Рудикова, Л. В. Использование средств PowerDesigner для поддержки задач проектирования // Управление в социальных и экономических системах. Материалы XV междунар. науч.-практ. конф. Минск. 2006. С.211–212.

Рудикова Лада Владимировна, доцент кафедры программного обеспечения интеллектуальных и компьютерных систем Гродненского государственного университета имени Янки Купалы», кандидат физико-математических наук, доцент, rudikowa@gmail.com

Гузень Александр Владимирович, студент 5 курса специальности «Программное обеспечение информационных технологий» Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, alex_guzen@mail.com

УДК 519.872

С. Э. Статкевич

АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ МЕЖБАНКОВСКИХ ПЛАТЕЖЕЙ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ СООБЩЕНИЙ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

Рассматривается применение сети массового обслуживания с ограниченным временем пребывания сообщений в очередях систем обслуживания, которая может служить стохастической моделью функционирования информационной системы межбанковских платежей в случае, когда электронные платежные документы досрочно отзываются банком-плательщиком из системы расчетов. С помощью данной модели можно находить нестационарные характеристики системы.

Введение

Сеть массового обслуживания (МО) представляет собой совокупность систем массового обслуживания (СМО), между которыми циркулируют сообщения, переходя из одной СМО в другую. Сети МО используются в качестве математических моделей различных объектов в компьютерной технике, экономике, производстве, страховании, медицине. С методами их исследования и применениями можно познакомиться, например, в [1].

В Республике Беларусь действующая платежная система может быть охарактеризована следующим образом. На верхнем уровне банковской сети находится Национальный (Центральный) банк (ЦБ), ниже – крупные периферийные банки (ПБ) со своими филиалами. Все межбанковские платежи проводятся Расчетным центром (РЦ) ЦБ с помощью банковской компьютерной сети через корреспондентские счета (КС), открывающиеся на балансе каждого банка. Каждый платеж оформляется в виде одного электронного платежного документа (ЭПД).

Платежи бывают двух типов – срочные и несрочные. Срочные платежи проводятся в режиме реального времени, т. е. проводится корректировка КС банков сразу при обработке срочного ЭПД, а несрочные платежи – в режиме клиринговых расчетов. За обработку каждого ЭПД РЦ получает от банка-плательщика определенную сумму. На проведение ЭПД каждый банк устанавливает денежные резервы, которые уменьшаются на проведенные суммы. Как только банк установил сумму резервов, эти деньги выпадают из оборота банка. Поэтому банк заинтересован в том, чтобы суммы резервов были минимальные.

Каждый банк в течение дня видит состояния очередей своих срочных и несрочных платежей и может в случайный момент времени отозвать ЭПД из очереди ожидания средств по срочным и несрочным денежным переводам при наличии ошибочных реквизитов в ЭПД либо в случае, когда для его проведения нет средств. В этом случае при моделировании могут применяться сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания сообщений в очередях, с помощью которых можно определить вероятности состояний и средние характеристики системы межбанковских платежей [2]. В настоящей статье такая модель исследуется в нестационарном (переходном) режиме.

Анализ сети с ограниченным временем пребывания сообщений в очередях

Рассмотрим открытую экспоненциальную сеть МО с однотипными сообщениями, состоящую из n СМО $S_1, S_2, \ldots S_n$. Под состояниями сети будем понимать вектор $k(t) = (k,t) = (k_1, k_2, \ldots k_n, t)$, где k_i – число сообщений в системе S_i в момент времени t, $t \in [0, +\infty)$, $i = \overline{1,n}$. Введем систему S_0 (внешнюю среду), из которой в сеть поступает простейший поток сообщений с интенсивностью $\lambda(t)$. Пусть система S_i состоит из m_i идентичных линий обслуживания, время обслуживания сообщений в каждой из которых распределено по экспоненциальному закону с параметром $\mu_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. Обозначим через p_{0i} – вероятность поступления сообщения из системы S_0 в систему S_j, $\sum_{j=0}^{n} p_{0j} = 1$; p_{ij} – вероятность перехода сообщения в СМО S_j после ее обслуживания в СМО S_i, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$, $i = \overline{1,n}$, $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$ – функция Хэвисайда.

Длительность пребывания сообщения в очереди i-ой СМО является СВ, распределенной по экспоненциальному закону с параметром $\theta_i(t)$, и не зависит от других факторов, например, от времени пребывания в очереди других сообщений. Сообщение, время ожидания которого в очереди S_i истекло, переходит в очередь системы S_j с вероятностью q_{ij}, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{1,n}$. Матрицы $P = \|p_{ij}\|_{(n+1)\times(n+1)}$ и $Q = \|q_{ij}\|_{n\times(n+1)}$ являются матрицами вероятностей переходов неприводимых марковских цепей.

Случайный процесс $k(t) = (k,t)$ является цепью Маркова со счетным числом состояний. Возможны следующие переходы в состояние $k(t+\Delta t) = (k, t+\Delta t)$ за время Δt:

1. из состояния (k,t) с вероятностью
$$1 - \left\{ \lambda(t) + \sum_{i=1}^{n} \left[\mu_i(t) \min(k_i, m_i) u(k_i) + \theta_i(t)(k_i - m_i) u(k_i - m_i) \right] \right\} \Delta t + o(\Delta t);$$
2. из состояния $(k - I_i, t + \Delta t)$ с вероятностью
$$\lambda(t) p_{0i} u(k_i) \Delta t + o(\Delta t), \; i = \overline{1,n};$$
3. из состояния $(k + I_i, t + \Delta t)$ в одном из двух случаев с вероятностями
$$\mu_i(t) \min(k_i + 1, m_i) p_{i0} \Delta t + o(\Delta t),$$
$$\theta_i(t)(k_i + 1 - m_i) u(k_i + 1 - m_i) q_{i0} \Delta t + o(\Delta t), \; i = \overline{1,n};$$
4. из состояния $(k + I_i - I_j, t + \Delta t)$ в одном из двух случаев с вероятностями
$$\mu_i(t) \min(k_i + 1, m_i) u(k_j) p_{ij} \Delta t + o(\Delta t),$$
$$\theta_i(t)(k_i + 1 - m_i) u(k_j) q_{ij} \Delta t + o(\Delta t), \; i, j = \overline{1,n}, \; i \ne j.$$
5. из остальных состояний с вероятностью $o(\Delta t)$.

Тогда, используя формулу полной вероятности, можно записать

$$P(k, t+\Delta t) = \left(1 - \left\{ \lambda(t) + \sum_{i=1}^{n} \left[\mu_i(t) \min(k_i, m_i) u(k_i) + \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. \left. + \theta_i(t)(k_i - m_i) u(k_i - m_i) \right] \right\} \Delta t \right) P(k,t) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[\mu_i(t)\min(k_i+1,m_i)u(k_i)p_{i0}+$$

$$+\theta_i(t)(k_i+1-m_i)u(k_i+1-m_i)q_{i0}\Big]P(k+I_i,t)\Delta t+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}u(k_i)P(k-I_i,t)\Delta t+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\mu_i(t)\min(k_i+1,m_i)u(k_j)p_{ij}+$$

$$+\theta_i(t)(k_i+1-m_i)u(k_j)q_{ij}\Big]P(k+I_i-I_j,t)\Delta t+o(\Delta t).$$

Разделив обе части этого соотношения на Δt и, переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим систему уравнений для вероятностей состояний сети

$$\frac{dP(k,t)}{dt}=-\Bigg\{\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}\Big[\mu_i(t)\min(k_i,m_i)u(k_i)+$$

$$+\theta_i(t)(k_i-m_i)u(k_i-m_i)\Big]\Bigg\}\Bigg)P(k,t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[\mu_i(t)\min(k_i+1,m_i)u(k_i)p_{i0}+$$

$$+\theta_i(t)(k_i+1-m_i)u(k_i+1-m_i)q_{i0}\Big]P(k+I_i,t)+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}u(k_i)P(k-I_i,t)+\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\mu_i(t)\min(k_i+1,m_i)u(k_j)p_{ij}+$$

$$+\theta_i(t)(k_i+1-m_i)u(k_j)q_{ij}\Big]P(k+I_i-I_j,t) \qquad (1)$$

Пусть $m_i=1$, $i=\overline{1,n}$, и предположим, что все системы сети функционируют в режиме высокой нагрузки, т.е. $k_i(t)>1\ \ \forall t>0$, $i=\overline{1,n}$. Также заметим, что в системе уравнений (1) учитывается, что ограничение на время ожидания в очереди накладывается на все сообщения, независимо от того, какое место в очереди они занимают. Однако на практике аналогичное ограничение накладывается, как правило, на последнее сообщение в очереди. Поэтому система (1) принимает вид

$$\frac{dP(k,t)}{dt}=-\Bigg\{\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}\big[\mu_i(t)+\theta_i(t)\big]\Bigg\}P(k,t)+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}u(k_i)P(k-I_i,t)+\sum_{i=1}^{n}\big[\mu_i(t)p_{i0}+\theta_i(t)q_{i0}\big]P(k+I_i,t)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\big[\mu_i(t)p_{ij}+\theta_i(t)q_{ij}\big]u(k_j)P(k+I_i-I_j,t), \qquad (2)$$

количество уравнений которой счетно в случае открытой сети, и конечно, в случае замкнутой.

Обозначим через $\Psi_n(z,t)$, где $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$, $n-$ мерную производящую функцию

$$\Psi_n(z,t)=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(k_1,k_2,\ldots,k_n,t)z_1^{k_1}z_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot z_n^{k_n}=$$

$$=\sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\dots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(k,t)\prod_{i=1}^{n}z_i^{k_i} \tag{3}$$

Умножим каждое из уравнений системы (2) на $\prod_{l=1}^{n}z_l^{k_l}$ и просуммируем по всем возможным значениям k_l от 0 до $+\infty$, $l=\overline{1,n}$, получим

$$\sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{dP(k,t)}{dt}\prod_{l=1}^{n}z_l^{k_l}=-\left\{\lambda(t)+\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_i(t)+\theta_i(t)\right]\right\}\sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(k,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{k_l}+$$

$$+\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}u(k_i)\sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(k-I_i,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{k_l}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_i(t)p_{i0}+\theta_i(t)q_{i0}\right]\sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(k+I_i,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{k_l}+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\left[\mu_i(t)p_{ij}+\theta_i(t)q_{ij}\right]u(k_j)\sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_n=0}^{\infty}P(k+I_i-I_j,t)\prod_{l=1}^{n}z_l^{k_l}\ . \tag{4}$$

Используя свойства производящих функций [3] и обозначение (3) из соотношения (4), получим линейное однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\Psi_n(z,t)}{dt}=-\left\{\lambda(t)\left(1-\sum_{i=1}^{n}p_{0i}z_i\right)+\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_i(t)+\theta_i(t)\right]-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_i(t)p_{i0}+\theta_i(t)q_{i0}\right]\frac{1}{z_i}-\sum_{i,j=1}^{n}\left[\mu_i(t)p_{ij}+\theta_i(t)q_{ij}\right]\frac{z_j}{z_i}\right\}\Psi_n(z,t)\,. \tag{5}$$

Пусть

$$\Lambda(t)=\int\lambda(t)dt\,,\ \ \mathrm{M}_i(t)=\int\mu_i(t)dt\,,\ \ \Theta_i(t)=\int\theta_i(t)dt\,,\ \ i=\overline{1,n} \tag{6}$$

и в начальный момент времени сеть находится в состоянии $(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,0)$, $\alpha_i>0$, $i=\overline{1,n}$, $P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,0)=1$, $P(k_1,k_2,\dots,k_n,0)=0$, $\forall\alpha_i\neq k_i$, $i=\overline{1,n}$. Тогда начальным условием для уравнения (5) будет

$$\Psi_n(z,0)=P(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,0)\prod_{l=1}^{n}z_l^{\alpha_l}=\prod_{l=1}^{n}z_l^{\alpha_l}\ . \tag{7}$$

Учитывая обозначения (6), (7), выражение для производящей функции принимает вид

$$\Psi_n(z,t)=\exp\left\{-\left[\left(\Lambda(t)-\Lambda(0)\right)-\left(\Lambda(t)-\Lambda(0)\right)\sum_{i=1}^{n}p_{0i}z_i+\right.\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)\right)+\left(\Theta_i(t)-\Theta_i(0)\right)\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)\right)p_{i0}+\left(\Theta_i(t)-\Theta_i(0)\right)q_{i0}\right]\frac{1}{z_i}-$$

$$\left.\left.-\sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)\right)p_{ij}+\left(\Theta_i(t)-\Theta_i(0)\right)q_{ij}\right]\frac{z_j}{z_i}\right]\right\}\prod_{l=1}^{n}z_l^{\alpha_l}\ .$$

В последнем соотношении, разлагая входящие компоненты в ряд Маклорена, получаем выражение в виде, удобном для нахождения вероятностей состояний сети

$$\Psi_n(z,t)=a_0(t)\sum_{l_1=0}^{\infty}\dots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\dots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{h_1=0}^{\infty}\dots\sum_{h_n=0}^{\infty}\left(\Lambda(t)-\Lambda(0)\right)^{\sum_{i=1}^{n}l_i}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\frac{p_{0i}^{l_i}z_i^{\alpha_i+l_i-r_i-h_i+H}}{l_i!\,r_i!\,h_i!}\Big[\big(\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)\big)p_{i0}+\big(\Theta_i(t)-\Theta_i(0)\big)q_{i0}\Big]^{r_i}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n}\Big[\big(\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)\big)p_{ij}+\big(\Theta_i(t)-\Theta_i(0)\big)q_{ij}\Big]^{h_i}, \qquad (8)$$

где

$$a_0(t)=\exp\left\{-\big(\Lambda(t)-\Lambda(0)\big)-\sum_{i=1}^{n}\Big[\big(\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)\big)+\big(\Theta_i(t)-\Theta_i(0)\big)\Big]\right\}.$$

Рассмотрим открытую сеть с центральной СМО, которая может служить моделью межбанковских платежей, рис. 1.

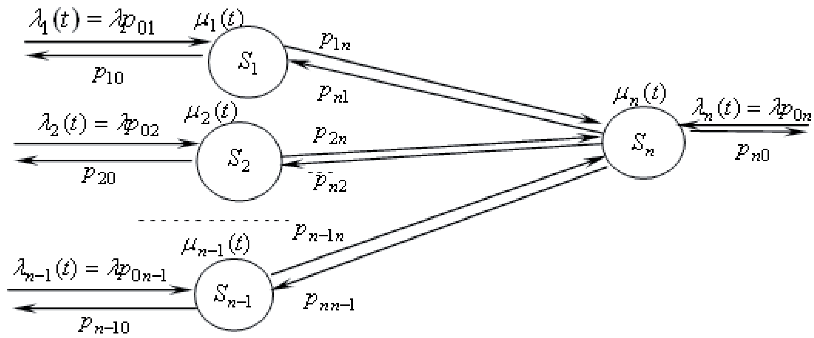

Рис. 1. Открытая сеть с центральной СМО

Центральная СМО S_n соответствует РЦ ЦБ, а системы S_i, $i=\overline{1,n}$, ПБ. Выражение для вероятностей состояний (8) в этом случае принимает вид

$$\Psi_n(z,t)=a_0(t)\sum_{l_1=0}^{\infty}\dots\sum_{l_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\infty}\dots\sum_{r_n=0}^{\infty}\sum_{h_1=0}^{\infty}\dots\sum_{h_n=0}^{\infty}\big(\Lambda(t)-\Lambda(0)\big)^{\sum_{i=1}^{n}l_i}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n-1}\left\{\Big[\big(\mathrm{M}_j(t)-\mathrm{M}_j(0)\big)p_{jn}+\big(\Theta_j(t)-\Theta_j(0)\big)q_{jn}\Big]^{h_j}\times\right.$$

$$\left.\times\Big[\big(\mathrm{M}_n(t)-\mathrm{M}_n(0)\big)p_{nj}+\big(\Theta_n(t)-\Theta_n(0)\big)q_{nj}\Big]^{h_n}\right\}\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\frac{p_{0i}^{l_i}z_i^{\alpha_i+l_i-r_i-h_i+H}}{l_i!\,r_i!\,h_i!}\Big[\big(\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)\big)p_{i0}+\big(\Theta_i(t)-\Theta_i(0)\big)q_{i0}\Big]^{r_i}, \qquad (9)$$

где $H=\sum_{i=1}^{n}h_i$.

Нахождение среднего числа сообщений в системе S_c, $c=\overline{1,n}$, осуществляется по формуле

$$N_c(t)=a_0(t)\sum_{k_1=0}^{\infty}\dots\sum_{k_n=0}^{\infty}k_c\sum_{h_1=0}^{\infty}\dots\sum_{h_n=0}^{\infty}\sum_{r_1=0}^{\alpha_1-h_1+H-1}\dots\sum_{r_n=0}^{\alpha_n-h_n+H-1}k_c\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{n}\frac{\big(\Lambda(t)-\Lambda(0)p_{0i}\big)^{k_i-\alpha_i+r_i+h_i-H}}{(k_i-\alpha_i+r_i+h_i-H)!\,r_i!\,h_i!}\Big[\big(\mathrm{M}_i(t)-\mathrm{M}_i(0)\big)p_{i0}+\big(\Theta_i(t)-\Theta_i(0)\big)q_{i0}\Big]^{r_i}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{n-1}\left\{\Big[\big(\mathrm{M}_j(t)-\mathrm{M}_j(0)\big)p_{jn}+\big(\Theta_j(t)-\Theta_j(0)\big)q_{jn}\Big]^{h_j}\times\right.$$

$$\left.\times\Big[\big(\mathrm{M}_n(t)-\mathrm{M}_n(0)\big)p_{nj}+\big(\Theta_n(t)-\Theta_n(0)\big)q_{nj}\Big]^{h_n}\right\}. \qquad (10)$$

Таким образом, соотношения (9), (10) позволяют определить вероятности состояний и среднее число сообщений открытой системы межбанковских платежей в произвольный момент времени.

Литература

1. *Маталыцкий, М. А.* Теория массового обслуживания и ее применения / М. А. Маталыцкий, О. М. Тихоненко, А. В. Паньков. Гродно: ГрГУ, 2008.

2. *Колузаева, Е. В.* Применение НМ-сетей с ограниченным временем ожидания заявок в очередях при моделировании межбанковских платежей / Е. В. Колузаева, М. А. Маталыцкий, С. Э. Статкевич // Технологии информатизации и управления сб. науч. ст. / редкол.: П. А. Мандрик (отв. ред.) [и др.]. – Минск: БГУ, 2009. С. 27–31.

3. *Деч, Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Деч. М.: Наука, 1971.

Статкевич Святослав Эдуардович, старший преподаватель кафедры стохастического анализа и эконометрического моделирования факультета математики и информатики Гродненского государственного университета имени Янки Купалы, sstat@grsu.by

УДК 681.3