ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ НА ЦИКЛИЧЕСКИХ ПЕРЕСТАНОВКАХ

Я.А. Исаченко

Белгосуниверситет, Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
yarais@mail.ru

Рассматривается следующая оптимизационная задача

$$\min_{\pi \in C_n} \sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)} b_i. \tag{1}$$

здесь C_n — множество циклических перестановок элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ — множества действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$. Для задачи рассматривается полиэдральный подход, основанный на построении системы линейных неравенств для циклического перестановочного многогранника

$$M(C_n) = \operatorname{conv}\{a(\pi) = (a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \ldots, a_{\pi(n)}) \mid \pi \in C_n\},$$

и описании его характеристик. Если удается указать полную систему линейных неравенств для $M(C_n)$, то задача (1) сводится к задаче линейного программирования. Частичное описание выпуклой оболочки дает возможность построения релаксационной задачи или последовательности релаксационных задач в виде задач линейного программирования [1].

Установлено, что $\dim M(C_n) = n - 1$, при $n \geqslant 4$, и $\operatorname{vert} M(C_n) = \{a(\pi) | \pi \in C_n\}$.

Определены отдельные семейства гиперграней многогранника $M(C_n)$ и рассматриваются вопросы, связанные со смежностью вершин многогранника $M(C_n)$. Обозначим через $(\{i_1, \ldots, i_k\}, \{i_{k+1}, \ldots, i_n\})$ множество перестановок, состоящих из двух циклов, образованных элементами $\{i_1, \ldots, i_k\}$ и $\{i_{k+1}, \ldots, i_n\}$ соответственно.

Теорема. *При $n \geqslant 4$ каждая гиперплоскость*

$$\sum_{i=1}^{n} c_{\pi(i)} x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i + (a_n - a_{n-1})(a_2 - a_1), \quad \forall \pi \in \left\{ \begin{matrix} (\{1, 3, \ldots, 2k-1\}, \{2, 4, \ldots, 2k\}), & n = 2k, \\ (\{1, 3, \ldots, 2k+1\}, \{2, 4, \ldots, 2k\}), & n = 2k+1 \end{matrix} \right\},$$

определяет грань максимальной размерности многогранника $M(C_n)$. Здесь $c_1 = a_n$, $c_2 = a_{n-1}$, $c_i = c_{i-1} - (a_n - a_{n-1})(a_2 - a_1)/(a_i - a_{i-1})$, $i = \overline{3, n}$, причем каждая гипергрань является $(n-2)$-мерным симплексом.

Следствие. *Для числа гиперграней $f(M(C_n))$ многогранника $M(C_n)$ справедливо неравенство*

$$f(M(C_n)) \geqslant \begin{cases} (k-1)!^2, & n = 2k, \\ (k-1)!k!, & n = 2k+1. \end{cases}$$

Литература

1. Schrijver A. Theory of linear and integer programming. Wiley, 1999. 471 p.