ldots,p_0)$ содержит m_i матриц, то объединение этих систем будет содержать $m_1+m_2+\ldots+m_{p_0}=k_0$ матриц, что и доказывает теорему 4.

Для каждого собственного значения λ_s $(s=0,\pm 1,\pm 2,\dots)$ задачи (85), (86) построим основную систему матриц $B^{(s)}$. Пусть

$$B^{(s)}=\{\|0,\dots,0,\ y_1^{(s)}(x),\ y_{11}^{(s)}(x),\dots,\ y^{(s)}_{1\,m_1^{(s)}-1}(x)\|,$$

$$\|0,\dots,\ 0,\ y_2^{(s)}(x),\ y_{21}^{(s)}(x),\dots,\ y^{(s)}_{2\,m_2^{(s)}-1}(x)\|,\dots$$

$$\dots,\|0,\dots,0,\ y_{p_s}^{(s)}(x),\dots,\ y^{(s)}_{p_s\,m_{p_s}^{(s)}-1}(x)\|\}, \tag{123}$$

где p_s $(s=0,\pm 1,\ \pm 2,\dots)$ — кратность собственного значения λ_s, $m_1^{(s)}, m_2^{(s)},\dots, m_{p_s}^{(s)}$ — кратности собственных функций $y_1^{(s)}(x)$, $y_2^{(s)}(x),\dots$ $\dots, y_{p_s}^{(s)}(x)$ $(s=0,\pm 1,\ \pm 2,\dots)$. Построим для каждой матрицы

$\|0,\dots,0,\ y_i^{(s)}(x), y_{i1}^{(s)}(x),\ \dots,\ y^{(s)}_{1m_i^{(s)}-1}(x)\|$ $(i=1,2,\dots,p_s)$ из системы $B^{(s)}$

все от нее производные матрицы. Они вместе с первоначальной матрицей образуют систему

$$B_i^{(s)}=\{\|0,\dots,0,\ y_i^{(s)}(x),\ y_{i1}^{(s)}(x),\dots,\ y^{(s)}_{i\,m_i^{(s)}-1}(x)\|,$$

$$\|0,\dots,0,0,\ y_i^{(s)}(x),\dots,\ y^{(s)}_{i\,m_i^{(s)}-2}(x)\|,\dots,\|0,\dots,0,\dots,0,\ y_i^{(s)}(x)\|\} \tag{124}$$

$$(i=1,2,\dots,p_s;\ s=0,\pm 1,\pm 2,\dots).$$

Поскольку система, образованная объединением систем $B_1^{(s)}, B_2^{(s)},\dots, B_{p_s}^{(s)}$, является полной системой собственных матриц задачи (85), (86) для собственного значения λ_s $(s=0,\pm 1,\dots)$, система вектор-функций, образованная столбцами матрицы

$$B^{(s)}_{nk_s,k_s}(x)=\left\|\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & \dots & 0 & y_1^{(s)}(x) & 0 & \dots & \dots & 0 & y_2^{(s)}(x) & \dots & 0 & \dots & 0 & y_{p_s}^{(s)}(x)\\
0 & \dots & y_1^{(s)}(x) & y_{11}^{(s)}(x) & 0 & \dots & \dots & y_2^{(s)}(x) & y_{21}^{(s)}(x) & \dots & 0 & \dots & y_{p_s}^{(s)}(x) & y_{p_s1}^{(s)}(x)\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & \dots & y^{(s)}_{1\,m_1^{(s)}-3}(x) & y^{(s)}_{1\,m_1^{(s)}-2}(x) & 0 & \dots & \dots & y^{(s)}_{2\,m_2^{(s)}-3}(x) & y^{(s)}_{2\,m_2^{(s)}-2}(x) & \dots & 0 & \dots & y^{(s)}_{p_s\,m_{p_s}^{(s)}-3}(x)\dots & y^{(s)}_{p_s\,m_{p_s}^{(s)}-2}(x)\\
y_1^{(s)}(x) & \dots & y^{(s)}_{1\,m_1^{(s)}-2}(x) & y^{(s)}_{1\,m_1^{(s)}-1}(x) & y_2^{(s)}(x) & \dots & \dots & y^{(s)}_{2\,m^{(s)}-2}(x) & y^{(s)}_{2\,m_2^{(s)}-1}(x) & \dots & y_{p_s}^{(s)}(x)\dots & & y^{(s)}_{p_s m_{p_s}^{(s)}-2}(x) & y^{(s)}_{p_s\,m_{p_s}^{(s)}-1}(x)
\end{array}\right\|, \tag{125}$$

будет полной системой линейно независимых собственных вектор-функций задачи (91), (92) для собственного значения λ_s ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Отбрасывая, далее, нулевые столбцы в матрицах основной системы, построим матрицы

$$\left.\begin{aligned} Y^{(s)}_{nm^{(s)}_1}(x) &= \| y^{(s)}_1(x),\ y^{(s)}_{11}(x), \ldots, y^{(s)}_{1\,m^{(s)}_1-1}(x) \|, \\ Y^{(s)}_{nm^{(s)}_2}(x) &= \| y^{(s)}_2(x),\ y^{(s)}_{21}(x), \ldots, y^{(s)}_{2\,m^{(s)}_2-1}(x) \|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y^{(s)}_{nm^{(s)}_{p_s}}(x) &= \| y^{(s)}_{p_s}(x),\ y^{(s)}_{p_s1}(x), \ldots, y^{(s)}_{p_s\,m^{(s)}_{p_s}-1}(x) \| \end{aligned}\right\} \tag{126}$$

$$(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Они, так же как и матрицы основной системы, будут решениями задач (85), (86), но только, вообще говоря, для различных k. Как уже отмечалось выше, первый столбец $y^{(s)}_i(x)$ матрицы $Y^{(s)}_{nm^{(s)}_i}(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, p_s$) является собственной функцией задачи (62), (63), а последующие столбцы $y^{(s)}_{i1}(x), y^{(s)}_{i2}(x), \ldots, y^{(s)}_{i\,m^{(s)}_i-1}(x)$ называются, согласно М. В. Келдышу (см. [1]), функциями, присоединенными к собственной функции $y^{(s)}_i(x)$ или просто присоединенными функциями. Объединим матрицы системы (126) в одну

$$Y^{(s)}_{nk_s}(x) = \| Y^{(s)}_{nm^{(s)}_1}(x), Y^{(s)}_{nm^{(s)}_2}(x), \ldots, Y^{(s)}_{nm^{(s)}_{p_s}}(x) \|, \tag{127}$$

где $k_s = m^{(s)}_1 + m^{(s)}_2 + \ldots + m^{(s)}_{p_s}$ — кратность нуля λ_s функции $\Delta(\lambda)$ ($s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Столбцы матрицы (127) линейно независимы между собой. В самом деле, предположим, что существует k_s-мерный вектор $c_{k_s} \neq 0$ такой, что $Y^{(s)}_{nk_s}(x)\, c_{k_s} = 0$. Из формулы (125) следует тогда, что вектор-функция $y(x) = B^{(s)}_{nk_s, k_s}(x)\, c_{k_s}$ будет решением задачи (91), (92) при $\lambda = \lambda_s$. Эта вектор-функция не может быть тождественным нулем, так как это означало бы, что столбцы матрицы $B^{(s)}_{nk_s, k_s}(x)$ линейно зависимы; но $y(x)$ не может и не быть тождественным нулем, так как из формулы (125) следует, что последняя n-мерная компонента вектора $y(x)$ есть вектор $Y^{(s)}_{nk_s}(x)\, c_{k_s} = 0$, а тогда из системы (91) получаем, что $y(x) \equiv 0$ ($0 \leqslant x \leqslant l$). Полученное противоречие доказывает линейную независимость столбцов матрицы (127).

Для каждой из матриц $Y^{(s)}_{nm^{(s)}_i}(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, p_s$), входящих в состав матрицы $Y^{(s)}_{nk_s}(x)$, по формуле (82) построим матрицу

$$U^{(s)}_{nm^{(s)}_i}(x, t) = Y^{(s)}_{nm^{(s)}_i}(x)\, e^{J_{m^{(s)}_i}(\lambda_s)\, t}. \tag{128}$$

Объединяя все матрицы $U^{(s)}_{nm^{(s)}_i}(x, t)$ ($i = 1, 2, \ldots, p_s$) для одного s в одну матрицу, получим:

$$U^{(s)}_{nk_s}(x, t) = \| U^{(s)}_{nm_1^{(s)}}(x, t), \ldots, U^{(s)}_{nm_{p_s}^{(s)}}(x, t) \| =$$

$$= \| Y^{(s)}_{nm_1^{(s)}}(x), Y^{(s)}_{nm_2^{(s)}}(x), \ldots, Y^{(s)}_{nm_{p_s}^{(s)}}(x) \| e^{I_s t} = Y^{(s)}_{nk_s}(x) e^{I_s t} \tag{129}$$

$$(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где

$$I_s = \left\| \begin{array}{cccc} J_{m_1^{(s)}}(\lambda_s) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{m_2^{(s)}}(\lambda_s) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{m_{p_s}^{(s)}}(\lambda_s) \end{array} \right\|, \tag{130}$$

а $J_{m_i^{(s)}}(\lambda_s)$ $(i = 1, 2, \ldots, p_s;\ \ s = 0, \pm 1, \ldots)$ — $m_i^{(s)}$-мерные клетки Жордана.

Каждый столбец матрицы $U^{(s)}_{nk_s}(x, t) = Y^{(s)}_{nk_s}(x) e^{I_s t}$ является, в силу построения, решением краевой задачи (1), (2), а все столбцы всех матриц $U^{(s)}_{nk_s}(x, t)$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ образуют набор решений задачи (1), (2), из которого в последующих параграфах будет построено решение смешанной задачи (1), (2), (3). Заметим, что при построении множества матриц $U^{(s)}_{nk_s}(x, t)$ $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ мы пользовались только матрицами основной системы решений задачи (85), (86) и не использовали матрицы, производные от них; мы поступали так потому, что матрицы, построенные по формуле (82) из производных матриц, не добавят новых решений задачи (1), (2) к уже полученному набору.

Теоремы 3 и 4, доказанные для задачи (85), (86), остаются верными и для задачи (89), (90). Для доказательства этого достаточно свести задачу (89), (90) к задаче (85), (86). Для этого вместо матрицы $Z_{nk}(x) = \| z_1(x), z_2(x), \ldots, z_{k-1}(x), z_k(x) \|$ рассмотрим матрицу $\overleftarrow{Z}_{nk}(x) = \| z_k(x), z_{k-1}(x), \ldots, z_1(x) \|$, для которой из задачи (89), (90) получим задачу

$$-\frac{d}{dx}[A^*(x)\overleftarrow{Z}_{nk}(x)] + B^*(x)\overleftarrow{Z}_{nk}(x) = \overleftarrow{Z}_{nk}(x) J_k(\mu), \tag{131}$$

$$-R\overleftarrow{Z}_{nk}(0) J_k(\mu) + S\overleftarrow{Z}_{nk}(0) - V\overleftarrow{Z}_{nk}(l) J_k(\mu) + W\overleftarrow{Z}_{nk}(l) = 0. \tag{132}$$

Так как эта задача имеет такой же вид, как и задача (85), (86), то для нее (а тогда и для задачи (89), (90) с учетом перестановки столбцов в матрице $Z_{nk}(x)$) будут выполняться как теоремы 3 и 4, так и другие утверждения, относящиеся к задаче (85), (86).

Перейдем к изучению связи между задачей (85), (86) и задачей (89), (90). Для этого, пользуясь уравнением (85), исключим $J_k(\lambda)$ из краевого условия (86) и, учитывая, что $Y_{nk}(x) J_k(\lambda) = Y_{nk}(x) J_k(0) + \lambda Y_{nk}(x)$, перепишем задачу (85), (86) так:

$$L_1 Y_{nk}(x) \equiv A(x) Y'_{nk}(x) + B(x) Y_{nk}(x) - Y_{nk}(x) J_k(0) = \lambda Y_{nk}(x), \tag{133}$$

$$hY_{nk} \equiv MA(0)\,Y'_{nk}(0) + [MB(0) + N]\,Y_{nk}(0) + PA(l)\,Y'_{nk}(l) +$$
$$+ [PB(l) + Q]\,Y_{nk}(l) = 0. \qquad (134)$$

Аналогично, исключая $H_k(\mu)$ из краевого условия (90), перепишем задачу (89), (90) так:

$$L_1^* Z_{nk}(x) \equiv -\frac{d}{dx}[A^*(x)\,Z_{nk}(x)] + B^* Z_{nk}(x) - Z_{nk}(x)\,J_k^*(0) = \mu Z_{nk}(x), \qquad (135)$$

$$h^* Z_{nk}(x) \equiv R\,\frac{d}{dx}[A^*(x)\,Z_{nk}(x)]\,|_{x=0} + [-RB^*(0) + S]\,Z_{nk}(0) +$$
$$+ V\frac{d}{dx}[A^*(x)\,Z_{nk}(x)]\,|_{x=l} + [-VB^*(l) + W]\,Z_{nk}(l) = 0. \qquad (136)$$

Будем считать прямоугольные матрицы размерности $n \times k$ векторами nk-мерного пространства. Скалярным произведением двух таких векторов $Y_{nk} = \| y_1, y_2, \ldots, y_k \|$ и $Z_{nk} = \| z_1, z_2, \ldots, z_k \|$ будем называть число

$$(Y_{nk},\ Z_{nk}) = \sum_{i=1}^{k} z_i^* y_i = \operatorname{Sp} Z_{nk}^* Y_{nk}, \qquad (137)$$

где $\operatorname{Sp} T$ означает след матрицы T, т. е. сумму ее диагональных элементов.

Лемма 10. *Если столбцы матриц $Y_{nk}(x)$ и $Z_{nk}(x)$ принадлежат пространству $C^{(1)}(0, l)$, то для матриц $Y_{nk}(x)$ и $Z_{nk}(x)$ имеет место тождество*

$$\operatorname{Sp}[L_1 Y_{nk}(x), Z_{nk}(x)] - \operatorname{Sp}[H^{(1)} Z_{nk}(0) + H^{(2)} Z_{nk}(l)]^* (hY_{nk}) =$$
$$= \operatorname{Sp}[Y_{nk}(x), L_1^* Z_{nk}(x)] + \operatorname{Sp}(h^* Z_{nk})^* [G^{(1)} Y_{nk}(0) + G^{(2)} Y_{nk}(l)], \qquad (138)$$

где матрицы $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ взяты из тождества (19), *а*

$$[Y_{nk}(x), Z_{nk}(x)] = \int_0^l Z_{nk}^*(x)\,Y_{nk}(x)\,dx -$$
$$-[RZ_{nk}(0) + VZ_{nk}(l)]^* [MY_{nk}(0) + PY_{nk}(l)]. \qquad (139)$$

Доказательство. Если $Y_{nk}(x) = \| y_1(x), y_2(x), \ldots, y_k(x) \|$ и $Z_{nk}(x) = \| z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x) \|$, то, подставляя каждую пару столбцов $y_i(x), z_j(x)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ этих матриц в тождество (78), убеждаемся, что для матриц $Y_{nk}(x)$ и $Z_{nk}(x)$ имеет место тождество

$$[LY_{nk}(x), Z_{nk}(x)] + [H^{(1)} Z_{nk}(0) + H^{(2)} Z_{nk}(l)]^* (hY_{nk}) =$$
$$= [Y_{nk}(x), L^* Z_{nk}(x)] + (h^* Z_{nk})^* [G^{(1)} Y_{nk}(0) + G^{(2)} Y_{nk}(l)], \qquad (140)$$

где

$$LY_{nk}(x) = A(x)\,Y'_{nk}(x) + B(x)\,Y_{nk}(x) = \| Ly_1(x), Ly_2(x), \ldots, Ly_k(x) \|,$$

$$L^* Z_{nk}(x) = -\frac{d}{dx}[A^*(x)\,Z_{nk}(x)] + B^*(x)\,Z_{nk}(x) =$$
$$= \| L^* z_1(x), L^* z_2(x), \ldots, L^* z_k(x) \|.$$

Из тождества (140) получаем тождество

$$\operatorname{Sp}[LY_{nk}(x), Z_{nk}(x)] - \operatorname{Sp}[H^{(1)}Z_{nk}(0) + H^{(2)}Z_{nk}(l)]^*(hY_{nk}) =$$
$$= \operatorname{Sp}[Y_{nk}(x), L^*Z_{nk}(x)] + \operatorname{Sp}(h^*Z_{nk})^*[G^{(1)}Y_{nk}(0) + G^{(2)}Y_{nk}(l)]. \quad (141)$$

Для любой матрицы T_{kk} выполняется тождество

$$\operatorname{Sp} T_{kk} J_k(0) = \operatorname{Sp} J_k(0) T_{kk},$$

для доказательства которого достаточно произвести перемножение матриц в левой и правой части, а потому для матриц $Y_{nk}(x)$ и $Z_{nk}(x)$

$$\operatorname{Sp}[Y_{nk}(x) J_k(0), Z_{nk}(x)] = \operatorname{Sp}[Y_{nk}(x), Z_{nk}(x)] J_k(0) =$$
$$= \operatorname{Sp} J_k(0)[Y_{nk}(x), Z_{nk}(x)] = \operatorname{Sp}[Y_{nk}(x), Z_{nk}(x) J_k^*(0)].$$

Вычитая из тождества (141) тождество

$$\operatorname{Sp}[Y_{nk}(x) J_k(0), Z_{nk}(x)] = \operatorname{Sp}[Y_{nk}(x), Z_{nk}(x) J_k^*(0)],$$

получим:

$$\operatorname{Sp}[LY_{nk}(x) - Y_{nk}(x) J_k(0), Z_{nk}(x)] - \operatorname{Sp}[H^{(1)}Z_{nk}(0) + H^{(2)}Z_{nk}(l)]^*(hY_{nk}) =$$
$$= \operatorname{Sp}[Y_{nk}(x), L^*Z_{nk}(x) - Z_{nk}(x) J_k^*(0)] + \operatorname{Sp}(h^*Z_{nk})^*[G^{(1)}Y_{nk}(0) + G^{(2)}Y_{nk}(l)].$$

Если обратить внимание на то, что $LY_{nk}(x) - Y_{nk}(x) J_k(0) = L_1Y_{nk}(x)$ и $L^*Z_{nk}(x) - Z_{nk}(x) J_k^*(0) = L_1^*Z_{nk}(x)$, то тождество (138) доказано.

Теорема 5. *Для того чтобы комплексное число $\lambda = \lambda_0$ было нулем функции $\Delta(\lambda)$ кратности k_0 и собственным значением задачи* (62), (63) *кратности p_0, необходимо и достаточно, чтобы число $\mu = \overline{\lambda}_0$ было нулем функции $\Delta_1(\mu)$ той же кратности k_0 и собственным значением задачи* (69), (70) *той же кратности p_0. Если при этом линейно независимые собственные функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_{p_0}(x)$ задачи* (62), (63) *для собственного значения $\lambda = \lambda_0$ имеют кратности m_i ($m_i \geqslant m_{i+1}, m_1 + m_2 + \ldots + m_{p_0} = k_0$; $i = 1, 2, \ldots, p_0$), то собственные функции $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_{p_0}(x)$ всякой полной системы линейно независимых собственных функций сопряженной задачи* (69), (70) *для собственного значения $\mu = \overline{\lambda}_0$ будут иметь те же кратности m_i ($i = 1, 2, \ldots, p_0$), если только эти функции перенумерованы в порядке убывания их кратности.*

Доказательство. Пусть $Z(x, \lambda_0) = \| z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x) \|$ — фундаментальная матрица системы (69) для $\mu = \overline{\lambda}_0$, а $y_0(x)$ — собственная функция задачи (62), (63) для собственного значения $\lambda = \lambda_0$. Тогда, подставляя в тождество (78) пары функций $\{z_i(x), y_0(x)\}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), получим:

$$[h^*Z(x, \overline{\lambda}_0)]^*[G^{(1)}y_0(0) + G^{(2)}y_0(l)] = 0. \quad (142)$$

Так как $\overline{\lambda}_0 Z(x, \overline{\lambda}_0) = -\frac{d}{dx}[A^*(x) Z(x, \overline{\lambda}_0)] + B^*(x) Z(x, \overline{\lambda}_0)$, то характеристической матрицей задачи (69), (70) для $\mu = \overline{\lambda}_0$ будет

$$D_1(\overline{\lambda}_0) = (-R\overline{\lambda}_0 + S)\,Z(0,\overline{\lambda}_0) + (-V\overline{\lambda}_0 + W)\,Z(l,\overline{\lambda}_0) =$$

$$= R\frac{d}{dx}[A^*(x)\,Z(x,\overline{\lambda}_0)]\,|_{x=0} + [-RB^*(0) + S]\,Z(0,\overline{\lambda}_0) +$$

$$+ V\frac{d}{dx}[A^*(x)\,Z(x,\overline{\lambda}_0)]\,|_{x=l} + [-VB^*(l) + W]\,Z(l,\overline{\lambda}_0) = h^*Z(x,\overline{\lambda}_0),$$

а потому из равенства (142) получим:

$$[D_1(\overline{\lambda}_0)]^*c_0 = 0, \tag{143}$$

где $c_0 = G^{(1)}y_0(0) + G^{(2)}y_0(l)$. Докажем, что $c_0 \neq 0$. Для этого предположим, что $c_0 = 0$. Так как $\| G^{(1)}, G^{(2)} \| = \begin{Vmatrix} -M_{qn} & -P_{qn} \\ G^{(1)}_{n-q\,n} & G^{(2)}_{n-q\,n} \end{Vmatrix}$, $\|M, P\| = \begin{Vmatrix} M_{qn} & P_{qn} \\ 0_{n-q\,n} & 0_{n-q\,n} \end{Vmatrix}$ (см. лемму 3), то вместе с равенством $G^{(1)}y_0(0) + G^{(2)}y_0(l) = 0$ будет выполняться равенство $My_0(0) + Py_0(l) = 0$, а потому если $c_0 = 0$ то, подставляя в тождество (19) функцию $u(x,t) = y_0(x)\,e^{\lambda_0 t}$, получим:

$$v^*(x,t)\,A(x)\,y_0(x)\,e^{\lambda_0 t}\Big|_{x=0}^{x=l} = 0$$

для любого $v(x,t) \in C^{(1)}(\Omega)$. Если $v(x,t)$ — таково, что $v(l,t) = 0$, то для любого $v(0,t)$ будет $v^*(0,t)\,A(0)\,y_0(0) = 0$. Полагая $v(0,t)$ последовательно равным каждому из столбцов матрицы $A^{-1}(0)$, получим отсюда, что $y_0(0) = 0$. Но тогда, в силу единственности решения задачи Коши для начальных условий $y_0(0) = 0$, получим, что $y_0(x) \equiv 0$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, а это противоречит определению собственной функции. Таким образом, $c_0 \neq 0$ и из равенства (143) следует, что $\det[D_1(\overline{\lambda}_0)]^* = \overline{\Delta_1(\overline{\lambda}_0)} = 0$, т. е. число $\overline{\lambda}_0$ — собственное значение сопряженной задачи (69), (70).

Если собственное значение $\mu = \overline{\lambda}_0$ задачи (69), (70) имеет кратность p_1, то это значит, что для него задача (69), (70) имеет p_1 линейно независимых собственных функций $z_i(x) = Z(x,\overline{\lambda}_0)\,d_i$ $(i = 1,2,\ldots,p_1)$, где векторы d_i линейно независимы и удовлетворяют уравнению $D_1(\overline{\lambda}_0)\,x = 0$. Если же λ_0 — собственное значение задачи (62), (63) кратности p_0, то эта задача имеет p_0 линейно независимых собственных функций $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_{p_0}(x)$. Но тогда будут линейно независимы векторы $c_i = G^{(1)}y_i(0) + G^{(2)}y_i(l)$ $(i = 1,2,\ldots,p_0)$, а из равенства (143), которому они удовлетворяют, следует, что уравнение $[D_1(\overline{\lambda}_0)]^*x = 0$ имеет не менее p_0 линейно независимых решений. Но тогда и уравнение $D_1(\overline{\lambda}_0)\,x = 0$ будет иметь не менее, чем p_0 линейно независимых решений, т. е. $p_1 \geqslant p_0$. Начиная доказательство с сопряженной задачи, получим, что $p_1 \leqslant p_0$. Отсюда следует, что $p_1 = p_0$.

Если

$$\mathring{Z}(x,\overline{\lambda}_0) = \begin{Vmatrix} z_1^{(1)}(x) & z_1^{(2)}(x) & \ldots & z_1^{(nk)}(x) \\ z_2^{(1)}(x) & z_2^{(2)}(x) & \ldots & z_2^{(nk)}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ z_k^{(1)}(x) & z_k^{(2)}(x) & \ldots & z_k^{(nk)}(x) \end{Vmatrix},$$

где $z_j^{(i)}(x)$ $(i = 1,2,\ldots, nk;\ j = 1,2,\ldots,k)$ — n-мерные векторы, есть фундаментальная матрица системы (93) для $\mu = \overline{\lambda}_0$, то характеристической матрицей задачи (93), (94) будет матрица

$$\overset{\circ}{D}_1\,(\overline{\lambda}_0) = R_k \frac{d}{dx}[A_k^*(x)\overset{\circ}{Z}(x,\overline{\lambda}_0)]\,|_{x=0} + [-R_kB_k^*(0) + S_k]\,\overset{\circ}{Z}(0,\overline{\lambda}_0) +$$

$$+ V_k \frac{d}{dx}[A_k^*(x)\overset{\circ}{Z}(x,\ \overline{\lambda}_0)]\,|_{x=l} + [-V_kB_k^*(l) + W_k]\,\overset{\circ}{Z}(l,\overline{\lambda}_0) =$$

$$= \begin{Vmatrix} h^*z_1^{(1)} & h^*z_1^{(2)} & \ldots & h^*z_1^{(nk)} \\ h^*z_2^{(1)} & h^*z_2^{(2)} & \ldots & h^*z_2^{(nk)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h^*z_k^{(1)} & h^*z_k^{(2)} & \ldots & h^*z_k^{(nk)} \end{Vmatrix}. \tag{144}$$

Матрицы $Z_{nk}^{(i)}(x) = \|\,z_1^{(i)}(x),\ z_2^{(i)}(x),\ldots, z_k^{(i)}(x)\,\|$ $(i = 1,2,\ldots, nk)$, образованные из столбцов фундаментальной матрицы $\overset{\circ}{Z}(x,\overline{\lambda}_0)$, будут решениями системы (89), а потому, подставляя их в тождество (138) вместе с $Y_{nk}^{(0)}(x)$ — собственной матрицей задачи (85), (86) для $\lambda = \lambda_0$, — получим равенства

$$\mathrm{Sp}\,(h^*Z_{nk}^{(i)})^*\,C_{nk} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ldots, nk), \tag{145}$$

где $C_{nk} = G^{(1)}Y_{nk}^{(0)}(0) + G^{(2)}Y_{nk}^{(0)}(l) = \|\,c_1, c_2,\ldots, c_k\,\|$. Но $\mathrm{Sp}\,(h^*Z_{nk}^{(i)})^*\,C_{nk} = \sum\limits_{j=1}^{k}(h^*z_j^{(i)})^*\,C_j$, а потому систему равенств (145) можно переписать так:

$$[\overset{\circ}{D}_1\,(\overline{\lambda})]^*c = 0, \tag{146}$$

где $c = \begin{Vmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{Vmatrix}$. Докажем, что $c \neq 0$ или, что то же самое, что $C_{nk} \neq 0$.

Для этого воспользуемся тождеством

$$\Theta_{nm}^*(x,t)\,A(x)\,U_{nk}(x,\ t)\,\Big|_{x=0}^{x=l} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}[R\Theta_{nm}(0,t) + V\Theta_{nm}(l,t)]^*\,[MU_{nk}(0,t) + PU_{nk}(l,t)] +$$

$$+ [H^{(1)}\Theta_{nm}(0,t) + H^{(2)}\Theta_{nm}(l,t)]^*lU_{nk}(t) +$$

$$+ [l^*\Theta_{nm}(t)]^*\,[G^{(1)}U_{nk}(0,t) + G^{(2)}U_{nk}(l,t)], \tag{147}$$

где

$$lU_{nk}(t) = M\frac{\partial U_{nk}(0,t)}{\partial t} + NU_{nk}(0,t) + P\frac{\partial U_{nk}(l,t)}{\partial t} + QU_{nk}(l,t),$$

$$l^*\Theta_{nm}(t) = R\frac{\partial\Theta_{nm}(0,t)}{\partial t} + S\Theta_{nm}(0,t) + V\frac{\partial\Theta_{nm}(l,t)}{\partial t} + W\Theta_{nm}(l,t)$$

$$(m, k = 1, 2, \ldots),$$

а $U_{nk}(x,t)=\|u_1(x,t),\ldots,u_k(x,t)\|$ и $\Theta_{nm}(x,t)=\|\theta_1(x,t),\ldots,\theta_m(x,t)\|$ — произвольные матрицы, столбцы которых принадлежат $C^{(1)}(\Omega)$. (Доказательство этого тождества следует из тождества (19), если в последнее подставить всевозможные пары столбцов $v_i(x,t), u_j(x,t)$ $(i=1,2,\ldots,m;$ $j=1,2,\ldots,k)$ матриц $U_{nk}(x,t)$ и $\Theta_{nm}(x,t)$ и сравнить полученные тождества с тождеством (147).) Предположим, что

$$C_{nk}=G^{(1)}Y_{nk}^{(0)}(0)+G^{(2)}Y_{nk}^{(0)}(l)=\|c_1,c_2,\ldots,c_k\|=0.$$

Тогда если $U_{nk}(x,t)=U_{nk}^{(0)}(x,t)=Y_{nk}^{(0)}(x)e^{J_k(\overline{\lambda}_0)t}$, то

$$lU_{nk}^{(0)}(t)=0,\quad G^{(1)}U_{nk}^{(0)}(0,t)+G^{(2)}U_{nk}^{(0)}(l,t)=0,$$

$$MU_{nk}^{(0)}(0,t)+PU_{nk}^{(0)}(l,t)=0$$

и из тождества (147) получаем, что

$$\Theta_{nm}^{*}(x,t)\,A(x)\,Y_{nk}^{(0)}(x)e^{J_k(\overline{\lambda}_0)t}\Big|_{x=0}^{x=l}=0 \tag{148}$$

для любых матриц, столбцы которых принадлежат пространству $C^{(1)}(\Omega)$. Если положить в равенстве (148) $m=n$, $\Theta_{nn}(x,t)=\Phi_{nn}(x)$, где $\Phi_{nn}(l)=0$ и $\Phi_{nn}(0)=A^{-1}(0)$, то получим, что $Y_{nk}^{(0)}(0)=0$, откуда, в силу теоремы единственности, $Y_{nk}^{(0)}(x)\equiv 0$ $(0\leqslant x\leqslant l)$, что противоречит определению собственной матрицы. Таким образом, $C_{nk}\neq 0$ и $c\neq 0$. Тогда из равенства (146), на основании таких же рассуждений как и для задач (62), (63) и (69), (70), следует, что задача (91), (92) при $\lambda=\lambda_0$ и задача (93), (94) при $\mu=\overline{\lambda}_0$ имеют для одного и того же k $(k=1,2,\ldots)$ одно и то же число собственных функций. То же можно сказать и о задачах (85), (86) и (89), (90). В частности, если $k>\max(k_0,k_1)$, где k_0 — кратность нуля λ_0 функции $\Delta(\lambda)$, а k_1 — кратность нуля $\overline{\lambda}_0$ функции $\Delta_1(\lambda)$, то число линейно независимых собственных матриц задачи (85), (86) при $\lambda=\lambda_0$ и задачи (89), (90) при $\mu=\overline{\lambda}_0$, с одной стороны, по теореме 4, равно k_0, а с другой стороны, по теореме 4, равно k_1, что возможно лишь тогда, когда $k_0=k_1$.

Пусть при переходе от k к $k+1$ число (линейно независимых) решений задачи (91), (92) при $\lambda=\lambda_0$ увеличивается на s_k $(k=1,2,\ldots)$ и пусть собственная функция $y_{i_0}(x)$ из полной системы линейно независимых собственных функций $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,p_0)$ задачи (62), (63) для собственного значения $\lambda=\lambda_0$ имеет кратность m_{i_0}. Тогда при возрастании k на единицу число решений задачи (91), (92), имеющих в качестве первой ненулевой компоненты функцию $y_{i_0}(x)$, увеличивается каждый раз на единицу до тех пор, пока не станет $k=m_{i_0}$. При дальнейшем возрастании k число решений с первой ненулевой компонентой $y_{i_0}(x)$ не увеличивается. Таким образом, увеличение числа решений задачи (91), (92) при переходе от k к $k+1$ может произойти лишь за счет тех собственных функций $y_i(x)$ $(i=$ $=1,2,\ldots,p_0)$, которые имеют кратность $k+1$ и более. Точнее, s_k равно числу таких функций. Но тогда, если при $k=k_1-1$ было s_{k_1-1} функций с кратностью k_1 и более, а при $k=k_1$ есть s_{k_1} функций с кратностью k_1+1 и более, то $s_{k_1-1}-s_{k_1}$ как раз и даст наибольшее число линейно независимых функций $y_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,p_0)$ с кратностью k_1. Так как число решений задач (91), (92) при $\lambda=\lambda_0$ и (93), (94) при $\mu=\overline{\lambda}_0$ при одном и том же k одинаково, то числа s_k для обеих задач будут одинаковы. Из только что доказанного следует, что число выбираемых при возрастании k собственных функций систем $\{y_i(x)\}$ и $\{z_i(x)\}$ $(i=1,2,\ldots,p_0)$, имеющих одинаковую кратность m_{i_0}, будет одинаково. Это завершает доказательство теоремы. Отметим, что кратности собственных функций полной системы задачи (62), (63) совпадают с аналогичными кратностями для задачи (69), (70), если эти системы выбраны так, что сумма кратностей является минимально возможной, именно k_0.

Замечание. В том случае, когда $\det(M\lambda+N)\neq 0$ или $\det(P\lambda+Q)\neq 0$, а фундаментальные матрицы систем (62) и (69) выбраны так, что $Z(x,\mu)=\overset{*}{A}{}^{-1}(x)\overset{*}{Y}{}^{-1}(x,\overline{\mu})$ (см. лемму 5) и $\det Y(0,\lambda)=\mathrm{const}$, из доказанной теоремы и равенств (71) вытекает, что

$$\overline{\Delta_1(\overline{\lambda})}=\Delta(\lambda)\,e^{-h\lambda+a}, \tag{149}$$

где a — некоторое постоянное комплексное число, $h=\int\limits_0^l\sum\limits_{i=1}^n \nu_i^{-1}(x)\,dx$ и $\nu_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ — собственные значения матрицы $A(x)$.

Доказательство этого можно провести следующим образом. Если $\mathrm{rang}\,\|M,N\|=n$, то из равенства (75a) получим:

$$\det(M\lambda+N)\cdot\det Y(0,\lambda)\cdot\det D_1^*(\overline{\lambda})=$$

$$=(-1)^n\det D(\lambda)\cdot\det Y^{-1}(l,\lambda)\cdot\det A^{-1}(l)\cdot\det(V^*\lambda-W^*). \tag{150}$$

Но по формуле Лиувилля — Остроградского

$$\det Y(l,\lambda)=[\det Y(0,\lambda)]\,e^{h\lambda}\,e^{-\int\limits_0^l\sum\limits_{i=1}^n\beta_{ii}(x)\,dx},$$

где $\beta_{ii}(x)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ — диагональные элементы матрицы $A^{-1}(x)B(x)$, а потому

$$\det Y^{-1}(l,\lambda)=[\det Y(0,\lambda)]^{-1}e^{-h\lambda}e^{\int\limits_0^l\sum\limits_{i=1}^n\beta_{ii}(x)\,dx}. \tag{151}$$

Кроме того, так как из теоремы 5 следует, что функции $\overline{\Delta_1(\overline{\lambda})}=\det D_1^*(\overline{\lambda})$ и $\Delta(\lambda)=\det D(\lambda)$ имеют одни и те же нули, то из (150) получим, что полиномы $\det(M\lambda+N)$ и $\det(V^*\lambda-W^*)$ имеют одни и те же корни, т. е.

$$\det(V^*\lambda-W^*)=\alpha\det(M\lambda+N), \tag{152}$$

где α — некоторое постоянное число. Так как $\det(M\lambda+N)\neq 0$, то $\alpha\neq 0$. Из (150), (151) и (152) и следует (149). Если же $\det(M\lambda+N)\equiv 0$, а $\det(P\lambda+Q)\neq 0$, то доказательство проводится с помощью равенства (75b).

Так как функции $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_1(\lambda)$ суть аналитические функции элементов матриц M, P, N и Q и, может быть, некоторых параметров (см. формулы (65), (71), (35), (36) и (37)), то равенство (149) распространяется и на случай $\det(M\lambda+N)\equiv\det(P\lambda+Q)\equiv 0$ по непрерывности.

§ 4. Формальное решение основной задачи

Пусть λ_s $(s=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ — последовательность собственных значений задачи (85), (86). Построим для каждого $\lambda=\lambda_s$ основную систему собственных матриц, а из нее описанным в предыдущем параграфе способом (см. формулы (129), (130)) построим матрицу

$$Y^{(s)}_{nk_s}(x)=\| Y^{(s)}_{nm_1^{(s)}}(x),\ Y^{(s)}_{nm_2^{(s)}}(x),\ldots,Y^{(s)}_{nm_{p_s}^{(s)}}(x)\|, \tag{153}$$

где k_s — кратность нуля λ_s функции $\Delta(\lambda)$, p_s — кратность собственного значения λ_s, $m_i^{(s)}$ $(i=1,2,\ldots,p_s;\ m_i^{(s)}\geqslant m_{i+1}^{(s)})$ — длины цепочек основной системы собственных матриц задачи (85), (86) при $\lambda=\lambda_s$ $(s=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. Для сопряженной задачи перенумеруем собственные значения μ_r $(r=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ так, чтобы было $\mu_s=\overline{\lambda}_s$ $(s=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ и для каждого собственного значения $\overline{\lambda}_r$ $(r=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ построим основную систему матриц, а из нее тем же способом, что и для задачи (85), (86), построим матрицу

$$Z^{(r)}_{nk_r}(x)=\| Z^{(r)}_{nm_1^{(r)}}(x),\ Z^{(r)}_{nm_2^{(r)}}(x),\ldots,Z^{(r)}_{nm_{p_r}^{(r)}}(x)\|. \tag{154}$$

Воспользуемся обозначением

$$[F_{nm}(x), G_{nk}(x)]=\int_0^l G^*_{nk}(x)\,F_{nm}(x)\,dx-$$

$$-[RG_{nk}(0)+VG_{nk}(l)]^*[MF_{nm}(0)+PF_{nm}(l)]\quad (m,k=1,2,\ldots), \tag{155}$$

где столбцы матрицы $F_{nm}(x)$ принадлежат пространству $D_2(0,l)$, а столбцы матрицы $G_{nk}(x)$ — пространству $D_2^*(0,l)$. Если столбцы матриц $F_{nm}(x)=\|f_1(x), f_2(x),\ldots,f_m(x)\|$ и $G_{nk}(x)=\|g_1(x),\ g_2(x),\ldots,g_k(x)\|$ принадлежат пространству $C^{(1)}(0,l)$, то для каждой пары $f_i(x), g_j(x)$ $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,k)$ этих столбцов можно написать тождество (78); объединяя эти тождества для всевозможных пар, получим тождество

$$[LF_{nm}(x), G_{nk}(x)]-[H^{(1)}G_{nk}(0)+H^{(2)}G_{nk}(l)]^*hF_{nm}=$$

$$=[F_{nm}(x), L^*G_{nk}(x)]+(h^*G_{nk})^*[G^{(1)}F_{nm}(0)+G^{(2)}F_{nm}(l)]. \tag{156}$$

Лемма 11. *Если* $s \neq r$, *то между матрицами* $Y_{nk_s}^{(s)}(x)$ *и* $Z_{nk_r}^{(r)}(x)$ $(s, r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *имеют место соотношения*

$$[Y_{nk_s}^{(s)}(x), Z_{nk_r}^{(r)}(x)] = 0. \tag{157}$$

Доказательство. Для доказательства соотношений (157) достаточно доказать, что для $s \neq r$ имеют место равенства

$$[Y_{nm_i^{(s)}}^{(s)}(x), Z_{nm_j^{(r)}}^{(r)}(x)] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, p_s;\ j = 1, 2, \ldots, p_r;$$

$$s, r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{158}$$

Так как матрицы $Y_{nm_i^{(s)}}^{(s)}(x)$ являются решениями задач (85), (86) при $k = m_i^{(s)}$, то

$$LY_{nm_i^{(s)}}^{(s)}(x) = Y_{nm_i^{(s)}}^{(s)}(x) J_{m_i^{(s)}}(\lambda_s), \quad hY_{nm_i^{(s)}}^{(s)} = 0. \tag{159}$$

Аналогично, из того, что матрицы $Z_{nm_j^{(r)}}^{(r)}(x)$ удовлетворяют задачам (89), (90), следует, что

$$L^* Z_{nm_j^{(r)}}^{(r)}(x) = Z_{nm_j^{(r)}}^{(r)}(x) J_{m_j^{(r)}}^*(\lambda_r), \quad h^* Z_{nm_j^{(r)}}^{(r)} = 0. \tag{160}$$

Из соотношений (159), (160) и тождества (156) получим, что

$$[Y_{nm_i^{(s)}}^{(s)}(x) J_{m_i^{(s)}}(\lambda_s), Z_{nm_j^{(r)}}^{(r)}(x)] = [Y_{nm_i^{(s)}}^{(s)}(x), Z_{nm_j^{(r)}}^{(r)}(x) J_{m_j^{(r)}}^*(\lambda_r)]$$

или

$$J_{m_j^{(r)}}(\lambda_r) [Y_{nm_i^{(s)}}^{(s)}(x), Z_{nm_j^{(r)}}^{(r)}(x)] = [Y_{nm_i^{(s)}}^{(s)}(x), Z_{nm_j^{(r)}}^{(r)}(x)] J_{m_i^{(s)}}(\lambda_s). \tag{161}$$

Докажем теперь, что из уравнения

$$J_m(\lambda_0) X_{mk} = X_{mk} J_k(0), \tag{162}$$

где $\lambda_0 \neq 0$, следует, что $X_{mk} = 0$. Для этого обозначим $X_{mk} = \| x_1, \ldots, x_k \|$ и заметим, что уравнение (162) можно переписать так:

$$\| J_m(\lambda_0) x_1, J_m(\lambda_0) x_2, \ldots, J_m(\lambda_0) x_k \| = \| 0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \|. \tag{163}$$

Отсюда следует, что $J_m(\lambda_0) x_1 = 0$, $J_m(\lambda_0) x_2 = x_1, \ldots, J_m(\lambda_0) x_k = x_{k-1}$, но $\det J_m(\lambda_0) = \lambda_0^m \neq 0$, а потому $x_1 = 0$. Но тогда $J_m(\lambda_0) x_2 = x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ и т. д. Этим доказано, что $X_{mk} = 0$.

Так как $J_{m_i^{(s)}}(\lambda_s) = \lambda_s E + J_{m_i^{(s)}}(0)$, а $J_{m_j^{(r)}}(\lambda_r) - \lambda_s E = J_{m_j^{(r)}}(\lambda_r - \lambda_s)$, то соотношение (161) можно переписать в виде

$$J_{m_j^{(r)}}(\lambda_r - \lambda_s) [Y_{nm_i^{(s)}}^{(s)}(x), Z_{nm_j^{(r)}}^{(r)}(x)] = [Y_{nm_i^{(s)}}^{(s)}(x), Z_{nm_j^{(r)}}^{(r)}(x)] J_{m_i^{(s)}}(0). \tag{164}$$

В силу только что доказанного, при $s \neq r$ из (164) следует соотношение (158). Лемма доказана.

Определение. Система матриц $\{Y_{nk_s}^{(s)}(x)\}$ $(s=0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ называется полной в пространстве $D_2(0, l)$, если замыкание множества линейных комбинаций $\sum\limits_{s=-N_1}^{N_2} Y_{nk_s}^{(s)}(x) a_s$ по норме пространства $D_2(0, l)$ совпадает с пространством $D_2(0, l)$.

Лемма 12. *Если система матриц* $\{Y_{nk_s}^{(s)}(x)\}$ $(s=0, \pm 1, \ldots)$ — *полная в пространстве* $D_2(0, l)$, *то* $\det[Y_{nk_s}^{(s)}(x), Z_{nk_s}^{(s)}(x)] \neq 0$ $(s=0, \pm 1, \ldots)$.

Доказательство. Предположим, что система $\{Y_{nk_s}^{(s)}(x)\}$ $(s=0, \pm 1, \ldots)$ — полная и матрица $B_{s_0}=[Y_{nk_{s_0}}^{(s_0)}(x), Z_{nk_{s_0}}^{(s_0)}(x)]$ — вырожденная, т. е. $\det[Y_{nk_{s_0}}^{(s_0)}(x), Z_{nk_{s_0}}^{(s_0)}(x)]=0$. Тогда будет вырожденной и матрица $B_{s_0}^*$, т. е. существует вектор $b \neq 0$ такой, что $B_{s_0}^* b=0$ или $b^* B_{s_0}=0$. Таким образом,

$$b^* B_{s_0}=b^*[Y_{nk_{s_0}}^{(s_0)}(x), Z_{nk_{s_0}}^{(s_0)}(x)]=[Y_{nk_{s_0}}^{(s_0)}(x), Z_{nk_{s_0}}^{(s_0)}(x) b]=0. \tag{165}$$

Рассмотрим функцию $g_0(x)=Z_{nk_{s_0}}^{(s_0)}(x) b$. Она принадлежит пространству $D_2^*(0, l)$, и, кроме того, из соотношений (158) и (165) следует, что для любой функции $f_{N_1N_2}(x)=\sum\limits_{s=-N_1}^{N_2} Y_{nk_s}^{(s)}(x) a_s$

$$[f_{N_1N_2}(x), g_0(x)]=0. \tag{166}$$

Так как столбцы матрицы $Z_{nk_{s_0}}^{(s_0)}(x)$ линейно независимы, то $g_0(x) \not\equiv 0$.

Пусть теперь $\varepsilon>0$ — произвольное число и $f(x) \in D_2(0, l)$. Тогда из того, что система матриц $\{Y_{nk_s}^{(s)}(x)\}$ $(s=0, \pm 1, \ldots)$ — полная в $D_2(0, l)$, следует, что найдется такая функция $f_{N_1N_2}^{(0)}(x)=\sum\limits_{s=-N_1}^{N_2} Y_{nk_s}^{(s)}(x) a_s$, что $\| f(x)-f_{N_1N_2}^{(0)}(x) \|_{D_2(0,l)}<\frac{\varepsilon}{\|g_0(x)\|_{D_2^*(0,l)}}$. Используя равенство (166) и неравенство (61), получим, что

$$|[f(x), g_0(x)]|=|[f(x)-f_{N_1N_2}^{(0)}(x), g_0(x)]| \leqslant$$

$$\leqslant \| f(x)-f_{N_1N_2}(x) \|_{D_2(0,l)} \| g_0(x) \|_{D_2^*(0,l)}<\varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то $[f(x), g_0(x)]=0$, а так как $f(x) \in D_2(0, l)$ произвольно, то, в силу свойства (58c), $g_0(x)=Z_{nk_{s_0}}^{(s_0)} b \equiv 0$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Пусть $f(x) \in D_2(0, l)$ представлена в виде суммы ряда

$$f(x)=\sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_{nk_s}^{(s)}(x) a_s, \tag{167}$$

(сходящегося в смысле пространства $D_2(0, l)$, может быть, после некоторой группировки членов), где a_s — k_s-мерные векторы, или, иначе говоря, пусть функция $f(x) \in D_2(0, l)$ разложена по собственным и присоединенным функциям задачи (62), (63). Исходя из этого ряда, построим новый ряд

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} Y_{nk_s}^{(s)}(x) e^{I_s t} a_s, \tag{168}$$

где $I_s = \begin{Vmatrix} J_{m_1^{(s)}}(\lambda_s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{m_2^{(s)}}(\lambda_s) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_{m_{p_s}^{(s)}}(\lambda_s) \end{Vmatrix}$, а $J_{m_i^{(s)}}(\lambda_s)$ $(i = 1, 2, \dots, p_s)$ — $m_i^{(s)}$-мерная клетка Жордана для λ_s $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Поскольку каждый член ряда (168) есть решение краевой задачи (1), (2), а при $t = 0$ этот ряд превращается в разложение (167), то ясно, что если ряд (168) сходится и допускает почленное дифференцирование по x и t $(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant \leqslant T < +\infty)$, то он дает решение основной задачи для начальных условий $f(x)$. Ряд (168) будем называть формальным решением задачи (1), (2), (3). Для его построения нужно уметь вычислять коэффициенты a_s. Для этого воспользуемся последовательностью матриц $Z_{nk_r}^{(r)}(x)$ $(r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ и соотношениями (157), которые будем называть условиями биортогональности. Составим для фиксированного s выражение

$$[f(x),\ Z_{nk_s}^{(s)}(x)] = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} Y_{nk_r}^{(r)}(x) a_r,\ Z_{nk_s}^{(s)}(x)\right], \tag{169}$$

где

$$[f(x),\ Z_{nk_s}^{(s)}(x)] = \int_0^l Z_{nk_s}^{(s)*}(x) f(x)\,dx - [RZ_{nk_s}^{(s)}(0) + VZ_{nk_s}^{(s)}(l)]^* [Mf(0) + Pf(l)]. \tag{170}$$

Из условий биортогональности следует, что для $s \neq r$ $[Y_{nk_r}^{(r)}(x) a_r,\ Z_{nk_s}^{(s)}(x)] = [Y_{nk_r}^{(r)}(x),\ Z_{nk_r}^{(r)}(x)]\, a_r = 0$, а потому (в силу того, что возможно почленное раскрытие скобок в правой части равенства (169)) можно написать:

$$[f(x), Z_{nk_s}^{(s)}(x)] = [Y_{nk_s}^{(s)}(x) a_s,\ Z_{nk_s}^{(s)}(x)] = [Y_{nk_s}^{(s)}(x),\ Z_{nk_s}^{(s)}(x)]\, a_s, \tag{171}$$

и если

$$B_s = [Y_{nk_s}^{(s)}(x),\ Z_{nk_s}^{(s)}(x)], \tag{172}$$

то для нахождения вектора a_s получаем уравнение

$$B_s a_s = [f(x),\ Z_{nk_s}^{(s)}(x)]. \tag{173}$$

Отсюда, если только $\det B_s \neq 0$ (как, например, в случае, когда система матриц $Y_{nk_s}^{(s)}(x)$ $(s = 0, \pm 1, \dots)$ полна в пространстве $D_2(0, l)$), получаем:

$$a_s = B_s^{-1} [f(x), Z_{nk_s}^{(s)}(x)] = [f(x), Z_{nk_s}^{(s)}(x) B_s^{*-1}] \quad (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \tag{174}$$

где последний переход в равенстве (174) следует из (170). В частности, если некоторый нуль λ_s функции $\Delta(\lambda)$ — простой, то a_s есть число и $B_s = [y_s(x), z_s(x)]$ — также число, причем

$$a_s = \frac{[f(x), z_s(x)]}{[y_s(x), z_s(x)]}, \tag{175}$$

где $y_s(x)$ и $z_s(x)$ — собственные функции задач (62), (63) и (69), (70) соответственно.

(Поступило в редакцию 20/V 1957 г.)

Литература

1. М. В. Келдыш, О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, т. 77, № **1** (1951), 11—14.
2. G. Birkhoff, R. E. Langer, The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order, Proc. Amer. Acad. Arts and Sciences, 58 (1923), 51—128.
3. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Москва, Гостехиздат, 1954.
4. А. Д. Мышкис, Непрерывная зависимость решения смешанной задачи для систем линейных дифференциальных уравнений от начальных условий и правых частей системы, Матем. сб., **30** (72) (1952), 317—328.
5. А. Д. Мышкис, Простейшая краевая задача для обобщенных систем телеграфных уравнений, Матем. сб., **31** (73) (1952), 335—352.
6. Н. А. Бразма и А. Д. Мышкис, Закон сохранения энергии в теории обобщенных систем телеграфных уравнений, Прикл. матем. и мех., т. **XV**, № **4** (1951), 495—500.
7. О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, Москва, Гостехиздат, 1953.
8. W. F. Bauer, Modified Sturm-Liouville systems, Quart. Appl. Math., **11**, N **3** (1953), 273—283.
9. И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Москва, Гостехиздат, 1953.
10. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Москва, Гостехиздат, 1953.
11. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Москва, Гостехиздат, 1950.
12. В. Ф. Жданович, Решение методом Фурье несамосопряженных смешанных задач для гиперболических систем на плоскости, ДАН СССР, т. **114**, № 5 (1957).
13. А. Д. Мышкис, В. Э. Аболиня, В. Ф. Жданович, Е. Х. Костюкович, А. Е. Лепин, П. И. Харитоненко и А. С. Шлопак, Смешанная задача для линейных гиперболических систем на плоскости, Труды Третьего всесоюзного матем. съезда, т. I, Изд. АН СССР, 1956, 61—63.