КОНИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ О КОММИВОЯЖЕРЕ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

В.М. Демиденко

Институт математики НАН Беларуси,
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
demidenko@bas-net.by

При решении задач о коммивояжере (ЗК) большой размерности в реальном времени широко используются алгоритмы локального поиска и их различные модификации, связанные с изменением в процессе вычислений правила формирования окрестностей и выбора в них представителей. К последним относятся хорошо зарекомендовавшие на практике алгоритмы "отжига", которые позволяют выходить из тупиковых ситуаций при достижении локального оптимума [1], [2]. Предлагаемая ниже коническая характеризация ЗК позволяет строить для нее различные итерационные алгоритмы указанного вида.

Пусть $\mathbb{R}^{n\times n}$ — пространство квадратных матриц порядка n, T_n — множество циклических подстановок длины n, принадлежащих симметрической группе. Поставим в соответствие каждому циклу $\tau \in T_n$ бинарную матрицу $\bar{\tau}$ с ненулевыми элементами в позициях $(i, \tau(i))$, где $i = 1, 2, \ldots, n$. Выпуклая оболочка $P_{\text{ЗК}} = \text{conv.hull}\{\bar{\tau} \in \mathbb{R}^{n\times n} \,|\, \tau \in T_n\}$ (политоп задачи о коммивояжере) позволяет сформулировать ЗК в виде задачи линейного программирования $\min\{(A, X) \,|\, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, X \in P_{\text{ЗК}}\}$, где (A, X) – скалярное произведение матриц A и X. Известно, что политоп $P_{\text{ЗК}}$ — вырожденный и принадлежит аффинной плоскости $\text{aff}\, P_{\text{ЗК}}$ с направляющим пространством $\text{vec}\, P_{\text{ЗК}} = \text{lin.hull}\{\bar{\omega} - \bar{\tau} \,|\, \omega \in T_n\}$ размерности $n^2 - 3n + 1$, где τ — любой фиксированный цикл из T_n.

Определение 1. Семейство конусов $\mathcal{K} = \{K_i \subset \text{vec}\, P_{\text{ЗК}} \,|\, i \in I\}$ назовем рассечением пространство $\text{vec}\, P_{\text{ЗК}}$, если выполняются условия $\bigcup_{i\in I} K_i = \text{vec}\, P_{\text{ЗК}}$ и $\text{im}\, K_i \bigcap \text{im}\, K_j = \varnothing$ для любых $i \neq j \in I$, где $\text{im}\, K_i$ и $\text{im}\, K_j$ внутренние части соответствующих конусов.

Любой заданной вершине $\bar{\tau} \in P_{\text{ЗК}}$ соответствует конус $K_\tau = \text{cone}\{\bar{\omega} - \bar{\tau} \,|\, \tau \neq \omega \in T_n\}$, для которого можно определить поляру $K_\tau^* = \{X \in \text{vec}\, P_{\text{ЗК}} \,|\, (B, X) \leqslant 0,\ B \in K_\tau\}$. Для введенного семейства поляр $\mathcal{K}^* = \{K_\tau^* \subset \text{vec}\, P_{\text{ЗК}} \,|\, \tau \in T_n\}$ справедлива следующая

Теорема 1. *Семейство поляр $\mathcal{K}^*$ является рассечением пространства $\text{vec}\, P_{\text{ЗК}}$.*

Доказано, что элементы ортогональной проекции $A' = (a'_{i,j})$ на пространство $\operatorname{vec} P_{\text{ЗК}}$ любой матрицы $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ удовлетворяют соотношениям

$$a'_{i,j} = a_{i,j} + \frac{1}{(n-2)(n-1)} \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{k,\ell} - \frac{(n-1)}{(n-2)n}(b_i + d_j) - \frac{1}{(n-2)n}(b_j + d_i), \quad a'_{i,i} = 0, \qquad (1)$$

где $i \neq j = 1, 2, \ldots, n$; b_i, b_j и d_i, d_j — суммы элементов, исключая диагональные, соответственно, i, j-х строк и столбцов из A. Теорема 1 и соотношения (1) позволяют сформулировать основной результат.

Теорема 2. *Максимизационный аналог* $\max\{(A, X) \mid A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ X \in P_{\text{ЗК}}\}$ *задачи о коммивояжере сводится к нахождению поляры* $K^*_{\tau_0} \in \mathcal{K}^*$, *такой, что проекция* $A' \in K^*_{\tau_0}$.

Коническая характеризация ЗК, приведенная в теореме 2, позволяет строить локальные алгоритмы ее решения, допускающие изменение структуры окрестностей, варьировать выбор их представителей в процессе вычислений, а также указывать правило выхода из тупиковых ситуаций.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке БРФФИ (проект № Ф07-293).

Литература

1. *Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B.* The traveling salesman problem. Chichester: Wiley, 1985.

2. *Gutin G., Punnen A. P.* The Traveling salesman problem and its variations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.