ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЯ ВЕКТОРНОЙ МАРКОВСКОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В.С. Муха, А.Ф. Трофимович

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники,
факультет информационных технологий и управления,
П Бровки 6, 220013 Минск, Беларусь
mukha@bsuir.by

В докладе вводится понятие эффективности экстраполирования векторной Марковской стационарной случайной последовательности, дается алгоритм ее расчета.

Рассмотрим векторную случайную последовательность $\xi(k) = (\xi_1(k), \xi_2(k), \ldots \xi_n(k))^T$, генерируемую соотношением

$$\xi(k+1) = \Phi\xi(k+1) + \varepsilon(k), \quad k = 0, 1. 2, \ldots \tag{1}$$

где Φ — $(n \times n)$-матрица, $\varepsilon(k)$ — последовательность независимых по k случайных векторов с нулевыми средними значениями и ковариационными матрицами $Q = E(\varepsilon^2(k))$. Векторы $\xi(k)$ и $\varepsilon(k)$ независимы. Начальное состояние $\xi(0)$ имеет математическое ожидание a_{ξ_0} и ковариационную матрицу P_{ξ_0} [1]

Если все собственные числа матрицы Φ меньше единицы, то данная последовательность при большом k является стационарной в широком смысле с ковариационной матрицей P_ξ, определяемой уравнением

$$P_\xi = Q + \Phi P_\xi \Phi^T. \tag{2}$$

Прогноз последовательности на глубину $m - t$ по измерению $\xi(t)$ определяется формулой

$$\hat{\xi}(m/t) = \Phi^{m-t}\xi(t). \tag{3}$$

Матрица P_ξ представляется в виде суммы $P_\xi = P_d(m,t) + P_\xi(m/t)$, где $P_\xi(m/t) = \sum_{i=t+1}^{m} \Phi^{m-i} Q (\Phi^T)^{m-i}$,

$$P_d(m,t) = \Phi^{m-t} P_\xi (\Phi^T)^{m-t}. \tag{4}$$

Эффективностью прогноза (3) назовем функцию $e(m-t)$, определяемую выражением

$$e(m-t) = \det(P_\xi^{-1} P_d(m,t)). \tag{5}$$

Можно показать, что $0 \leqslant e(m-t) \leqslant 1$. Физически единичной эффективности соответствует прогноз, совпадающий с прогнозируемой последовательностью, т.е. точный прогноз, а нулевой эффективности – прогноз, совпадающий со средним значением прогнозируемой последовательности.

Для расчета эффективности необходимо найти P_ξ из уравнения (2), затем $P_d(m,t)$ по формуле (4) и, наконец, $e(m-t)$ по формуле (5). Расчет эффективности позволяет оценить возможности алгоритма прогнозирования до его применения.

Для скалярной последовательности подстановкой (4) в (5) получаем

$$e(m-t) = P_{\xi}^{-1} P_{\xi} \Phi^{2(m-t)} = \Phi^{2(m-t)} \xrightarrow[(m-t)\to\infty]{} 0.$$

Расчеты показывают, что эффективность экстраполирования векторной последовательности (1) так же, как и скалярной, быстро убывает до нуля при увеличении глубины прогноза $(m-t)$. Это обстоятельство необходимо учитывать при желании аппроксимировать реальные данные моделью (1) с целью их экстраполирования.

Литература

1. *Острем К.Ю.* Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973.