УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

КВАЗИСПЕКТРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ НА КОНЦАХ ОТРЕЗКА

Белорусский государственный университет

(*Поступила в редакцию 15.12.2011*)

Аппарат сингулярных интегральных уравнений (СИУ) применяется при исследовании большого класса граничных задач теории упругости, аэродинамики и в других областях естествознания [1–5]. Эффективность численных методов для решения подобных задач во многом зависит от способа дискретизации задачи. Среди известных подходов следует отметить методы, основанные на полиномиальной аппроксимации искомого решения, в том числе метод ортогональных многочленов [2–5].

После появления первых ЭВМ началось широкое внедрение в численный анализ многочленов Чебышева. В теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши известны так называемые спектральные соотношения для сингулярных интегралов [6]:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}=U_{n-1}(x),\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}U_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x}=-T_n(x),\quad |x|<1,\quad n\geq 0, \tag{1}$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода.

В работах [7, 8] получены разложения сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью и ядром Коши вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1-t}{1+t}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}P_n(t)\frac{dt}{t-x},\quad -1<x<1,\quad |\alpha|=|\beta|=1/2, \tag{2}$$

в виде линейной комбинации многочленов Чебышева первого или второго рода, когда $P_n(t)$ многочлен $T_n(x)$ или $U_n(x)$. В дальнейшем нам удалось получить эти разложения в рациональных числах. Упрощенные соотношения будем называть *квазиспектральными соотношениями*. Их можно использовать при построении вычислительных схем приближенного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода со специальной правой частью. Однако, как нам видится, они представляют и самостоятельный результат.

При доказательстве квазиспектральных соотношений существенно использовались результаты, сформулированные в следующих леммах, доказаных в работах [7, 8].

Л е м м а 1. *Пусть* α *и* β *таковы, что* $|\alpha|=|\beta|=1/2$. *Для любого многочлена* $P_M(x)$ *степени* $M\geq 0$ *справедливо:*

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}P_M(t)dt=\operatorname*{Res}_{z=\infty}\left((z-1)^{\alpha}(z+1)^{\beta}\ln\frac{z-1}{z+1}P_M(z)\right). \tag{3}$$

Л е м м а 2. *Пусть* α *и* β *таковы, что* $|\alpha|=|\beta|=1/2$. *При* $m\geq 0$ *для* $|x|<1$ *имеет место следующее представление*:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\ln\frac{1-t}{1+t}t^m\frac{dt}{t-x}=-P_{m+(\alpha+\beta)-1}(x)-\pi(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}x^m, \tag{4}$$

где при $m+(\alpha+\beta)\ge 1$ $P_{m+(\alpha+\beta)-1}(z)$ – *некоторый многочлен степени* $m+(\alpha+\beta)-1$ *и тождественный нуль в противном случае.*

Т е о р е м а 1. *Для* $x\in(-1,1)$ *и* $k\ge 0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{T_k(t)dt}{t-x}=-\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}T_k(x)-8\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\sum_{m=0}^{j}\frac{1}{2m+1}T_{k-2-2j}(x), \tag{5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{T_k(t)dt}{t-x}=-\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}T_k(x)-4\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}\frac{1}{2j+1}U_{k-2-2j}(x), \tag{6}$$

где $\sum\limits_{j=0}^{m}{}^{0}\rho_jT_{m-j}\equiv\rho_0T_m+\rho_1T_{m-1}+\dots+\rho_{m-1}T_1+\frac{1}{2}\rho_mT_0.$

Д о к а з а т е л ь с т в о истинности равенств (5), (6) проведем методом математической индукции. При $k=0$ и $k=1$ на основании (4) с учетом того, что $T_0(x)=1,\ T_1(x)=x$ равенство (5) верно. Пусть (5) верно для $k\le n$, т. е.

$$I_n\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{T_n(t)dt}{t-x}=-\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)-8\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}{}^{0}\sum_{m=0}^{j}\frac{1}{2m+1}T_{n-2-2j}(x).$$

Покажем, что (5) справедливо и для $k=n+1$. Поскольку при $n>0$

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), \tag{7}$$

то $I_{n+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{(2tT_n(t)-T_{n-1}(t))dt}{t-x}=J_n+2xI_n-I_{n-1}$, где $J_n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_n(t)dt.$ Так как для четных n $J_n=0$, а для нечетных n на основании (3) $J_n=-4/n$, то, используя (7), получаем справедливость (5) для $k=n+1$.

Доказательство равенства (6) проводится аналогично с использованием при $n>0$ соотношения

$$U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x). \tag{8}$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Для* $x\in(-1,1)$ *и* $k\ge 0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{U_k(t)dt}{t-x}=-\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}U_k(x)-8\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}\sum_{m=0}^{j}\frac{1}{2m+1}U_{k-2-2j}(x), \tag{9}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{U_k(t)dt}{t-x}=-\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}U_k(x)-16\sum_{j=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]}{}^{0}\sum_{l=0}^{j}\frac{j+1-l}{2l+1}T_{k-2-2j}(x). \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о истинности равенств (9), (10) проведем также методом математической индукции. При $k=0$ и $k=1$ на основании (4) с учетом того, что $U_0(x)=1, U_1(x)=2x$ равенство (9) верно. Пусть (9) верно для $k\le n$, т. е.

$$I_n\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{U_n(t)dt}{t-x}=-\frac{\pi}{\sqrt{1-x^2}}U_n(x)-8\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\sum_{m=0}^{j}\frac{1}{2m+1}U_{n-2-2j}(x).$$

Покажем, что (9) справедливо и для $k=n+1$. Используя (8), имеем $I_{n+1}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{(2tU_n(t)-U_{n-1}(t))dt}{t-x}=J_n+2xI_n-I_{n-1}$, где $J_n=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_n(t)dt.$ Так как для четных n $J_n = 0$, а для нечетных n на основании (3) $J_n = -8\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$, то получаем справедливость (9) для $k = n+1$.

Доказательство равенства (10) проводится по аналогии с предыдущим. Теорема доказана.

Теорема 3. *Для* $x \in (-1,1)$ *и* $k \ge 0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{T_k(t)dt}{t-x} = -\pi\sqrt{1-x^2}T_k(x)+2T_k(x)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}{}^{0}\frac{4}{4j^2-1}T_{k-2j}(x), \tag{11}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{T_k(t)dt}{t-x} = -\pi\sqrt{1-x^2}T_k(x)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\beta_j^{(k)}U_{k-2j}(x), \tag{12}$$

$$\beta_0^{(0)} = 2,\ \beta_0^{(1)} = 1,\ \beta_0^{(k)} = 1,\ \beta_1^{(k)} = -\frac{5}{3},\ \beta_j^{(k)} = \frac{8}{(2j-3)(4j^2-1)},\ j = \overline{2,\left[\frac{k}{2}\right]},\ k \ge 2.$$

Доказательство (11), (12) проводится аналогично предыдущему с использованием равенства

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}T_n(t)dt = \begin{cases}\dfrac{2}{n(n-2)}-\dfrac{2}{n(n+2)}, & n - \text{нечетное},\\ 0, & n - \text{четное}.\end{cases}$$

Теорема 4. *Для* $x \in (-1,1)$ *и* $k \ge 0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{U_k(t)dt}{t-x} = -\pi\sqrt{1-x^2}U_k(x)+2U_k(x)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{4}{4j^2-1}U_{k-2j}(x), \tag{13}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{U_k(t)dt}{t-x} = -\pi\sqrt{1-x^2}U_k(x)+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}{}^{0}\frac{4}{2j+1}T_{k-2j}(x). \tag{14}$$

Доказательство равенств (13), (14) проводится подобно предыдущему с учетом:

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}U_n(t)dt = \begin{cases}\dfrac{-4}{n(n+2)}, & n - \text{нечетное},\\ 0, & n - \text{четное}.\end{cases}$$

Теорема 5. *Для* $x \in (-1,1)$ *и* $k \ge 0$ *справедливы равенства*

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x} &= -\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}U_k(x)-4U_{k-1}(x)-\\ &\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sum_{m=0}^{j-1}\frac{8}{2m+1}U_{k-2j}(x)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\left(\sum_{m=0}^{j}\frac{8}{2m+1}-\frac{4}{2j+1}\right)U_{k-1-2j}(x),\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x} &= -\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}T_k(x)-2U_{k-1}(x)-\\ &\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{4}{2j-1}U_{k-2j}(x)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{8j}{4j^2-1}U_{k-1-2j}(x).\end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство истинности равенств (15), (16) проводится, как и ранее, методом математической индукции с учетом того, что

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_n(t)dt_n=\begin{cases}-8\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right), & n-\text{нечетное},\\ -8\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)+\frac{4}{n+1}, & n-\text{четное}.\end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_n(t)dt=\begin{cases}-\frac{4}{n}, & n-\text{нечетное},\\ -\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n+1}, & n-\text{четное}.\end{cases}$$

Теорема 6. *Для* $x\in(-1,1)$ *и* $k\geq 0$ *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=$$
$$-\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}T_k(x)+2U_{k-1}(x)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{4}{2j-1}U_{k-2j}(x)+\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{8j}{4j^2-1}U_{k-1-2j}(x), \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}U_k(x)+4U_{k-1}(x)+\\ \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sum_{m=0}^{j-1}\frac{-8}{2m+1}U_{k-2j}(x)+\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\left(\sum_{m=0}^{j}\frac{8}{2m+1}-\frac{4}{2j+1}\right)U_{k-1-2j}(x).\end{gathered} \tag{18}$$

Доказательство равенств (17), (18) проводится по аналогии с предыдущими с учетом того, что

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_n(t)\,dt=\begin{cases}-\frac{4}{n}, & n-\text{нечетное},\\ \frac{2}{n-1}+\frac{2}{n+1}, & n-\text{четное}.\end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_n(t)\,dt=\begin{cases}-8\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right), & n-\text{нечетное},\\ 8\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)-\frac{4}{n+1}, & n-\text{четное}.\end{cases}$$

Теорема 7. *Для* $x\in(-1,1)$ *и* $k\geq 0$ *справедливы равенства*

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}T_k(x)-2U_{k-1}(x)-\\ \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{4}{2j-1}U_{k-2j}(x)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{8j}{4j^2-1}U_{k-1-2j}(x),\end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_k(t)\frac{dt}{t-x}=-\pi\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}U_k(x)-4U_{k-1}(x)-\\ \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\sum_{m=0}^{j-1}\frac{8}{2m+1}U_{k-2j}(x)-\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\left(\sum_{m=0}^{j}\frac{8}{2m+1}-\frac{4}{2j+1}\right)U_{k-1-2j}(x).\end{gathered} \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о равенств (19) и (20) проводится аналогично предыдущему с использованием того, что

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}T_n(t)dt=\begin{cases}\dfrac{-4}{n},\ n-\text{ нечетное},\\ -\dfrac{2}{n-1}-\dfrac{2}{n+1},\ n-\text{четное}.\end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\ln\frac{1-t}{1+t}U_n(t)dt=\begin{cases}-8\left(1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right),\ n-\text{ нечетное},\\ -8\left(1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}\right)+\dfrac{4}{n+1},\ n-\text{ четное}.\end{cases}$$

Литература

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

2. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, 1976.

3. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М., 1982.

4. *Габдулхаев Б. Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ. Казань, 1994.

5. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.

6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М., 1966. Т. 2.

7. *Расолько Г. А., Альсевич Л. А.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 2. С. 46–51.

8. *Расолько Г. А., Альсевич Л. А.* // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 5. С. 10–14.

G. A. RASOLKO

QUASI-SPECTRAL CORRELATIONS FOR A SINGULAR INTEGRAL WITH POWER-LOGARITHMIC SINGULARITY AT THE ENDPOINTS

Summary

For the singular integral with power-logarithmic singularity and the Cauchy kernel

$$K^0(Z\ f)(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\ln\frac{1-t}{1+t}Z(t)P_n(t)\frac{dt}{t-x},\quad -1<x<1,$$

the expansions have been obtained in the form of linear combination of Chebyshev polynomials of first or second order where $Z(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},\ |\alpha|=|\beta|=1/2$, $P_n(t)$ are the Chebyshev polynomials of first or second kind.