СТАТИСТИЧЕСКИЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ БИНАРНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

Е.С. Мириленко, Е.Н. Орлова

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики

Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

dykate@yandex.ru, orlova@bsu.by

Исследуется однородная цепь Маркова $\Xi = \{\xi_t, \ t = 0, 1, 2, \dots\}$ с конечным числом состояний $S = \{0, 1\}$, известной структурой матрицы вероятностей переходов и известным начальным распределением вероятностей:

$$P = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad P\{\xi_0 = 0\} = P\{\xi_0 = 1\} = \frac{1}{2}, \tag{1}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Необходимо получить аналитическое выражение функции спектральной плотности для Ξ, исследовать свойства этой функции и построить оценки неизвестных элементов матрицы переходных вероятностей однородной цепи Маркова.

Теорема 1. *[1] Пусть Ξ однородная цепь Маркова, удовледтворяющая условиям (1). Тогда спектральная плотность Ξ вычисляется по формуле*

$$f_\varepsilon(\lambda) = \frac{1}{8\pi} \frac{1 - (2\varepsilon - 1)^2}{1 - 2(2\varepsilon - 1)\cos\lambda + (2\varepsilon - 1)^2}, \tag{2}$$

где $\lambda \in [0, \pi]$.

Следствие 1. *Если $\varepsilon \in [0, 1/2[$, тогда $\lambda_1 = \pi$ является точкой максимума функции спектральной плотности $f\varepsilon(\lambda)$ и*

$$f\varepsilon(\lambda_1) = \frac{1}{8\pi} \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Если $\varepsilon \in]1/2, 1]$, тогда $\lambda_2 = 0$ является точкой максимума функции спектральной плотности $f\varepsilon(\lambda)$ и

$$f\varepsilon(\lambda_2) = \frac{1}{8\pi} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{4}$$

Формулы (3) и (4) позволяют вычислить оценку $\hat{\varepsilon}$ параметра ε:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 8\pi \hat{f}(\lambda^*)}, & \text{если} \quad \lambda^* \in [\pi/2, \pi], \\ \dfrac{8\pi \hat{f}(\lambda^*)}{1 + 8\pi \hat{f}(\lambda^*)}, & \text{если} \quad \lambda^* \in [0, \pi/2], \end{cases} \tag{5}$$

где $\hat{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda = [0, \pi]$ — некоторая оценка спектральной плотности, $\lambda^* = \operatorname{argmax} \hat{f}(\lambda)$. Был проведен сравнительный анализ различных оценок спектральной плотности. таких как периодограмма, оценок с использованием различных окон просмотра данных, сглаженных оценок [2]. В результате проведения численных экспериментов наименьшие погрешности оценивания параметра были получены с помощью сглаженных оценок.

Литература

1. *Mirylenka (Dynovskaya) E.S., Orlova E.N.* Spectral Analysis of Markov chains // Eighth International Conference on Computer Analysis and Modeling. BSU, 2007. P. 245–247.

2. *Бриллинджер Д.* Временные ряды. Обработка данных и теория. М.: Мир, 1980.