АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ANALYTIC METHODS OF ANALYSIS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

Analytic Methods of Analysis and Differential Equations

AMADE

Minsk September 12–17, 2011 Belarus

Труды 6-й международной конференции
12 – 17 сентября 2011 года, Минск, Беларусь

Том 1

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Минск 2012

Труды 6-й международной конференции "Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений" (AMADE-2011). Том 1. С. 99–103

УДК 517.968

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Г. А. Расолько, Л. А. Альсевич

We propose an algorithm for the numerical solution of integro-differential equation

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)}{t-x}\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\ln|t-x|\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)K(x,t)\,dt=f(x),\quad -1<x<1,$$

in a class of functions represented in the form $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}\,v(x)$ (with Hölder-continuous v) using the method of orthogonal polynomials.

Аппарат сингулярных интегральных уравнений (СИУ) применяется во многих вопросах естествознания. Характерной особенностью приближенного решения интегральных, а так же интегро-дифференциальных, уравнений является их дискретизация, т.е. получение тем или иным способом системы линейных алгебраических уравнений. В [1] при решении задачи рассеяния волн криволинейным экраном в случае H-поляризации рассматривается метод приближенного решения интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi'(t)}{t-x}\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\ln|t-x|\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)K(x,t)\,dt=f(x),\quad -1<x<1, \tag{1}$$

в случае, когда неизвестная функция представима в виде $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}\,v(x)$. Вычислительная схема получается после интерполирования неизвестной функции многочленом по узлам Чебышева $\tau_m=\cos\theta_m$, $\theta_m=\dfrac{m\pi}{n+1}$, $m=\overline{1,n}$, и привлечения известных спектральных соотношений для интеграла:

$$M_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ln|t-x|\,dt=\begin{cases}-\ln 2, & k=0,\\ -\dfrac{1}{k}T_k(x), & k>0,\end{cases}\quad T_k(x)=\cos(n\arccos x). \tag{2}$$

Однако, как справедливо подчеркнуто в [2, с. 187], такой подход не всегда является оправданным. Бывает целесообразнее разыскивать решение в виде линейной комбинации ортогональных многочленов, например, многочленов Чебышева.

Целью данной работы является построение алгоритма численного решения уравнения (1) с неизвестной функцией $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}\;v(x)$ методом ортогональных многочленов, основной идеей которого является использование спектральных или квазиспектральных соотношений для входящих в уравнение интегралов.

Отметим, что вопросы существования и единственности решения уравнения (1) в классе гёльдеровых функций, а, следовательно, и структуры решения в виде $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}\,v(x)$, рассмотрены в [1, с. 62–70].

Keywords: *Chebyshev polynomials, integral equations, approximate solutions*
2010 Mathematics Subject Classification: 34D08, 56G56

При построении вычислительной схемы наряду с (2) будем использовать известные "спек-ральные соотношения" [3]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}=U_{n-1}(x),\quad -1<x<1,\quad n=1,2,3,\dots,$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x}=-T_n(x),\quad -1<x<1,\quad n=1,2,3,\dots,$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ — многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно, а так получим некоторые другие.

Лемма 1. *Для* $|x|<1$ *имеет место равенство:*

$$J_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-t^2}\,T_k(t)\right)'\frac{dt}{t-x}=\begin{cases}-U_0(x), & k=0,\\ \dfrac{k-1}{2}U_{k-2}(x)-\dfrac{k+1}{2}U_k(x), & k\ge 1.\end{cases}$$

Доказательство. При $k=0$ формула (5) очевидно верна на основании (3). Пусть $k\geq$ Вычислим производную от подынтегральной функции и используем соотношение [4]: $x\,T_k(x)$ $=(1-x^2)U_{k-1}(x)-T_{k-1}(x)$. Тогда $J_k(x)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left((k+1)\sqrt{1-t^2}\,U_{k-1}(t)-\dfrac{T_{k-1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\right)\dfrac{dt}{t-x}$. При-мениим (3), (4), учтем соотношение $2\,T_k(x)=U_k(x)-U_{k-2}(x)$ и получим $J_k(x)=-(k+1)T_k$ $-\,U_{k-2}(x)=\dfrac{k-1}{2}U_{k-2}(x)-\dfrac{k+1}{2}U_k(x)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для* $|x|<1$ *имеет место равенства:*

$$I_k(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,T_k(t)\ln|t-x|\,dt=$$

$$=\begin{cases}-\left(\dfrac{\ln 2}{2}+\dfrac{1}{8}\right)U_0(x)+\dfrac{1}{8}U_2(x), & k=0,\\ -\dfrac{1}{6}U_1(x)+\dfrac{1}{24}U_3(x), & k=1,\\ \left(\dfrac{\ln 2}{4}+\dfrac{1}{8}\right)U_0(x)-\dfrac{5}{32}U_2(x)+\dfrac{1}{32}U_4(x), & k=2,\\ -\dfrac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)}+\dfrac{3k-4}{8k(k-2)}U_{k-2}(x)-\dfrac{3k+4}{8k(k+2)}U_k(x)+\dfrac{1}{8(k+2)}U_{k+2}(x), & k\ge 3.\end{cases}$$

Доказательство. С учетом соотношений [4] $T_0(x)=U_0(x)$, $2\,T_k(x)=U_k(x)-U_{k-2}(x)$ ≥ 1, и $U_k(x)=\dfrac{T_k(x)-T_{k+2}(x)}{2(1-x^2)}$ представления (6) сводятся к вычислению интегралов (2

Методом ортогональных многочленов, используя равенства (2)–(6), построим вычисли-ный алгоритм приближенного решения уравнения (1). Пусть, как и ранее, $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$ Выполним интерполирование заданных функций $K(x,t)$, $f(x)$ по многочленам Чебы чебышевскими узлами первого рода в соответствии с [4]:

$$f_{n+2}(x)=\sum_{k=0}^{n+2}f_kU_k(x),\quad f_k=G_k-\rho_kG_{k+2},\quad G_k=\frac{1}{n+3}\sum_{j=1}^{n+3}f(t_j)T_k(t_j),$$

$$\rho_k=\begin{cases}1, & k=0,1,\dots,n,\end{cases}\qquad t_j=\cos\frac{2j-1}{2(n+3)}\pi,\quad j=1,2,\dots,n+3.$$

$$K_{n,n}(x,t) = \sum_{m=0}^{n} U_m(x) \sum_{j=0}^{n} k^*_{m,j} T_j(t), \quad \delta_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 2, & j > 0, \end{cases}$$

$$k^*_{m,j} = \frac{\delta_j}{n+1} \sum_{r=1}^{n+1} T_j(x_r) \left[\frac{1}{n+1} \sum_{l=1}^{n+1} K(x_l, x_r) \left(T_m(x_l) - \sigma_m T_{m+2}(x_l) \right) \right], \tag{8}$$

$$\sigma_m = \begin{cases} 1, & m = 0, 1, \ldots, n-2, \\ 0, & m = n-1, n, \end{cases} \qquad x_k = \cos \frac{2k-1}{2n+2}\pi, \quad k = \overline{1, n+1}.$$

Приближенное решение уравнения (1) будем искать как точное решение следующего уравнения:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(\sqrt{1-t^2}\, v_n(t))'}{t-x}\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, v_n(t) \ln|t-x|\, dt +$$
$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, v_n(t) K_{n+2,n}(x,t)\, dt = f_{n+2}(x), \quad -1 < x < 1, \tag{9}$$

где

$$v_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k T_k(x), \tag{10}$$

c_k– числа, подлежащие определению.

Упростим интегралы, входящие в (9). С учетом (10) и леммы 1 имеем:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(\sqrt{1-t^2}\, v_n(t))'}{t-x}\, dt = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(\sqrt{1-t^2}\, T_k(t))'}{t-x} = -c_0 U_0(x) + \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{k-1}{2} U_{k-2} -$$
$$- \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{k+1}{2} U_k = -c_0 U_0(x) + \sum_{k=0}^{n-2} c_{k+2} \frac{k+1}{2} U_k(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{k+1}{2} U_k(x) = \tag{11}$$
$$= -c_0 U_0(x) + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k+1}{2} (c_{k+2} - c_k) U_k(x) - \sum_{k=n-1}^{n} c_k \frac{k+1}{2} U_k(x) \triangleq \sum_{k=0}^{n} A_k U_k(x).$$

Этим получено разложение первого интеграла по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(\sqrt{1-t^2}\, v_n(t))'}{t-x}\, dt = \sum_{k=0}^{n} A_k U_k(x), \tag{12}$$

где A_k, на основании (11), имеют вид:

$$A_k = \begin{cases} 0,5\, c_2 - c_0, & k = 0, \\ 0,5(k+1)(c_{k+2} - c_k), & k = \overline{1,\, n-2}, \\ -0,5\, n\, c_{n-1}, & k = n-1, \\ -0,5\,(n+1)\, c_n, & k = n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Рассмотрим второй интеграл и снова учтем (10):

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, v_n(t) \ln|t-x|\, dt = \sum_{k=0}^{n} c_k \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, T_k(t) \ln|t-x|\, dt = \sum_{k=0}^{n} c_k I_k(x).$$

Подставив вместо $I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, T_k(t) \ln|t-x|\, dt$ его значение по равенству (6), получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)\ln|t-x|\,dt = c_0\left(\frac{1}{8}U_2(x)-\left(\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{8}\right)U_0(x)\right)+$$
$$c_1\left(-\frac{1}{6}U_1(x)+\frac{1}{24}U_3(x)\right)+c_2\left(\left(\frac{\ln 2}{4}+\frac{1}{8}\right)U_0(x)-\frac{5}{32}U_2(x)+\frac{1}{32}U_4(x)\right)+ \tag{13}$$
$$\sum_{k=3}^{n}c_k\left(-\frac{U_{k-4}(x)}{8(k-2)}+\frac{3k-4}{8k(k-2)}U_{k-2}(x)-\frac{3k+4}{8k(k+2)}U_k(x)+\frac{1}{8(k+2)}U_{k+2}(x)\right).$$

Перегруппировав это выражение, будем иметь разложение второго интеграла по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)\ln|t-x|\,dt = \sum_{k=0}^{n+2}B_kU_k(x). \tag{14}$$

Значения коэффициентов B_k, $k=\overline{0,n+2}$, несложно выписать на основании (13).

Рассмотрим третий интеграл и учтем представления (8) и (10):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt = \sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=0}^{n}k^*_{m,j}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,T_k(t)T_j(t)\,dt =$$

$$\sum_{k=0}^{n}c_k\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=0}^{n}k^*_{m,j}M_{k,j},\quad M_{k,j}=\begin{cases}0,5, & k=j=0,\\ 0,125 & k=j=1,\\ 0,25, & k=j\ge 2,\\ -0,25, & k=0,\ j=2,\ \text{или } k=2,\ j=0,\\ -0,125, & k\ge 1,\ j=k+2,\ \text{или } k\ge 3,\ j=k-2,\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Следовательно, этим получено разложение третьего интеграла по многочленам Чебышева второго рода:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,v_n(t)K_{n,n}(x,t)\,dt = \sum_{k=0}^{n}D_kU_k(x), \tag{15}$$

где $D_k=\sum\limits_{q=0}^{n}c_q\omega_q^k$,

$$\omega_q^k=\begin{cases}0,5\,k^*_{k,0}-0,25k^*_{k,2}, & q=0,\\ 0,125\,k^*_{k,1}-0,125k^*_{k,3}, & q=1,\\ -0,25\,k^*_{k,0}+0,25k^*_{k,2}-0,125k^*_{k,4}, & q=2,\\ -0,125\,k^*_{k,q-2}+0,25k^*_{k,q}-0,125k^*_{k,q+2}, & q=\overline{3,n-2},\\ -0,125\,k^*_{k,q-3}+0,25k^*_{k,q}, & q=\overline{n-1,n},\\ 0, & k>n.\end{cases} \tag{16}$$

Собирая вместе разложения каждого из трех интегралов по формулам (12), (14), (15), имеем слева линейную комбинацию многочленов Чебышева второго рода, а справа — функция $f_{n+2}(x)$ в виде (7):

$$\sum_{k=0}^{n+2}(A_k+B_k+D_k)U_k(x)=\sum_{k=0}^{n+2}f_kU_k(x).$$

Это равенство возможно тогда и только тогда, когда имеет место следующая система A_k+ $+B_k+D_k=f_k$, $k=\overline{0,n+2}$. Выполнив простейшие преобразования, отсюда придем к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных чисел c_k, $k = \overline{0, n}$:

$$\begin{gathered}
-\left(\frac{\ln 2}{2} + \frac{9}{8}\right) c_0 + \left(\frac{\ln 2}{4} + \frac{5}{8}\right) c_2 - \frac{1}{16} c_4 + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega_q^0 = f_0, \\
\left(\frac{1}{8} + \beta_1\right) c_1 + \gamma_1 c_3 + \delta_1 c_5 + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega_q^1 = f_1, \\
\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \delta_k c_{k+4} + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega_q^k = f_k, \quad k = \overline{2, n-4}, \\
\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \gamma_k c_{k+2} + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega_q^k = f_k, \quad k = n-3,\ n-2, \\
\alpha_k c_{k-2} + \beta_k c_k + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega_q^k = f_k, \quad k = n-1,\ n, \\
\alpha_k c_{k-2} + \sum_{q=0}^{n} c_q \omega_q^k = f_k, \quad k = n+1,\ n+2,
\end{gathered} \tag{17}$$

где коэффициенты ω_q^k вычисляются согласно (16),

$$\alpha_k = \begin{cases} 1/8, & k = 2; \\ \dfrac{1}{8\,k}, & k = \overline{3,4}; \\ \dfrac{1}{8\,(k-2)}, & k > 4, \end{cases} \quad \beta_k = -\frac{4(k+1)^3 - k}{8k(k+2)}, \ \gamma_k = \frac{4(k+1)^3 - k - 2}{8k(k+2)}, \ \delta_k = -\frac{1}{8k(k+2)}.$$

Решив систему (17), приближенное решение уравнения (1) получим по формуле (10).

Численный эксперимент. Применим полученный алгоритм к приближенному решению уравнения (1) при $K(x,t) = \dfrac{4t}{x+2}$, $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - 5x + \dfrac{1}{x+2} + i\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5}{4} - \dfrac{\ln 2}{2}\right)$. Нетрудно проверить, что решением этого уравнения будет функция $\varphi(x) = \sqrt{1-x^2}(2x+i)$. В результате численного решения, например, при $n = 15$ погрешность решения не превосходит 10^{-10}.

Доказательство сходимости приближенного решения (10) к точному и оценка погрешности решения можно провести по аналогии с [1, с. 69], но это являются целью другой работы.

Литература

1. **Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.** Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев, 1984.

2. **Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.** Численные методы. М., 1987.

3. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. М., 1966. Т. 2.

4. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.

Белорусский государственный университет, г. Минск