УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С ЯДРОМ КОШИ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 18.10.2010)

Аппарат сингулярных интегральных уравнений (СИУ) применяется при исследовании большого класса граничных задач теории упругости, аэродинамики и других проблем естествознания [1, 2]. Эффективность численных методов для решения подобных задач во многом зависит от способа их дискретизации. Среди известных подходов следует отметить методы, основанные на полиномиальной аппроксимации искомого решения.

В теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши известны так называемые спектральные соотношения для сингулярных интегралов:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}=U_{n-1}(x),\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_{n-1}(t)\frac{dt}{t-x}=-T_n(x),$$
$$-1<x<1,\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ldots,\tag{1}$$

где $T_n(x)$, $U_{n-1}(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно. Используя метод, описанный, например, в [3], можно получить аналоги формул (1) для сингулярного интеграла $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,T_k(t)\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{dt}{t-x}$, $-1<x<1$, имеющие вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,T_k(t)\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{dt}{t-x}=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j^{(k)}T_j(x)-\pi\sqrt{1-x^2}\,T_k(x),\ |x|<1,\ k=0,1,\ldots,\tag{2}$$

$$\alpha_j^{(k)}=h_j\begin{cases}0, & k+j-\text{нечетное},\\ A_{k+j}+A_{k-j}+Q_{k-1-j}-Q_{k-1+j}, & k+j-\text{четное},\end{cases}\quad j=\overline{0,k},\ h_j=\begin{cases}1, & j=0,\\ 2, & j>0,\end{cases}$$

где

$$Q_M=\begin{cases}\sum\limits_{k=0}^{\frac{M-1}{2}}b_k^{(M)}c_k^{(M)}, & M-\text{нечетное},\\ 0, & M=-1\ \text{или}\ M-\text{четное},\end{cases}\quad c_k^{(M)}=\frac{1}{M-2k+2}-\sum_{n=0}^{\frac{M-1}{2}-k}\frac{q_n}{M-2k-2n},$$

$$q_0=\frac{1}{2},\quad q_{p+1}=q_p\frac{2p+1}{2p+4},\quad p=0,1,\ldots,\qquad A_{2M}=\frac{1}{1-4M^2},$$

$$b_0^{(n)}=2^n,\quad b_{k+1}^{(n)}=-b_k^{(n)}\frac{(n-2k)(n-1-2k)}{4(k+1)(n-k)},\quad k=\overline{0,[(n-1)/2]}.$$

В данной работе на основании соотношений (2) построена схема численного решения сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k(x,t)\varphi(t)dt=f(x)\ln\frac{1-x}{1+x}+g(x),\quad -1<x<1, \tag{3}$$

в классе H^* (по Мусхелишвили [4]), где $f(x)$, $g(x)$, $k(x,t)$ – заданные на $[-1,1]$ функции, непрерывные по Гельдеру, $\varphi(x)$ – искомая функция. Получены оценки точности приближенного решения.

Сначала применим формулы (2) к построению приближенного решения характеристического уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)\frac{dt}{t-x}=f(x)\ln\frac{1-x}{1+x},\quad -1<x<1. \tag{4}$$

Известно [4, 5], что искомое решение $\varphi(x)\in H^*$ определяется формулой

$$\varphi(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}f(t)\ln\frac{1-t}{1+t}\frac{dt}{t-x}+\gamma_0\right),\quad -1<x<1. \tag{5}$$

Здесь γ_0 – произвольное число, которое будет однозначно определено, если дополнить уравнение (4) условием

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt=A^*, \tag{6}$$

где A^* – наперед заданное число. В этом случае $\gamma_0=A^*$.

Для приближенного решения (4), (6) используем разложение функции $f(x)$ по полиномам Чебышева [6], в результате чего приходим к следующей задаче:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)\frac{dt}{t-x}=\ln\frac{1-x}{1+x}f_n(x),\quad -1<x<1, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\varphi_n(t)dt=A^*, \tag{8}$$

где

$$\begin{gathered} f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f_k\,T_k(x),\qquad f_0=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}f(t_j),\qquad f_k=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}f(t_j)T_k(t_j),\ k>0,\\ t_j=\cos\frac{2j-1}{2n+2}\pi,\ j=1,2,\dots,n+1. \end{gathered} \tag{9}$$

Согласно (5), решение задачи (7), (8) имеет вид

$$\varphi_n(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\ln\frac{1-t}{1+t}f_n(t)\frac{dt}{t-x}+A^*\right),\quad -1<x<1. \tag{10}$$

Используя (9) и учитывая (2), из (10) получаем

$$\varphi_n(x)=\pi f_n(x)-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sum_{j=0}^{n}T_j(x)\sum_{k=j}^{n}f_k\,\alpha_j^{(k)}+A^*\right). \tag{11}$$

Оценим порядок точности приближенного решения в классе функций $W^rH^\mu, r\ge 0,\ 0<\mu\le 1$, имеющих производные до порядка r включительно, причем r-я производная принадлежит классу Гельдера $H(\mu)$: $\left|f^{(r)}(x_1)-f^{(r)}(x_2)\right|\le K|x_1-x_2|^{\mu}$, $\forall x_1,x_2\in[-1,1]$, где K и μ – константы, не зависящие от выбора точек x_1, x_2.

С учетом (5), (10) и оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью [7], может быть доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пусть функция $f(x)$, содержащаяся в (4), принадлежит классу W^rH^{μ}, $r\ge 0$, $0<\mu\le 1$, и аппроксимируется интерполяционным многочленом (9) по узлам Чебышева первого рода. Тогда для точного $\varphi(x)$ и приближенного $\varphi_n(x)$ решения задач (4), (6) и (7), (8) справедлива оценка* $\sqrt{1-x^2}\,\|\varphi(x)-\varphi_n(x)\|_{\infty}\le M_1\dfrac{\ln^2(n)}{n^{r+\mu}}$, $x\in(-1,1)$.

Здесь и далее константы M_k, $k=\overline{1,3}$, не зависят от n.

Решение уравнения (3) при условии (6) будем искать в виде

$$\varphi(x)=\phi(x)+\psi(x), \tag{12}$$

где $\phi(x)$ – решение задачи (4), (6) при $A^*=0$, которое на основании предыдущего, дается формулой (5) с $\gamma_0=0$, а $\psi(x)=v(x)/\sqrt{1-x^2}$ – решение уравнения (3) с правой частью $f_1(x)=g(x)-\dfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k(x,t)\phi(t)dt$ и условием (6). Последняя задача эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$v(x)+\int_{-1}^{1}N(x,t)v(t)dt=F_1(x), \tag{13}$$

в котором

$$N(x,t)=-\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{\sqrt{1-t^2}}k(\tau,t)\frac{d\tau}{\tau-x},\quad F_1(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}f_1(t)\frac{dt}{t-x}+A^*.$$

Если однородное уравнение, соответствующее (13), не разрешимо, то для любых функций $f(x)$, $g(x)\in H(\mu)$ существует единственное решение задачи (3), (6) в классе функций $\varphi(x)\in H^*(\mu)$.

Приближенное решение задачи (3), (6) будем искать в виде комбинации решений двух следующих задач:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\phi_n(t)\frac{dt}{t-x}=f_n(x)\ln\frac{1-x}{1+x},\quad -1<x<1,\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\phi_n(t)dt=0, \tag{14}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v_{n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dt}{t-x}+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k_{n,n}(x,t)\frac{v_{n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=F_n(x),\ |x|<1,\ \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v_{n+1}(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=A^*, \tag{15}$$

$$v_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n+1}c_kT_k(x), \tag{16}$$

Решение задачи (14) (см. (11)) имеет вид

$$\phi_n(x)=\pi f_n(x)-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{j=0}^{n}T_j(x)\sum_{k=j}^{n}f_k\,\alpha_j^{(k)}. \tag{17}$$

В уравнении (15) $F_n(x)=g_n(x)-\dfrac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k_{n,n}(x,t)\phi_n(t)dt$, c_k – числа, подлежащие определению,

$$k_{n,n}(x,t)=\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=0}^{n}k^*_{m,j}T_j(t),\qquad \delta_j=\begin{cases}1, & j=0,\\ 2, & j>0,\end{cases}$$

$$k^*_{m,j}=\frac{\delta_j}{n+1}\sum_{r=1}^{n+1}T_j(x_r)\left[\frac{1}{n+1}\sum_{l=1}^{n+1}k(x_l,x_r)\left(T_m(x_l)-\sigma_m T_{m+2}(x_l)\right)\right], \tag{18}$$

$$\sigma_m=\begin{cases}1, & m=0,1,\ldots,n-2,\\ 0, & m=n-1,\quad n,\end{cases}\qquad x_k=\cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi,\quad k=\overline{1,n+1},$$

$$g_n(x)=\sum_{k=0}^{n}g_kU_k(x),\quad g_k=G_k-\delta_kG_{k+2},\quad G_k=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}g(t_j)T_k(t_j), \tag{19}$$

$$\delta_k=\begin{cases}1, k=0,1,\ldots,n-2,\\ 0, k=n-1,n.\end{cases}\qquad t_j=\cos\frac{2j-1}{2n+2}\pi,\ j=1,2,\ldots,n+1.$$

Используя (9), (17) и (18), упростим $F_n(x)$:

$$F_n(x)=\sum_{m=0}^{n}g_mU_m(x)-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sum_{m=0}^{n}U_m(x)\sum_{j=0}^{n}k^*_{m,j}T_j(t)\left(\pi\sum_{k=0}^{n}f_k\,T_k(t)-\sum_{j=0}^{n}\frac{T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{k=j}^{n}f_k\,\alpha_j^{(k)}\right)dt.$$

Изменяя порядок суммирования, получаем представление $F_n(x)=\sum_{p=0}^{n}F_pU_p(x)$, где

$$F_p=g_p-\sum_{l=0}^{n}k^*_{p,l}d_l,\quad d_l=\sum_{k=0}^{n}f_k\omega_{l,k}-B_l\varepsilon(l),\quad B_l=\sum_{k=j}^{n}f_k\,\alpha_l^{(k)},$$

$$\omega_{l,k}=\begin{cases}0,\ k+l-\text{нечетное},\\ \dfrac{1}{1-(l-k)^2}+\dfrac{1}{1-(l+k)^2},\ k+l-\text{четное},\end{cases}\qquad \varepsilon(l)=\begin{cases}1, & l=0,\\ 0,5\,, & l>0.\end{cases}$$

Используя (1), (16)–(19), из (15) имеем

$$\sum_{p=0}^{n+1}c_pU_{p-1}(x)+\sum_{p=0}^{n}U_p(x)\sum_{k=0}^{n+1}c_k\left\{\sum_{l=0}^{n}k^*_{p,l}\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_k(t)T_l(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt\right\}=\sum_{p=0}^{n}F_pU_p(x),$$

$$\sum_{p=0}^{n+1}c_p\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=A^*.$$

Вычисляя интегралы в последнем выражении и приравнивая коэффициенты при $U_p(x)$, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных c_p, $p=0,1,\ldots,n+1$:

$$\begin{cases}c_{p+1}+\sum_{k=0}^{n+1}c_k\rho_{p,k}=F_p,\ \ p=\overline{0,n},\\ c_0=2A^*,\end{cases}\qquad \rho_{p,k}=\begin{cases}0,5\,k^*_{p,0}, & k=0,\\ 0,25\,k^*_{p,k}, 0<k\le n,\\ 0, & k=n+1.\end{cases} \tag{20}$$

Окончательно приближенное решение задачи (12), (13) имеет вид

$$\varphi_n(x)=\phi_n(x)+\frac{v_{n+1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{21}$$

Для обоснования вычислительной схемы (20) и оценки погрешности приближенного решения, следуя методике работы [8], может быть доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть уравнение* (3) *удовлетворяет следующим условиям:* 1) *решение находится в классе* $H^*(\mu)$; 2) *функции* $f(x)$, $g(x)$, $k(x,t)$ *принадлежат классу* $W^r H^\mu$, $r \geq 0, 0 < \mu \leq 1$ (*последняя по обеим переменным*); 3) *в качестве аппроксимирующих многочленов для функций* $f(x)$, $g(x)$, $k(x,t)$ *взяты соответственно многочлены* $f_n(x)$, $g_n(x)$, $k_{n,n}(x,t)$, *определяемые* (9), (19), (18); 4) *однородное уравнение* (13) *не разрешимо. Тогда при достаточно больших n система* (20) *разрешима и имеет место оценка* $\|v(x) - v_n(x)\|_\infty \leq M_2 \ln^3(n) / n^{r+\mu}$, $x \in (-1, 1)$.

На основании теорем 1 и 2 для точного решения уравнения (3), определяемого формулой (12), и приближенного решения (21) имеет место следующее следствие.

С л е д с т в и е. *Пусть выполняются условия теорем* 1 *и* 2. *Тогда при достаточно больших n имеет место оценка*

$$\sqrt{1-x^2}\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_\infty \leq M_3 \ln^3(n) / n^{r+\mu}, \ x \in (-1, 1).$$

В таблице даны результаты численного решения задачи (3), (6) в классе H^* при $A^* = \sqrt{2}/2$, $f(x) = 1/(\pi(1+x^2))$, $g(x) = -x/(\sqrt{2}(1+x^2))$, $k(x,t) = t/((x+2)(t^2+1))$. Решением в данном случае будет функция $\varphi(x) = (1+x^2)^{-1}(1 - \sqrt{2}/(2\sqrt{1-x^2}))$.

n	10	15	20	23
$\max\limits_{\lvert x\rvert<1} \lvert\varphi(x) - \varphi_n(x)\rvert$	$8{,}7 \cdot 10^{-5}$	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$	$1{,}3 \cdot 10^{-8}$	$1{,}5 \cdot 10^{-9}$

Отметим, что классический прием, используемый, например, в [2], при численном решении рассмотренного уравнения даст только один верный знак после запятой.

З а м е ч а н и е. В статье [9] на основании соотношений, подобных (2), построена схема численного решения сингулярного интегрального уравнения (3) в классе H (по Мусхелишвили [4]).

Литература

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
3. *Расолько Г. А.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2007. № 1. С. 26–34.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., 1977.
6. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.
7. *Якименко Т. С.* Квадратурные формулы для интегралов с ядром Коши со степенно-логарифмической особенностью и смежные вопросы. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1991.
8. *Расолько Г. А.* Прямые методы решения некоторых сингулярных интегральных уравнений. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Минск, 1990.
9. *Расолько Г. А.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 3. С. 24–30.

G. A. RASOLKO

METHOD FOR EXACT SOLUTION OF THE FIRST-KIND SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH THE CAUCHY KERNEL AND A SPECIAL RIGHT HAND-SIDE

Summary

A solution algorithm of the first-kind singular integral equation

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)\ln\frac{1-x}{1+x} + g(x), \quad -1 < x < 1,$$

is suggested. Here Hölder's continuous functions *f*, *g* are given on $[-1, 1]$; $\varphi(x)$ is an unknown function. The algorithm is based on the decomposition of a singular integral with respect to Chebyshev's polynomials of first and second kind in Mushelishvili's class H^*.